زیپ لاین

حسابان ۲

سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

تابع

تعریف تابع (دهم)

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) حداقل چند عضو از مجموعهٔ $f=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z}, x=\frac{۷۲}{y^۲-۱}\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲) ضابطهٔ تابع قطعه‌ای f به‌صورت $f(x)=\begin{cases} x^۲-x-۷ & x\geq ۱ \\ ۲x-۱ & x<۱ \end{cases}$ است. برای چند مقدار a، $f(۱-|a|)=f(۲+|a|)$ است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳) ضابطهٔ تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x)=\begin{cases} ۷-۳x & |x|>۱ \\ -۲x & |x|<۱ \end{cases}$ است. اگر $f(۱+a^۲)=f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})$ باشد، اختلاف مقادیر a کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۳

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

دامنه‌ی توابع (دهم و یازدهم)

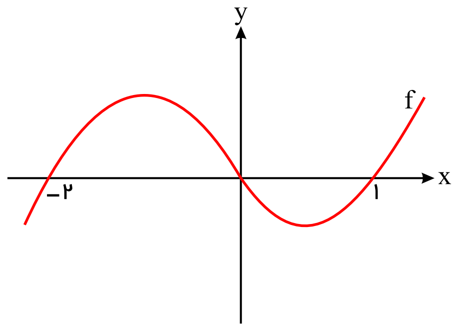
۴) به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر k، بازهٔ $(k-۲, ۳k+۲)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱}$ است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $(\frac{۱}{۳},۳]$ ۲) $[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ ۳) $[-۱,\frac{۱}{۳})$ ۴) $[-۱,-\frac{۱}{۳})$

۵ نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-\frac{f(x)}{f(۲+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲



(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۵

برد توابع (دهم و یازدهم)

۶ فرض کنید $[a\ ,\ b]$ برد تابع $f(x)=۲^{-\sqrt{۵\sin^۲(x)-۱}}$ باشد. مقدار $a+b$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

(۱) $\frac{۱}{۴}$ (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۳) $\frac{۳}{۴}$ (۴) $\frac{۵}{۴}$

۷ اگر $f(x)=x^۲-[x]$ و $f(af(\sqrt{۵}))=۲$ باشد، کدام می‌تواند مقدار a باشد؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

(۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $-\frac{۱}{۳}$ (۳) $\frac{۱}{۵}$ (۴) $-\frac{۱}{۵}$

تبدیل نمودار توابع

۸ نمودار تابع $y=-x^۲+۲x+۵$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

(۱) $(۳,۴)$ (۲) $(۲,۵)$ (۳) $(۳,۵)$ (۴) $(۲,۶)$

۹ نمودار تابع $y=x^۲-x-۳$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی و سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

(۱) $(-۵,۲)$ (۲) $(-۵,۳)$ (۳) $(-۲,۳)$ (۴) $(-۲,۵)$

۱۰ قرینهٔ نمودار تابع $y=۲+\sqrt{x-۱}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(۴)$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۴

۱۱) نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینهٔ آن نسبت به محور xها را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم؟ فاصلهٔ نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدا مختصات، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

۱۲) قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) $x=۱$ ۲) $x=۱/۵$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=۲/۵$

۱۳) ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) ۰ ، ۲ ۲) -۱ ، ۱ ۳) -۱ ، ۲ ۴) ۱ ، -۲

۱۴) نمودار منحنی $y=\sqrt{۴-x}$ را k واحد در راستای قائم و $۲-k$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به‌سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به‌دست‌آمده با محور xها کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵) نمودار تابع با ضابطه $f(x)=۴x-x^۲$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۱۶) نمودار $\frac{۱}{f}$ را در امتداد محور xها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{۱}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a)=۳$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $۲+\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

ترکیب توابع

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱۷) اگر $f(x)=۲[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) ۶

۱۸) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x & -1\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$، ماکزیمم مقدار تابع $gof-fog$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

۱) -1
۲) صفر
۳) $\frac{1}{2}$
۴) 1

۱۹) اگر $gof(x)=5x^2+11$ و $f(x)=2x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-7)$ چقدر است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) ۳
۲) ۷
۳) ۹
۴) ۱۱

۲۰) اگر $f(x)=\frac{\sqrt{2}x}{3x-\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{2})$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
۲) $\sqrt{2}$
۳) 2
۴) $\frac{1}{2}$

انواع تابع

۲۱) دو تابع $f(x)=b-3ax$ و $g(x)=c-(3b-3)x$ ثابت هستند. اگر $f+g=5$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) -6
۲) -4
۳) 4
۴) 6

۲۲) اگر $f(x)=(ax+2)(b-x)-7x^2$ ضابطهٔ یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) $-\frac{2}{7}$
۲) $\frac{2}{7}$
۳) $-\frac{4}{7}$
۴) $\frac{4}{7}$

۲۳) اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y=-5x^2+ax-8$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $(-\infty, 2/5]$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) $13/75$
۲) $14/25$
۳) $23/25$
۴) $24/75$

۲۴) اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y=ax^2+7x-1$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $[-0/7, +\infty)$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳

۱) $-3/45$
۲) $-4/55$
۳) $-5/25$
۴) $-6/35$

۲۵) تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+2|+|x-1|$، روی کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) $(-\infty,-2)$
۲) $(-\infty,1)$
۳) $(-2,1)$
۴) $(1,+\infty)$

۲۶) تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+1|-|x-2|$، روی کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) $(-\infty,2)$
۲) $(-1,+\infty)$
۳) $(-1,2)$
۴) $(2,+\infty)$

۲۷) فرض کنید برد تابع $f(x)=2\sqrt[3]{9\cos^2(x)-1}-2\sqrt[3]{1-9\cos^2(x)}$ به‌صورت $[a,b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{21}{4}$

۲۸) تابع $f(x)=(-9+k^2)x^3+5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k، چقدر است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

۲۹) تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(3)=0$ باشد، دامنهٔ $g(x)=\sqrt{x^2 f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰) تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{(x+1)^2}-|3x-6|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) $-\frac{1}{2}x-7\,,\ x\geq 2$ ۲) $-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\,,\ x\leq 3$ ۳) $-2x+14\,,\ x\leq 3$ ۴) $-2x-\frac{14}{3}\,,\ x\geq 2$

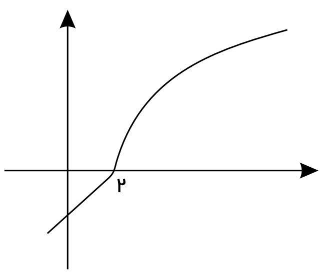
۳۱) تابع $f(x)=mx^2-nx-k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعهٔ زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{5})$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲ $\{(m\,,\,n-1)\,,\,(0,k)\,,\,(n-1,m^2+2m-1)\,,\,(3k+2,2k+1)\}$

۱) -1 ۲) $-\sqrt{5}$ ۳) 1 ۴) $\sqrt{5}$

۳۲) اگر $f(x)=|\frac{1}{2}x-1|$ و شکل زیر نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2)))$ چند ریشه دارد؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳) تابع f اکیداً نزولی و دامنهٔ آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2-m-5)<f(-3+2m-m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۴) تابع f اکیداً صعودی و دامنهٔ آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر $f(2m^2-9m-2)<f(m^2-4m+4)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۵) تابع $y=(x-۱)|x|$ در بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

وارون تابع

۳۶) فرض کنید M نقطهٔ تلاقی نمودار تابع $y=\sqrt{x+۳}-۱$ با تابع وارون خود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات کدام است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۳۷) نمودار منحنی $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام‌یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به‌دست آمده، قرار دارد؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

۱) $(۱-\sqrt{۵}\,,\,۰)$ ۲) $(-\sqrt{۵}\,,\,۰)$ ۳) $(۰\,,\,۱-\sqrt{۵})$ ۴) $(۰\,,\,-\sqrt{۵})$

۳۸) وارون تابع $y=x^۳-x+۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) $(-۱,-۲)$ ۲) $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱۱}{۸})$

۳۹) تابع $f(x)=x^۲\sqrt{x^۲}$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) $-\sqrt{x^۳}, x\leq ۰$ ۲) $-\sqrt[۳]{x}, x\leq ۰$ ۳) $-\sqrt{x^۳}, x\geq ۰$ ۴) $-\sqrt[۳]{x}, x\geq ۰$

۴۰) وارون تابع $y=-۳x^۳+۲x-۱۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) $(۹,-۲)$ ۲) $(۲,-۳۱)$ ۳) $(-۱,۱۰)$ ۴) $(-۱۲,-۱)$

۴۱) فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y=x^۳+۳x-۱۲$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۴۲) تابع $f(x)=\begin{cases} ۲-۳x & , \quad ۲x+۳\leq ۰ \\ ۲+۲mx-x^۲ & , \quad ۲x+۳>۰ \end{cases}$ روی دامنهٔ تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به‌ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-۱}(-۱۹)$ کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۴۳) وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}$ در دامنهٔ محدود، خط $y=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+۴)$ کدام است؟
مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) ۲
۴) ۱

۴۴) وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{mx-۱}$ در دامنهٔ محدود، خط $۵y-۱۰x=۱۲$ را در نقطه‌ای به عرض ۷٫۲ قطع می‌کند. مقدار $f(\frac{۴}{m})$ کدام است؟
مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۱۵}$
۴) $۲\sqrt{۱۵}$

۴۵) به‌ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^۳+۶x^۲+ax+۱$ خط $۱۰y-x=-۱۰$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟
مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۱۵
۲) ۱۲
۳) ۹
۴) ۵

۴۶) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱+x}}$، در چند نقطه تابع وارون خود را قطع می‌کند؟
مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۴۷) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}$، در چند نقطه، تابع وارون خود را قطع می‌کند؟
مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۳

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۴۸) اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$، کدام است؟
مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$
۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$
۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$
۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

۴۹) اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-۱}of)-f$، کدام است؟
مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $\{-۱,۴\}$
۲) $\{۲,۳\}$
۳) $\{۳,۴\}$
۴) $\{۲,-۱\}$

۵۰) اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^۳+x$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$، کدام است؟
مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) ۱٫۵
۲) ۲
۳) ۲٫۵
۴) ۳

۵۱) اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

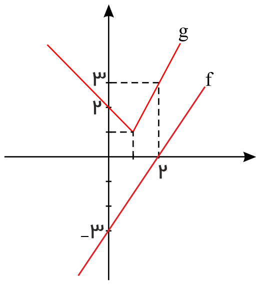
(۱) $\dfrac{2}{5}$ (۲) $\dfrac{3}{5}$ (۳) $\dfrac{2}{3}$ (۴) $\dfrac{3}{4}$

۵۲) با فرض $x\geq 2\ ;\ f(x)=x^2-4x+9$ و $g(x)=\dfrac{3-x}{2}$، حاصل $(f^{-1}og^{-1})(-9)$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۳) با توجه به نمودارهای f و g در شکل زیر، حاصل $gof^{-1}(-2)\times gog(0)$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

(۱) ۶ (۲) ۴
(۳) -4 (۴) -6



۵۴) توابع $f(x)=log(2x-5)$ و $g(x)=x+\sqrt{2x-4}$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y=g^{-1}of^{-1}(x)$ محور yها را در a قطع کند، مقدار a کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

(۱) $4-\sqrt{2}$ (۲) $4-\sqrt{3}$ (۳) $4+\sqrt{2}$ (۴) $4++\sqrt{3}$

بخش‌پذیری (دوازدهم)

۵۵) باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به‌ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

(۱) $-x+4$ (۲) $x+3$ (۳) $2x+6$ (۴) $2x-3$

۵۶) به ازای یک مقدار a، چندجمله‌ای $P(x)=2x^4+ax^3+2x^2-3x$ ، بر $2x-1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x+2$ ، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

(۱) -10 (۲) -8 (۳) ۴ (۴) ۶

۵۷) تابع چند جمله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب طبیعی $p(x)$ مفروض است. اگر باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم $p(x)$ به $p'(x)$ (مشتق تابع $p(x)$) به‌ترتیب -2 و $\dfrac{1}{2}x+1$ باشند کمترین مقدار مجموع ضرایب $p(x)$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۵۸ باقیمانده و خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲+۲x$ به‌ترتیب $۳x+۱$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-۲)=۳$، آنگاه مقدار باقیماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+۲$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

۱) -۶ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۳

۵۹ چندجمله‌ای $p(x)=x^{۳n+۱}+۲x^{۳n}+x^۶+۳x^۵+۱۶a$، به‌ازای هر عدد طبیعی n بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. برای $n=۱$، باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^۲+۲x-۳$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) $-۱۵x+۲۴$ ۲) $-۱۵x+۱۴$ ۳) $-۵x+۳۴$ ۴) $-۵x+۴۴$

۶۰ نقطهٔ $A(-۱,۱)$ اکسترمم نسبی تابع $y=x^۲|x|+۳ax^۲+b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۶۱ محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+۳}{(a+۱)x+(a-۱)}$ نقطهٔ مینیمم تابع $y=\frac{۳}{۲}x^۲+x+\frac{۵}{۶}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۶۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x)=x^۲+۴x+۵$ برابر $x+۲$ است. اگر $f(۱)=۱۳$ و $f(-۱)=۱۱$ باشد، خارج‌قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) $-x+۲$ ۲) $۲x-۱$ ۳) $۳x-۲$ ۴) $-۲x+۳$

۶۳ اگر $r(x)$ باقیماندهٔ تقسیم $۲-x^{۱۴}$ بر $x^۲+x+۱$ باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ $(x\neq ۱)$

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۴

۶۴ اگر $r(x)$ باقیماندهٔ تقسیم $۵-x^{۱۷}$ بر $x^۲-x+۱$ باشد، حاصل‌ضرب ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ $(x\neq -۱)$

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳

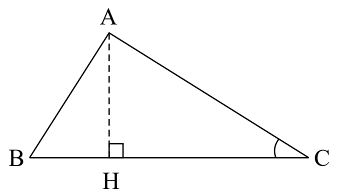
۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۶ ۴) ۶

مثلثات

مفاهیم مقدماتی

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

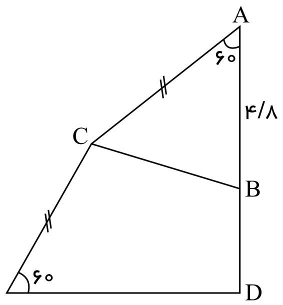
۶۵) در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و $AC = ۹۶$. اندازهٔ ارتفاع AH کدام است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۶
۳) ۶۴
۴) ۷۲

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۶۶) در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر $۷٫۲\sqrt{۳}$ است. فاصلهٔ D از C کدام است؟



۱) $۶\sqrt{۶}$
۲) $۳\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۶۷) حاصل عبارت $\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})\tan(\frac{۱۹\pi}{۴}) + \cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۶۸) حاصل عبارت $\cos\frac{۱۳\pi}{۴}\sin\frac{۱۵\pi}{۴} + \tan\frac{۱۱\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۶۹) حاصل عبارت $\cos\frac{۱۰\pi}{۳} + \sin\frac{۱۱\pi}{۳}\tan\frac{۱۷\pi}{۶}$، کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۷۰) اگر $-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}$ و $\tan(\frac{\pi}{۴} - x) = \frac{۱-m}{۲+m}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۲,۱]$ ۳) $(-۱,۲]$ ۴) $(-۱,۲)$

۷۱) اگر $\frac{۵\pi}{۱۲} < x < -\frac{\pi}{۱۲}$ و $\sin ۲x = \frac{m-۱}{۴}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟ (مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱)

۱) $(-۱,۵)$ ۲) $(-۱,۵]$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(-۱,۱]$

۷۲) اگر $\tan x + \cot x = -۳$ و $۳\pi < ۴x < ۴\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\cos^۳ x + \sin^۳ x}$ کدام است؟ (مرجع: سراسری– ۱۴۰۲)

۱) $-۰٫۵\sqrt{۶}$ ۲) $۰٫۷۵\sqrt{۳}$ ۳) $-۰٫۷۵\sqrt{۳}$ ۴) $۰٫۵\sqrt{۶}$

۷۳) حاصل عبارت $(\sqrt{۲}\cos x - \sqrt{۲}\sin x + ۳\cos ۴x)$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟ (مرجع: سراسری– ۱۴۰۳)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۷۴) اگر $\frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = tg\alpha - \frac{۱}{\sqrt{\cos^۲\alpha}}$ و $\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = -\frac{۱}{\cot\alpha}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟ (مرجع: سراسری– ۱۴۰۳)

۱) چهارم ۲) سوم ۳) دوم ۴) اول

۷۵) اگر $۴ = ۳\sin^۲ x + a\cos^۲ x$ باشد، $\cot^۲ x$ با کدام مورد برابر است؟ (مرجع: سراسری– ۱۴۰۳)

۱) $\frac{۱}{a-۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴-a}$ ۳) $\frac{۱}{a-۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳-a}$

۷۶) در مثلث ABC، اگر $\sqrt{۳} = \tan(B-C)$ باشد، حاصل عبارت $\frac{۱-۲\cos(B+C)}{۴\sin B\cos C}$ کدام است؟ (مرجع: سراسری– ۱۴۰۳)

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\tan B$ ۴) $\tan C$

۷۷) اگر $۴ = \cot x$ باشد، مقدار $\frac{۳\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ کدام است؟ (مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳)

۱) ۰٫۲ ۲) ۰٫۴ ۳) ۱٫۴ ۴) ۲٫۲

۷۸) در مثلث ABC، اگر $\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \cot(\widehat{B}-\widehat{C})$ باشد، حاصل عبارت $\frac{۲\cos(\widehat{B}+\widehat{C})+۱}{۴\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}}$ کدام است؟ (مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳)

۱) $\tan\widehat{B}$ ۲) $\tan\widehat{C}$ ۳) $\cot\widehat{B}$ ۴) $\cot\widehat{C}$

روابط مثلثاتی

۷۹) اگر $\frac{۳\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل $(\sin^۲ x - \sin^۲\frac{\pi}{۴}۲)\sqrt{۱+\tan^۲ x}$، کدام است؟ (مرجع: سراسری– ۱۳۹۸)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

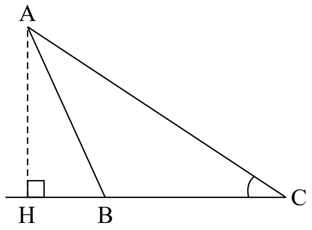
۸۰) اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $(\frac{۱}{\sin x} - \sin x)\frac{\tan x}{\sqrt{۱ + \tan^۲ x}}$ ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) $-\cos^۲ x$ ۲) $-\cos x$ ۳) $\cos^۲ x$ ۴) $\cos x$

۸۱) در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{۵}{۱۳}$ و $CH = ۹$، اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۹



۱) ۳٫۲۵
۲) ۳٫۵
۳) ۳٫۶
۴) ۳٫۷۵

۸۲) فرض کنید زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha) = \frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{۲}) - \sin(\alpha - \pi))}{|\tan^۲(\alpha) - ۱|}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

۱) $\frac{۴(۲ + \sqrt{۵})}{۳}$ ۲) $\frac{۴(-۲ + \sqrt{۵})}{۳}$ ۳) $\frac{۴(۲ - \sqrt{۵})}{۳}$ ۴) $\frac{-۴(۲ + \sqrt{۵})}{۳}$

۸۳) اگر $۲\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$ باشد، حاصل $\tan^۲ x$ کدام است؟ $(x \neq ۰)$

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸۴) اگر $\sin\alpha = ۲\cos\alpha$ و انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) $-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$

۸۵) حاصل عبارت $\frac{\cos^۴\alpha + ۴\sin^۲\alpha}{۱ + \sin^۲\alpha} - \frac{\sin^۴\alpha + ۴\cos^۲\alpha}{۱ + \cos^۲\alpha}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\cos ۲\alpha$ ۴) $\sin ۲\alpha$

۸۶) اگر انتهای کمان α در ربع دوّم دایرهٔ مثلثاتی و $\sin\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۱۱\pi}{۴} + \alpha)$، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۹

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۸۷) اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$ باشند، $\tan(\alpha + \beta)$، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۹

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) -۳ ۴) -۱

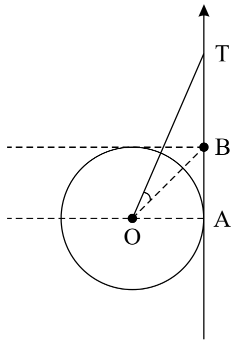
۸۸) اگر انتهای کمان α در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{۱}{۷}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۹

۱) $-\frac{۴}{۵}$
۲) $-\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۸۹) با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر، اگر $BT = ۲$ باشد، مقدار $\tan(T\hat{O}B)$ کدام است؟

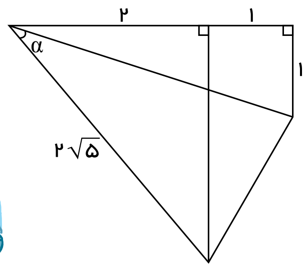
مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۹



۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۹۰) در شکل زیر، مقدار $\cos\alpha$ چقدر است؟

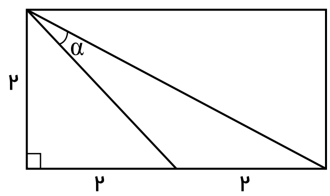
مرجع: سراسری– ۱۴۰۲



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۱۵}$
۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$

۹۱) در شکل زیر مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟

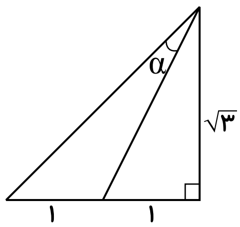
مرجع: سراسری– ۱۴۰۲



۱) ۱
۲) ۳
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۹۲) در شکل زیر، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۲



۱) $\frac{۱}{۵\sqrt{۳}}$
۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$

۹۳) در یک مستطیل، جذر مساحت، نصف طول قطر است. اگر B و C دو زاویهٔ ایجادشده در یک طرف قطر باشد، مقدار تانژانت $(\widehat{B}-\widehat{C})$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳

۱) ۳
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$
۴) $\sqrt{۳}$

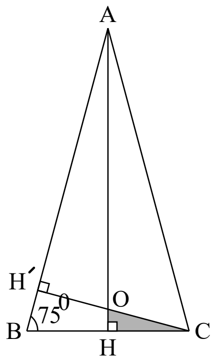
۹۴) اگر $f(x) = ۱۶\cos^۲(۳x)\cos^۲(۶x)\cos^۲(۱۲x)\cos^۲(۲۴x)$، مقدار $f(\frac{\pi}{۳۶})$ کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $\frac{۶ - ۳\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۲) $\frac{۶ - \sqrt{۳}}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶ + \sqrt{۳}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶ + ۳\sqrt{۳}}{۱۶}$

۹۵) اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی و $tan\alpha = \frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(۲\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(۲\alpha)}$ کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $-\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۲) $\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$ ۳) $\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۴) $-\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

۹۶) در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۰



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۱۸}{۷ + ۴\sqrt{۳}}$

۴) $\frac{۹}{۲(۷ + ۴\sqrt{۳})}$

۹۷) اگر $f(x) = ۳۲\cos^۲(x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

۱) $\frac{۶ + \sqrt{۲۷}}{۳۲}$ ۲) $\frac{۶ + \sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶ - \sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶ - \sqrt{۲۷}}{۳۲}$

۹۸) اگر $\tan(\frac{\alpha}{۲}) = \frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $-\frac{۹۱}{۱۰۵}$ ۲) $-\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۴) $\frac{۹۱}{۱۰۵}$

۹۹) اگر $f(\alpha) = ۴\sin(\alpha)\cos(۲\alpha) + ۲\sin(\alpha)$ باشد مقدار $f(\frac{۴۱\pi}{۹})$ کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۰۰) ساده شدهٔ عبارت $\frac{۱ + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{۱ - \cos(\theta)}$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

۱) $\cos(\frac{\theta}{۲})$ ۲) $\sin(\frac{\theta}{۲})$ ۳) $۲\cot(\frac{\theta}{۲})$ ۴) $۲\tan(\frac{\theta}{۲})$

۱۰۱ اگر $۱۰(\sin x+\cos x)=۶\sqrt{۵}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

① $-\frac{۱}{۳}$ ② -۲ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ ۳

۱۰۲ اندازهٔ زاویهٔ A در مثلث ABC، ۴۵ درجه بیشتر از اندازهٔ زاویهٔ B است. حاصل $۲\cos A\sin B-\sin C$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

① $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ② $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ③ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ④ $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۰۳ اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}=۴$ باشد، مقدار صحیح $\tan\frac{x}{۲}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

① ۲ ② -۲ ③ ۳ ④ -۳

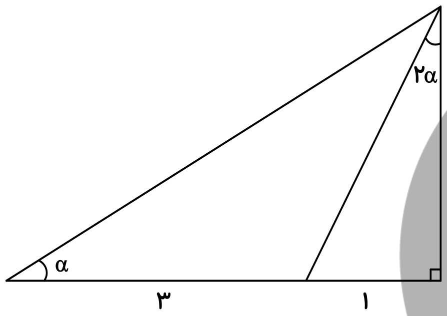
۱۰۴ در معادله مثلثاتی $\sqrt{۶}=m(\cos x-\sin x)-۳\sqrt{۶}\sin(۲x)$ اگر $\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

① -۶ ② -۳ ③ ۶ ④ ۳

۱۰۵ در شکل زیر، مقدار $\cos ۲\alpha$ کدام است؟

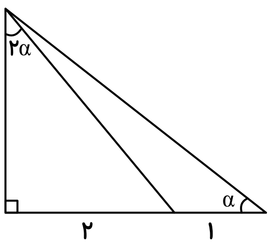
مرجع: سراسری– ۱۴۰۳



① $\frac{۱}{۴}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۳}{۵}$ ④ $\frac{۴}{۵}$

۱۰۶ در شکل زیر، مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳



① ۱ ② ۲ ③ $\sqrt{۲}$ ④ $\sqrt{۳}$

دوره تناوب و کاربرد آن

۱۰۷ دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

① $\frac{۱}{۲}$ ② ۱ ③ ۲ ④ π

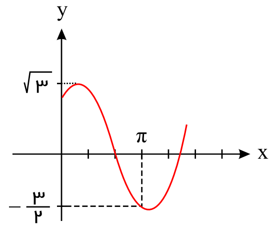
۱۰۸ فرض کنید تابع f به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ نسبت به خطوط $x = ۱$ و $x = ۳$ متقارن باشد. کدام عبارت زیر درست است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

(۱) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۵ است.
(۲) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۳ است.
(۳) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است.
(۴) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

۱۰۹ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟

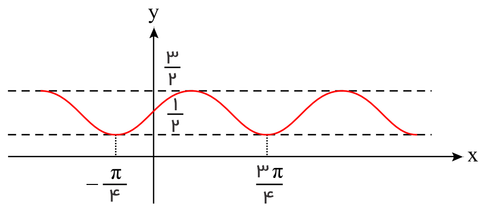
مرجع: سراسری– ۱۳۹۸



(۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
(۲) $\frac{۳}{۲}$
(۳) $\sqrt{۳}$
(۴) ۲

۱۱۰ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟

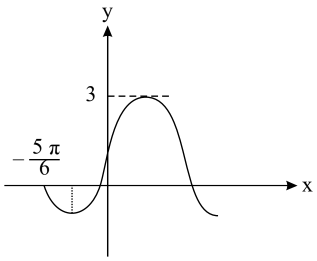
مرجع: سراسری– ۱۳۹۸



(۱) ۱
(۲) $\frac{۳}{۲}$
(۳) ۲
(۴) ۳

۱۱۱ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸



(۱) ۱٫۵
(۲) ۲
(۳) ۲٫۵
(۴) $۱ + \sqrt{۳}$

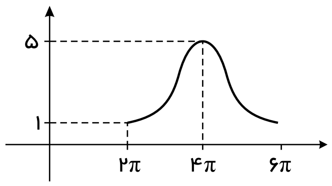
۱۱۲ نمودار تابع $y = ۲^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

(۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۴

۱۱۳ شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a\cos bx$ را در یک دورهٔ تناوب، نشان می‌دهد. مقدار c کدام است؟

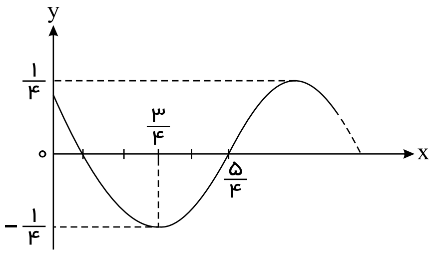
مرجع: سراسری– ۱۴۰۱



(۱) ۵
(۲) ۴
(۳) ۳
(۴) ۱

۱۱۴ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > ۰$ و $۰ < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱



(۱) $\frac{۱}{۱۶}$

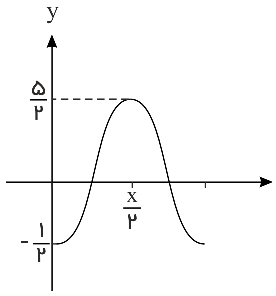
(۲) ۱

(۳) $\frac{۱}{۴\pi}$

(۴) π

۱۱۵ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a\cos bx$ را نشان می‌دهد، مقدار ac کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱



(۱) -۵

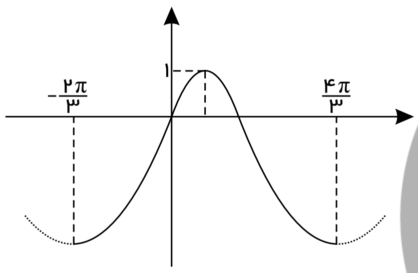
(۲) -۲

(۳) $-\frac{۵}{۲}$

(۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۱۶ شکل زیر، قسمتی از نمودار $y = a + b\cos(cx - \frac{\pi}{۳})$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c-a)$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

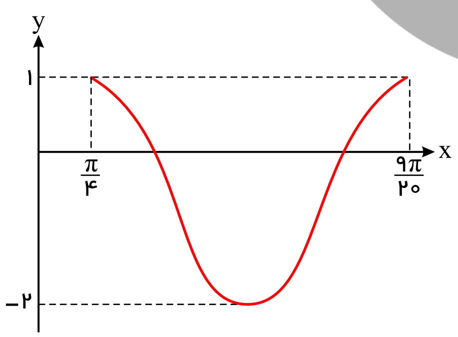


(۱) ۲ (۲) ۳

(۳) ۴ (۴) ۶

۱۱۷ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\cos^۲(bx - \frac{\pi}{۴}) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟

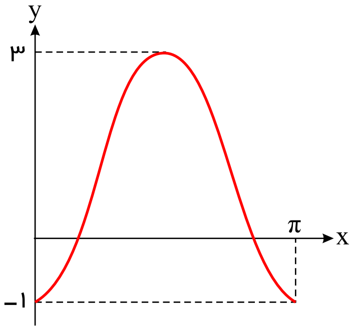
مرجع: سراسری– ۱۴۰۲



(۱) ۱۵ (۲) -۱۵ (۳) $۷/۵$ (۴) $-۷/۵$

۱۱۸) اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b\sin(cx - \frac{۳\pi}{۴})\cos(cx - \frac{۳\pi}{۴})$ باشد، اختلاف صفرهای تابع f در بازهٔ $[۰, \pi]$، کدام است؟

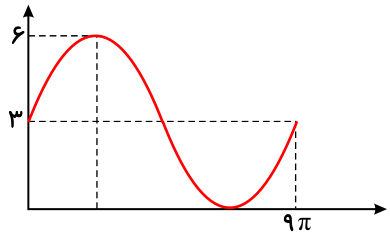
مرجع: سراسری– ۱۴۰۲



۱) $\frac{\pi}{۶}$
۲) $\frac{\pi}{۴}$
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۱۱۹) اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{۲}{a} - \frac{b}{۱ + \tan^۲(cx - \frac{۳\pi}{۴})}$ باشد، مقدار $f(\frac{۳\pi}{۴})$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۲



۱) ۴
۲) ۴٫۵
۳) ۴٫۷۵
۴) ۵

معادلات مثلثاتی (دوازدهم)

۱۲۰) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin x \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) ۳π
۳) ۴π
۴) ۵π

۱۲۱) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۳ x + \cos^۳ x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) $\frac{۷\pi}{۲}$
۳) ۲π
۴) ۳π

۱۲۲) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x + \cos^۴ x = \frac{۱}{۲}$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) ۳π
۳) $\frac{۷\pi}{۲}$
۴) ۴π

۱۲۳) جواب کلّی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$، با شرط $\cos x \neq ۰$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) $x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳}$
۲) $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$
۳) $x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$

۱۲۴) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan(۳x)\tan(x) = ۱$، در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۹

۱) ۵π
۲) ۶π
۳) $\frac{۹\pi}{۲}$
۴) $\frac{۱۱\pi}{۲}$

۱۲۵ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۶})+\cos(x+\frac{\pi}{۳})=\cos ۲x$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

(۱) $x=\frac{۲k\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ (۲) $x=\frac{k\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ (۳) $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ (۴) $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

۱۲۶ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲(x)-\sin^۲(x)\cos(۳x)=۱$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲۷ فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(۴\alpha))(۱+\cos(۸\alpha))=\frac{۱}{۸}$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ باشد، ماکزیمم عضو مجموعهٔ A، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

(۱) $\frac{۵}{۷}\pi$ (۲) $\frac{۶}{۷}\pi$ (۳) $\frac{۷}{۹}\pi$ (۴) $\frac{۸}{۹}\pi$

۱۲۸ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin(x)\cos(۲x)+\sin(x)=۱$، در بازهٔ $[۰\ ,\ ۲\pi]$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

(۱) ۲π (۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ (۳) ۳π (۴) $\frac{۷\pi}{۲}$

۱۲۹ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos(\alpha))(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(۴\alpha))=\frac{۱}{۸}$، در فاصلهٔ $[۰\ ,\ ۲\pi]$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

(۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۱۳۰ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۸\cos x-\tan^۲ x=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۱۳۱ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin x+\sqrt{۳}\cos x=\sqrt{۲}$ در بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

(۱) $\frac{\pi}{۳}$ (۲) $\frac{۷\pi}{۳}$ (۳) $\frac{۹\pi}{۴}$ (۴) $\frac{۱۱\pi}{۶}$

۱۳۲ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱$ در بازهٔ $[۰,۲x]$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۳ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴})=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

(۱) $\frac{\pi}{۲}$ (۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ (۳) $\frac{\pi}{۴}$ (۴) $\frac{۵\pi}{۴}$

۱۳۴ کمترین فاصلهٔ بین دو مقدار از جواب‌های معادلهٔ $\frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۲π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

۱۳۵ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $cos(\frac{۱۷\pi}{۸}+x)cos(\frac{۳\pi}{۸}-x)=cos^۲(\frac{\pi}{۳})$ در بازه $|\frac{\pi}{۲}, -\frac{\pi}{۲}|$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۱۳۶ اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{۱}{\cos(\frac{\pi+۸x}{۲})}+\frac{۱}{\sin(\frac{\pi+۴x}{۲})}=۰$ در بازه $[۰,\pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(۲\alpha)$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۱۳۷ در معادلهٔ مثلثاتی $۳\sin x-\sqrt{۳}\cos x+m\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})=۱$ اگر $\sin(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۳۸ مجموع جواب‌های معادله $\cos ۲x+\sin^۲ x=۰$ در بازهٔ $[-۳\pi, \pi]$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) صفر ۲) $-\pi$ ۳) -۳π ۴) -۴π

۱۳۹ تعداد جواب‌های معادله $\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})+\cos(x+\frac{\pi}{۴})=۰$ در بازه $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۰ مجموع جواب‌های معادله $\cos(x-\frac{\pi}{۳})+\cos(\frac{\pi}{۶}-x)=۰$ در بازه $(۰,۲\pi)$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۳

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۹\pi}{۴}$

حد

مفاهیم مقدماتی

۱۴۱ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر x، بازهٔ $(x+۱, ۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) $\varnothing$ ۲) $\{۲\}$ ۳) $۲<x<۲/۵$ ۴) $۱/۵<x<۲$

۱۴۲) مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}^-}[2\sin x - 1]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) وجود ندارد.

رفع ابهام $0/0$

۱۴۳) اگر $f(x) = x\left(\sqrt{\dfrac{2x+1}{5x+9}}\right)^3$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) $\dfrac{1}{27}$ ۲) $\dfrac{1}{9}$ ۳) $\dfrac{2}{7}$ ۴) $\dfrac{3}{14}$

۱۴۴) حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4}{x^3-[x^3]}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) صفر ۲) $\dfrac{1}{3}$ ۳) 1 ۴) $+\infty$

۱۴۵) حاصل $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|x+1|+[x]}{x-[-x]}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) 1

۱۴۶) اگر در ریشه‌ای از معادله $5x^2 - ax + b = 0$، حد تابع $f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$ موجود بوده و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار $\left[\dfrac{b-2a}{3}\right]$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) -3 ۲) -2 ۳) 1 ۴) صفر

۱۴۷) مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-[x^2]}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) $\dfrac{1}{4}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) صفر

۱۴۸) حد عبارت $\dfrac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x \to -8$، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

۱۴۹) حدّ عبارت $\dfrac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}$، وقتی $x \to 2$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) $-\dfrac{1}{3}$ ۲) $-\dfrac{1}{4}$ ۳) $-\dfrac{1}{6}$ ۴) $-\dfrac{1}{8}$

۱۵۰ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۲x - ۷\sqrt{x} + ۵}{۲x - \sqrt{۳x + ۱}}$، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۹

۱) $-۱٫۵$ ۲) $-۱٫۲$ ۳) $-۰٫۸$ ۴) $-۰٫۶$

۱۵۱ حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{\sqrt{۲x + ۳} - \sqrt{۳x + ۴}}{۱ + \sqrt[۳]{x}}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\dfrac{۳}{۲}$

۱۵۲ مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to ۸} \dfrac{b\sqrt{۲ + \sqrt[۳]{x}} - ۲b}{ax - b}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) $\dfrac{۱}{۱۲}$ ۲) $\dfrac{۱}{۶}$ ۳) $\dfrac{۱}{۴۸}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲۴}$

۱۵۳ اگر $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{a + \sqrt{(bx + ۱)(cx + ۱)}}{x} = ۲$ باشد، مقدار $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۴}$

۱۵۴ اگر $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{a + \sqrt{bx + c}}{x} = \dfrac{۱}{۴}$ باشد، مقدار $\dfrac{ab}{c}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

۱۵۵ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{\sin^۲ \pi x}{[x] + \cos \pi x}$ ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) π ۴) ۲π

۱۵۶ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{\sqrt{۲ + ۳x} - \sqrt{۲ - x}}{\sqrt{۱ - \cos x}}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۹

۱) -۲ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۱۵۷ فرض کنید $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{tg^۲\left(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} - ۱\right)}{\left(۱ - \cos(\sqrt{۲x})\right)^n} = a$ مقدار $a + n$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $\dfrac{۷}{۴}$ ۲) $\dfrac{۹}{۴}$ ۳) $\dfrac{۱۵}{۴}$ ۴) $\dfrac{۱۷}{۴}$

۱۵۸ فرض کنید $f(x)=\cos^۳(۲x)+ax^۲+b$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{f(x)}{x}=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{f'(x)}{x}=۲$ مقدار $a+b$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸–

۱۵۹ فرض کنید $a=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{\sin(\sqrt{۱-x^۳}-۱)-۲\tan[x]}{x^n(۱-\cos(\sqrt{۳x}))}$ ، باشد. مقدار a^n، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

۱) $\dfrac{۱}{۹}$ ۲) $\dfrac{۲}{۹}$ ۳) $\dfrac{۱}{۳}$ ۴) $\dfrac{۲}{۳}$

۱۶۰ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{\sqrt{۲-۳x}-\sqrt{۲-۵x}}{\sqrt{۲-۲\cos x}}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۶۱ اگر $f(x)=\left(\dfrac{-۱+\sin x}{۱+\sin x}\right)^۲$ و $f(x)=xg(x)+۱$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}g(x)$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۴– ۴) ۲–

۱۶۲ اگر $f(x)=\dfrac{۵\cos x}{۱-\sin x}$ و $f(x)=xg(x)-۲x+۵$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}g(x)$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۲

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

حدهای نامتناهی

۱۶۳ در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x+|x|}$، کدام بیان، درست است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=+\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=-\infty$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=+\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=-\infty$

۱۶۴ اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۲x-۵}{x^۲+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) ۱– ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶۵ در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sin x}{۱+۲\cos x}$، کدام بیان، درست است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) $\lim\limits_{x\to (\frac{۲\pi}{۳})^+}f(x)=-\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to (\frac{۲\pi}{۳})^+}f(x)=+\infty$ ۳) $\lim\limits_{x\to (\frac{۲\pi}{۳})^-}f(x)=-\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to \frac{۴\pi}{۳}}f(x)=+\infty$

166 مقدار $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \dfrac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $+\infty$

167 مقدار $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} \dfrac{16x-[-\frac{2}{x^2}]}{24x+[\frac{3}{x^2}]}$، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) $\frac{2}{3}$

168 اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \dfrac{ax+b}{a\cos x-\sin x}=-\infty$ باشد، کمترین مقدار صحیح b کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

169 اگر $f(x)=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ باشد، نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-3,0)$ ۳) $(3,1)$ ۴) $(1,0)$

170 برای چند مقدار a، تابع $f(x)=\dfrac{3x^2-8x-3}{ax^2+(1-a)x+a+1}$ یک مجانب قائم دارد؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

171 برای چند مقدار a تابع $f(x)=\dfrac{2x^2+x-6}{ax^2+(a-2)x+4}$ یک مجانب قائم دارد؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۳

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

حد در بی‌نهایت

172 اگر $f(x)=x-\sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۳

173 فرض کنید $n\in\mathbb{N}$. حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times2^{1-2n}}$، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -1

۱۷۴ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{۳^{۲n} - ۳^{-۲n+۱}}{۲ \times ۳^{۲n} + ۳^{-۲n+۱}}$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۹

۱) $+\infty$ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ۰ ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

۱۷۵ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\dfrac{۱}{x+۱}+\dfrac{۱}{x}} - \sqrt{\dfrac{۱}{x^۲}-\dfrac{۱}{x^۲+۱}}\right)$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۷۶ اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[۵۰]{(a^۲x^۲-۱)(a^۴x^۴-۱)\cdots(a^{۱۰۰}x^{۱۰۰}-۱)}}{a^{۴۹}x^k - ۱} = -۱$ آنگاه، مقادیر a و k کدام‌اند؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $k=۵۱\ ,\ a=-۱$ ۲) $k=۵۱\ ,\ a=۱$ ۳) $k=۴۹\ ,\ a=-۱$ ۴) $k=۴۹\ ,\ a=۱$

۱۷۷ اگر $g(x) = \dfrac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}$ و $\lim\limits_{x\to۱^+}(۴-[x])g(x) = ۶$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

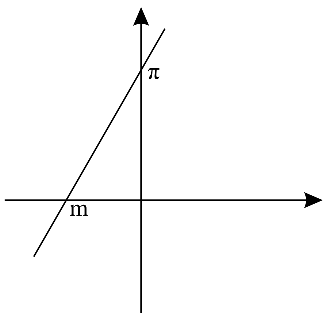
۱۷۸ اگر $f(x) = \sqrt{ax^۲+x+۱}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x+۲} = \dfrac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-۱^-} \left[\dfrac{۱}{x}\right] f(x)$ چقدر است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۱۷۹ شکل زیر، نمودار تابع $f^{-۱}$ را نشان می‌دهد. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-۱}(x)}{f(x)} = \pi$ باشد، مقدار m کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

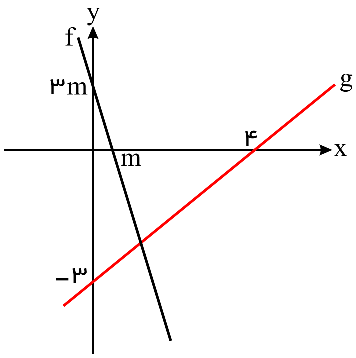


۱) $-\sqrt{\pi}$ ۲) $-\dfrac{۱}{\sqrt{\pi}}$

۳) $\dfrac{۱}{\pi}$ ۴) $-\pi\sqrt{\pi}$

۱۸۰ شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲



۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۴ ۴) ۴

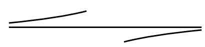
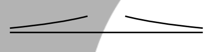
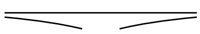
۱۸۱ f تابع هموگرافیک، $g(x)=\dfrac{۱}{f(x)}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g^{-۱}(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g^{-۱}(x)}$ است، کدام عدد می‌تواند حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}f^{-۱}(x)$ باشد؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) صفر ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۸۲ نمودار تابع $y=\dfrac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}$، نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را دارد؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۸۳ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{-۲x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c}$ دارای خط‌های مجانب $y=-۱$، $x=-۲$ و $x=۱$ است. $f(-۱)$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۹

۱) ۱٫۲۵ ۲) ۱٫۵ ۳) ۱٫۷۵ ۴) $-۱٫۵$

۱۸۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax^۲+۷x}{۲x^۲+bx+c}$، فقط یک مجانب قائم $x=۲$ دارد. اگر $f(۳)=۶$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۹

۱) $y=-۱$ ۲) $y=-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $y=\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $y=\dfrac{۳}{۲}$

۱۸۵ تابع $f(x)=\dfrac{ax^۳-bx^۲+۲}{ax^۳-bx+۲}$ در دو نقطهٔ ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد مقدار a و b کدام‌اند؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $a=۰\,,\ b=۲$ ۲) $a=۸\,,\ b=۱۰$ ۳) $a=-۲\,,\ b=۰$ ۴) $a=-۸\,,\ b=-۶$

۱۸۶ اگر تابع $f(x)=\dfrac{x^3-5x+4}{(x-a)(4x^2-4x+1)}$، فقط دارای دو مجانب باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۸۷ تابع $f(x)=\dfrac{|ax+1|+2x}{|x|+b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر هر ریشهٔ مخرج با یکی از حدهای تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) -3 ۲) ۱ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۸۸ نقطهٔ $A(-\frac{1}{2},3)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار $y=\dfrac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}$ است. مقدار $\dfrac{b}{a}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

۱۸۹ اگر f تابع هموگرافیک و $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{f^{-1}(x)}$ باشد، کدام مورد می‌تواند محل تقاطع مجانب‌های تابع f باشد؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) $(\sqrt{\pi},\pi)$ ۲) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(1,2)$

پیوستگی

پیوستگی در نقطه (یازدهم)

۱۹۰ به‌ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8+x^3}{|x+2|} & ; x\neq -2\\ a & ; x=-2\end{cases}$، در نقطهٔ $x=-2$، فقط از چپ پیوسته است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) -12 ۲) -6 ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۹۱ به‌ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; x>2\\ ax-1 & ; x\leq 2\end{cases}$، بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی، پیوسته است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) ۱٫۵ ۲) ۲ ۳) ۲٫۵ ۴) ۳

۱۹۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{۲|x-۲|} & ; x\neq ۲\\ ۲ & ; x=۲\end{cases}$، از نظر پیوستگی در $x=۲$، چگونه است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) از چپ پیوسته
۲) پیوسته
۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته
۴) از راست پیوسته

۱۹۳ فرض کنید $g(x)=\begin{cases}۱ & ; x>۰\\ ۰ & ; x=۰\\ -۱ & ; x<۰\end{cases}$ و $f(x)=۱-x^۲$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۹۴ تابع $f(x)=\begin{cases}|x|+[-x] & |x^۳|<x^۲\\ ۱+\cos\pi x & |x^۳|=x^۲\\ [x^۲]-[x] & |x^۳|>x^۲\end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) ۲
۲) ۳
۳) بی‌شمار
۴) در همهٔ نقاط پیوسته است.

۱۹۵ تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱-\cos x}{۲bx^۲} & x>۰\\ |b-x| & x=۰\\ [x]-۲a & x<۰\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته است. مقدار حقیقی $b-a$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) ۲
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۵}{۴}$
۴) $\frac{۲۵}{۱۶}$

۱۹۶ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}|x-[x]| & \text{زوج}\ |x|\\ |x-[x-a]| & \text{فرد}\ |x|\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مجموعه مقادیر $|a|$ شامل چند عضو است؟ $(a<-۱)$ مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۳

۱۹۷ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۳x^۲+(m-۱)x+(m-۴)}}{|x^۳+((m-۷)x+a)^۲|} & , x\neq a\\ \dfrac{۲\sin b}{۳\sqrt{x+۲}} & , x=a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می‌تواند باشد؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) $\frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{\pi}{۶}$
۳) $\frac{۵\pi}{۳}$
۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

۱۹۸ برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases}|x-[-x]| & \text{زوج}\ [x]\\ x-[x]+k & \text{فرد}\ [x]\end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k,n\in\mathbb{N})$ مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) n زوج
۲) n فرد
۳) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.
۴) برای هیچ مقداری از n پیوسته نیست.

۱۹۹ برای مقدار مشخص k، تابع $f(x) = \begin{cases} \|[-x]-x\| & [x]\text{ فرد} \\ k - x + |x| & [x]\text{ زوج} \end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k, n \in \mathbb{N})$

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) برای هیچ مقداری از n، پیوسته نیست.
۲) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.
۳) n فرد
۴) n زوج

پیوستگی در بازه (یازدهم)

۲۰۰ به‌ازای مقادیری از a و b، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| < ۱ \\ ax+b & ; |x| \geq ۱ \end{cases}$، بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) -۱
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۰۱ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-۱)[x] & ; |x-۱| < ۱ \\ x^۲+ax+b & ; |x-۱| \geq ۱ \end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) -۱
۳) ۱
۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۰۲ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x]\sin \pi x \ ; \ |x| \leq ۲$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۲۰۳ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin^{۲n}(x)$، در بازهٔ $[۰ \ , \ ۲\pi]$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۲۰۴ تابع $f(x) = \begin{cases} \tan\dfrac{(۲x+۱)\pi}{۴} & x \leq ۱ \\ \dfrac{|x^۲+x-۲|}{a(۱-x)} & ۱ < x < ۵ \\ b(x-[-x]) & x \geq ۵ \end{cases}$ روی بازه $[۱, ۵]$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $-۰/۷$
۲) $-۰/۵$
۳) $۰/۷$
۴) $۰/۵$

۲۰۵ تابع $f(x) = \begin{cases} (۱-a)[x] + (۳a^۲-۱)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b\sin(\dfrac{\pi}{a}) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\dfrac{a}{b}$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۰۶ به‌ازای مقادیر طبیعی c، تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲-۲x+۱} & |x|\le c\\ ax^۲+bx+۲ & |x|>c\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. کدام می‌تواند مقدار $\left[\frac{a}{b}\right]$ باشد؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۰۷ به‌ازای برخی مقادیر صحیح نامنفی c، تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲-۴x+۴} & |x-۲|\le c\\ a(x-۲)^۲+b(x-۲) & |x-۲|>c\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. چند مقدار برای $[ac]$ وجود دارد؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیش از ۳

مشتق

تعریف مشتق و تعبیر هندسی مشتق

۲۰۸ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) $-\sin a$ ۲) $-\cos a$ ۳) $\cos a$ ۴) $\sin a$

۲۰۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۲۱۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۱ مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}$ در نقطهٔ $x=-۳$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۱۲ تابع $f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}$ با دامنهٔ $[۰,۸]$، یکی از خطوط مماس بر نمودار موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای نمودار را به‌هم وصل کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) -۲ ۲) $-۱/۵$ ۳) -۱ ۴) $-۰/۵$

۲۱۳ اگر $f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$ باشد، حاصل $\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

① $\frac{۱۳}{۳۰}$ ② $-\frac{۵}{۱۲}$ ③ $\frac{۵}{۶}$ ④ $\frac{۱۳}{۱۵}$

۲۱۴ اگر $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{۲x^۲+x-۱}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

① -۱ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ ۱

۲۱۵ اگر $f(x)=\sqrt{x+۸}-\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x+۸}+\sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

① صفر ② ۱ ③ ۳ ④ ۲

۲۱۶ اگر $f(x)=\frac{۸+\cos^۳ x}{۴-\cos^۲ x}$ و $g(x)=\frac{۲}{۲-\cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'(\frac{۷\pi}{۶})-۲g'(\frac{۷\pi}{۶})$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

① $\frac{۱}{۲}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ④ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۱۷ اگر $f(x)=\frac{۲۷-\sin^۳ x}{۹-\sin^۲ x}$ و $g(x)=\frac{۳}{۳+\sin x}$ باشد، حاصل عبارت $۳g'(\frac{۵\pi}{۳})-f'(\frac{۵\pi}{۳})$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳

① $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ② $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ③ $-\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۲۱۸ در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & ; ۰\leq x<۴\\ [\frac{x}{۴}](x^۲-۹x) & ; ۴\leq x<۸\end{cases}$ ، مقدار $f'(۲)-f'(۵)$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۹

① $\frac{۱}{۴}$ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۳}{۴}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

۲۱۹ خط d موازی محور xها، قرینه سهمی $y=x^۲+۱$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصلهٔ خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

① ۱٫۲۵ ② ۳٫۲۵ ③ ۰٫۷۵ ④ ۲٫۷۵

۲۲۰ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=۴$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۹

① -۴ ② -۱ ③ ۲ ④ ۳

(۲۲۱) فرض کنید نمودارهای دو تابع $y=x\sqrt{x}$ و $y=x^۲+ax+b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۹

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

(۲۲۲) از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x)=\sqrt{x}+۲$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر $f^{-۱}$ رسم می‌کنیم. اگر α زاویهٔ حادهٔ بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(۲\alpha)$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

(۱) $\frac{۷}{۱۵}$ (۲) $\frac{۸}{۱۵}$ (۳) $\frac{۲۲۵}{۲۸۹}$ (۴) $\frac{۲۴۰}{۲۸۹}$

(۲۲۳) معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به‌صورت $۴y-۳x=n$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

(۲۲۴) اگر $y=۲x+b$ بر نمودار $y=\frac{x+a}{ax+۱}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

(۱) صفر (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۳) $\frac{۲}{۳}$ (۴) ۱

(۲۲۵) در نقطه تلاقی، منحنی‌های $f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x$ و $g(x)=\frac{۳}{۲}\sin x$ در بازه $[۰,\pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

(۱) $\frac{\pi}{۴}-۱$ (۲) $\frac{\pi}{۴}-۳$ (۳) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۸}$ (۴) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۳}{۸}$

(۲۲۶) در کدام نقطه از منحنی $y=x^۲-۴x+۵$، خط مماس بر منحنی، بر $۶y-۳x=۱$ عمود است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

(۱) $(-۲,۱۷)$ (۲) $(-۱,۱۰)$ (۳) $(۱,۲)$ (۴) $(۲,۱)$

(۲۲۷) خط d موازی محور xها، سهمی $y=x^۲-۱$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۲

(۱) $-\frac{۳}{۲}$ (۲) $-\frac{۱}{۲}$ (۳) $-\frac{۱}{۴}$ (۴) $-\frac{۳}{۴}$

(۲۲۸) خط مماس بر منحنی $y=x^۳+ax^۲+bx-۱$ در نقطه $(-۱\ ,-۴)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

(۱) ۰٫۳ (۲) ۰٫۴ (۳) ۰٫۶ (۴) ۰٫۸

مطابق آزمون قلمچی

۲۲۹) اگر $g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۱}$ و $(fog)'(۲)=۶$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳۰) اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\dfrac{۴}{۳}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟ (f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.) مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) $\dfrac{۲}{۳}$ ۲) $\dfrac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳۱) خط به معادلهٔ $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $x=۲$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\dfrac{۲}{۳}$ باشد، $(fog)'(۲)$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۲) اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f\left(\sqrt{۱+\tan^۲ x}\right)$ و $g'(\dfrac{\pi}{۳})=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، مقدار $f'(۲)$، کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۳۹۹

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۱}{۴}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۳۳) اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f(\dfrac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$ و $g'(\dfrac{\pi}{۶})=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشند، مقدار $f'(\dfrac{۱}{۳})$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۹

۱) $-\dfrac{۲}{۳}$ ۲) $-\dfrac{۳}{۴}$ ۳) $-\dfrac{۴}{۳}$ ۴) $-\dfrac{۳}{۲}$

۲۳۴) فرض کنید $f(x)=(x[x^۲+\dfrac{۱}{۲}])^۲+۱$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$، مقدار مشتق تابع fog در $x=\dfrac{۳}{\sqrt{۸}}$ چند برابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) -۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۳۵) فرض کنید $f(x)=(x[x])^۳$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$؛ مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\dfrac{\sqrt{۵}}{۲}$ چند برابر $(-۴۸\sqrt{۵})$ است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۰

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۳۶) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ & ; \quad x<-۱\\ x & ; \quad -۱\le x\le ۱\\ ۱ & ; \quad x>۱\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^۲$ تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۳۷ تابع f مشتق‌پذیر و با دورهٔ تناوب ۵ است. اگر $f'(-۱)=\frac{۳}{۲}$, $g(x)=f(x+۱)+f(۳x+۱۰)$ باشد، حاصل $g'(-۲)$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) ۳
۲) $\frac{۷}{۲}$
۳) ۶
۴) $\frac{۱۳}{۲}$

۲۳۸ اگر f تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\cos x)$ و $g'(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۳}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ چقدر است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲۳۹ اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-|x|}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۳-|x^۳|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[۳]{۲})f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) -۱

بررسی مشتق‌پذیری

۲۴۰ تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x-۱} & ; x\geq ۲\\ -x^۲+ax+b & ; x<۲\end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۲۴۱ تابع $f(x)=\begin{cases}|x^۲-۲x| & ; x<۲\\ \frac{۱}{۲}x^۲+ax+b & ; x\geq ۲\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲۴۲ در تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۸}{ax+b} & ; x>۲\\ -x^۳+۶x & ; x\leq ۲\end{cases}$، اگر $f'(۲)$ موجود باشد، a کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۴۳ فرض کنید $g(x)=ax^۲+bx+c$، $(a\neq ۰)$, $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq k\\ g'(x) & x<k\end{cases}$ باشد اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد حداکثر مقدار k با شرط $b+c=a$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

۲۴۴ به‌ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a، تابع $f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{۱}{x} & x\geq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۲۴۵ به‌ازای کدام مقدار a، اختلاف شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x)=|۴x-۳|\sqrt{ax}$، در نقطه $x=\frac{۳}{۴}$ برابر $۲\sqrt{۶}$ می‌شود؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۲۴۶ به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a \end{cases}$ دارای نقطه گوشه‌ای است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) صفر ۲) بیش از ۲ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۴۷ به‌ازای چند مقدار صحیح نامنفی m، (a,b) یک نقطهٔ گوشه‌ای برای منحنی $\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a \end{cases}$ است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x}$، در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌ناپذیر است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آهنگ تغییر (دوازدهم)

۲۴۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) ۰٫۲۵ ۲) ۰٫۵ ۳) ۰٫۴۵ ۴) ۰٫۷۵

۲۵۰ در تابع $f(x)=(x+۲)\sqrt{۴x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۴}$ چقدر بیشتر است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) ۰٫۱۰ ۲) ۰٫۱۵ ۳) ۰٫۲۰ ۴) ۰٫۲۵

۲۵۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۲x+۱}+\frac{۱}{x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۴]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۲}$، چقدر کمتر است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) ۰٫۰۳ ۲) ۰٫۰۴ ۳) ۰٫۰۵ ۴) ۰٫۰۶

مطابق آزمون قلم‌چی

۲۵۲ آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}$ در بازهٔ $[۵,۶]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، در کدام طول x است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۹

۱) $۴+\sqrt{۲}$
۲) $۳+۲\sqrt{۲}$
۳) $۲+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$
۴) $۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

۲۵۳ در بازه $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}\right]$، آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin x\cos ۲x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin^۴ x-\cos^۴ x$ است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) -۱
۲) ۱
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

کاربرد مشتق

نقاط بحرانی (دوازدهم)

۲۵۴ تابع $f(x)=\frac{x}{۱-x|x|}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۵۵ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x(۱-|x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به‌ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m+n+k$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

۲۵۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x|x|-x}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $\frac{km+n}{k-n}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

اکسترمم‌های مطلق

۲۵۷ فاصلهٔ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x}{(x-۱)^۲}$، از خط مجانب قائم آن کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) ۱
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۲۵۸ حاصل‌ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-۲x}$ برابر $\sqrt{۱۲}$ است. اگر $a>۰$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۱۲

بهینه‌سازی (دوازدهم)

۲۵۹ بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۱۲-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۶۰ بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

۲۶۱ قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x)=x^{۲}$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل‌های تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA' کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

۲۶۲ حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $۴\sqrt{۲}$ محاط می‌شود، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) ۳۲π ۲) ۶۴π ۳) $\frac{۲۵۶\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵۱۲\pi}{۳}$

۲۶۳ از بین مخروط‌های حاصل که از دوران کامل پاره‌خط AB با اندازه $۳\sqrt{۳}$ حول خط L به دست می‌آیند، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطهٔ A روی خط L واقع است.)

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۲۶۴ در ساخت قوطی‌های حلبی درباز به شکل مکعب‌مستطیل با قاعدهٔ مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

۲۶۵ کمترین فاصلهٔ نقاط واقع بر منحنی $y=\sqrt{x-[x^{۲}]}$ از خط $۲x-y+۲=۰$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۱۰}$

۲۶۶ کمترین فاصلهٔ نقاط واقع بر منحنی $y=-\sqrt{-x-[x]^{۲}}$ از خط $x-y-۱=۰$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۲

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$

بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق (دوازدهم)

۲۶۷ کدام عبارت برای تابع $f(x) = ۲\sqrt{x} - \dfrac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}}$ درست است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) تابع f در مجموعهٔ $(۱, +\infty) \cup (۰, ۱)$ صعودی است.
۲) تابع f در بازه‌های $(۱, +\infty)$ و $(۰, ۱)$ صعودی است.
۳) تابع f در بازهٔ $(۱, +\infty)$ صعودی و در بازهٔ $(۰, ۱)$ نزولی است.
۴) تابع f در بازهٔ $(۱, +\infty)$ نزولی و در بازهٔ $(۰, ۱)$ صعودی است.

۲۶۸ بازه‌هایی که تابع $f(x) = \dfrac{x^۴}{x^۳ - ۸}$ در آنها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. ماکزیمم طول این بازه‌ها کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) ۲
۲) $\sqrt[۳]{۴ - ۱}$
۳) $۲\sqrt[۳]{۴}$
۴) $۲(\sqrt[۳]{۴} - ۱)$

۲۶۹ مجموعهٔ مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = ۳\sqrt[۳]{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) $[-۱ , \infty)$
۲) $(-\infty , \infty)$
۳) $[-۱ , ۰) \cup (۰ , \infty)$
۴) $[-۳\sqrt{۳} , ۰]$

۲۷۰ تعداد بازه‌هایی که تابع $x \in (-۲ , ۲)$; $f(x) = \dfrac{x^۴ - ۳}{x^۲ - ۲}$، در آنها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲۷۱ به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $y = \dfrac{mx + ۲}{x - ۱ + m}$ روی بازهٔ $(۱ , +\infty)$ نزولی است؟ $(m \neq ۲)$ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

اکسترمم‌های نسبی

۲۷۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x - ۴|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) $\sqrt{۵}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

۲۷۳ فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع $f(x) = \dfrac{۲x - x^۲}{(x + ۱)^۲}$، از خط مجانب افقی آن، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $\dfrac{۲}{۳}$
۲) ۱
۳) $\dfrac{۴}{۳}$
۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۲۷۴ تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \dfrac{x^۲}{x^۲ - ۱}|x^۲ - ۴|$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

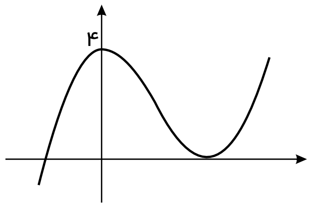
(۲۷۵) فرض کنید A و B نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۱$ باشند. چند نقطه روی نمودار f وجود دارد که خطوط مماس بر آنها موازی پاره‌خط AB است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(۲۷۶) نمودار تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ به‌صورت زیر است. طول نقطه مینیمم نسبی تابع، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱



(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) ۲

(۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) ۳

(۲۷۷) نمودار تابع $y = x^۳ + ax^۲ - ۲bx - ۴$ در نقاطی به طول صفر و ۲− دارای اکسترمم نسبی است. بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع، چقدر است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

(۱) $۲\sqrt{۵}$ (۲) $۲\sqrt{۱۱}$ (۳) $۲\sqrt{۱۵}$ (۴) $۲\sqrt{۱۰۱}$

(۲۷۸) نقاط $A(۰, ۰)$ و $B(۱, ۱)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

(۱) -۳ (۲) -۶ (۳) ۳ (۴) ۶

(۲۷۹) نمودار تابع $f(x) = (m^۲ - ۱)x^۲ + (۲ - m)x + ۵$ محور xها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β بیشترین مقدار باشد، m کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

(۱) $۲ + \sqrt{۵}$ (۲) $۲ + \sqrt{۳}$ (۳) $۲ - \sqrt{۵}$ (۴) $۲ - \sqrt{۳}$

تقعر و نقطه‌ی عطف

(۲۸۰) فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۵$ باشند. زاویهٔ بین پاره‌خط‌های AB و CD، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

(۱) صفر (۲) ۳۰ (۳) ۴۵ (۴) ۶۰

(۲۸۱) به‌ازای چند مقدار صحیح و منفی k، نقطه عطف منحنی $y = kx^۳ + (k + ۱)x^۲$ در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بیش از ۲ (۴) صفر

(۲۸۲) به‌ازای چند مقدار صحیح k، نقطه عطف منحنی $y = \frac{k}{۲}x^۳ - (k + ۲)x^۲$ در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

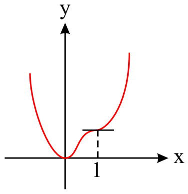
مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

(۱) بیش از ۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

رسم توابع

۲۸۳ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=۳x^۴+ax^۳+bx^۲+cx$ است. a کدام است؟

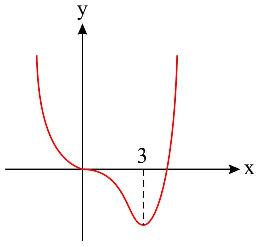
مرجع: سراسری– ۱۳۹۸



۱) -۸
۲) -۷
۳) -۵
۴) -۴

۲۸۴ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+bx^۲$ است. $f(-۲)$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸



۱) ۳۲
۲) ۳۶
۳) ۴۰
۴) ۴۸

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱ ۱ **۲** ۳ ۴ — $۱-y^۲$ شمارندهٔ ۷۲ است؛ بنابراین:

$$y^۲=۰,۴,۹,۲۵ \to y=۰,\pm۲,\pm۳,\pm۵$$

بنابراین با حذف ۳ زوج مرتب عضو که زوج مرتب‌های f تابع می‌شود.

۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{matrix} |a|+۲>۱ \\ ۱-|a|<۱ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(۲+|a|)=a^۲+۴+۴|a|-۲-|a|-۷ \\ f(۱-|a|)=۲-۲|a|-۱ \end{matrix}$$

$$f(۱-|a|)=f(۲+|a|) \Rightarrow a^۲+۵|a|-۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} |a|=۱ \Rightarrow a=\pm۱ \\ |a|=-۶ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۳ ۱ **۲** ۳ ۴ — با توجه به ضابطهٔ تابع داریم:

$$۱+a^۲>۱ \Rightarrow |۱+a^۲|>۱ \Rightarrow f(۱+a^۲)=۷-۳(۱+a^۲)$$

$$a^۲>۰ \ , \ ۱+a^۲>۱ \Rightarrow |\frac{-a^۲}{۱+a^۲}|<۱ \Rightarrow f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})=-۲(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})$$

بنابراین:

$$۷-۳(۱+a^۲)=-۲(\frac{-a^۲}{۱+a^۲}) \Rightarrow ۴-۳a^۲=\frac{۲a^۲}{۱+a^۲} \xrightarrow{a^۲=t>۰} ۳t^۲+t-۴=۰ \Rightarrow t=۱ \checkmark, t=\frac{-۴}{۳} \times \Rightarrow a=\pm۱$$

اختلاف مقادیر a برابر است با:

$$۱-(-۱)=۲$$

۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱} \ , \ ۹-x^۲\geq۰ \Rightarrow x^۲\leq۹ \Rightarrow -۳\leq x\leq۳$$

$$x-۱\neq۰ \Rightarrow x\neq۱ \Rightarrow D_f=[-۳,۳]-\{۱\}=[-۳,۱)\cup(۱,۳]$$

اگر بازهٔ $I=(k-۲,۳k+۲)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع باشد، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

$$I\subseteq[-۳,۱) \Rightarrow \begin{cases} k-۲\geq-۳ \\ ۳k+۲\leq۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\geq-۱ \\ k\leq-\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow -۱\leq k\leq-\frac{۱}{۳} \quad (۱)$$

یا

$$I\subseteq(۱,۳] \Rightarrow \begin{cases} k-۲\geq۱ \\ ۳k+۲\leq۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\geq۳ \\ k\leq\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \varnothing \quad (۲)$$

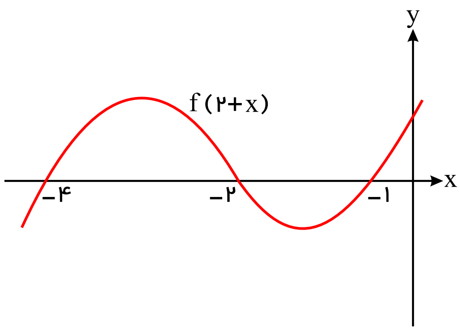
$$(۱)\cup(۲) \Rightarrow -۱\leq k\leq-\frac{۱}{۳} \Rightarrow k\in[-۱,-\frac{۱}{۳}]$$

ظاهراً طراح سؤال به این نکته که $k=-\frac{۱}{۳}$ نیز می‌تواند باشد توجه نکرده است.

$$k=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow (k-۲,۳k+۲)=(-\frac{۱}{۳}-۲,-۱+۲)=(-\frac{۷}{۳},۱)\subset D_f$$

۵ **۱** ۲ ۳ ۴ — برای رسم نمودار $f(x+۲)$ باید نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

با توجه به شکل داده‌شده $D_f=R \Leftarrow$



$$-\frac{f(x)}{f(۲+x)}\geq۰ \Rightarrow \frac{f(x)}{f(۲+x)}\leq۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)\geq۰ \ , \ f(۲+x)<۰ \\ \text{یا} \\ f(x)\leq۰ \ , \ f(۲+x)>۰ \end{cases}$$

مطابق آزمون قلمچی

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq ۰\ ,\ f(۲+x) < ۰ \Rightarrow [-۲,۰] \cup [۱,\infty) \cap (-۲,-۱) \cup (-\infty,-۴) \Rightarrow (-۲,-۱) & (۱) \\ f(x) \leq ۰\ ,\ f(۲+x) > ۰ \Rightarrow (-\infty,-۲] \cup [۰,۱] \cap (-۴,-۲) \cup (-۱,+\infty) \Rightarrow (-۴,-۲) \cup [۰,۱] & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \cup (۲) \Rightarrow (-۲,-۱) \cup (-۴,-۲) \cup [۰,۱] \Rightarrow \underbrace{-۳,۰,۱}_{\text{۳ عدد صحیح}}$$

۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)** می‌توان نوشت:

$$-۱ \leq \sin x \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq \sin^۲ x \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq ۵\sin^۲ x \leq ۵ \Rightarrow -۱ \leq ۵\sin^۲ x - ۱ \leq ۴$$

چون $۵\sin^۲ x - ۱$ زیر رادیکال است باید نامنفی باشد، پس:

$$۰ \leq \sqrt{۵\sin^۲ x - ۱} \leq ۲ \Rightarrow ۰ \geq -\sqrt{۵\sin^۲ x - ۱} \geq -۲$$

تابع ۲^t اکیداً صعودی است، پس:

$$۲^۰ \geq ۲^{-\sqrt{۵\sin^۲ x - ۱}} \geq ۲^{-۲} \Rightarrow R_f = [\frac{۱}{۴}\ ,\ ۱] \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}\ \ ,\ \ b = ۱ \Rightarrow a + b = \frac{۵}{۴}$$

۷ (۱) **(۲)** (۳) (۴) ابتدا $f(\sqrt{۵})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(\sqrt{۵}) = ۵ - [\sqrt{۵}] = ۳$$
$$\Rightarrow f(af(\sqrt{۵})) = f(۳a) = ۹a^۲ - [۳a] = ۲$$

با توجه به جای‌گذاری $a = -\frac{۱}{۳}$ جواب معادله فوق است.

۸ **(۱)** (۲) (۳) (۴) می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به‌جای x عبارت $x - ۳$ و برای اینکه به طرف y های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد -۲ اضافه شود؛ بنابراین داریم:

$$y = -(x-۳)^۲ + ۲(x-۳) + ۵ - ۲ = -x^۲ + ۶x - ۹ + ۲x - ۶ + ۳ \Rightarrow y = -x^۲ + ۸x - ۱۲$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^۲ + ۸x - ۱۲ > x \Rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۲ < ۰ \Rightarrow (x-۳)\cdot(x-۴) < ۰ \Rightarrow ۳ < x < ۴$$

۹ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$y = x^۲ - x - ۳ \xrightarrow[x \to x+۲]{\text{۲ واحد به چپ}} y = (x+۲)^۲ - (x+۲) - ۳ \xrightarrow{\text{۹ واحد پایین}} y = (x+۲)^۲ - (x+۲) - ۳ - ۹ = x^۲ + ۳x - ۱۰$$

حال باید نامعادلهٔ $y < ۰$ را حل کنیم.

$$\Rightarrow x^۲ + ۳x - ۱۰ = (x-۲)(x+۵) < ۰ \Rightarrow -۵ < x < ۲ \Rightarrow x \in (-۵,۲)$$

۱۰ (۱) (۲) **(۳)** (۴) معکوس تابع را به دست می‌آوریم (قرینه نسبت به $y = x$)، دقت کنید برد تابع $y \geq ۲$ است پس دامنهٔ تابع معکوس $x \geq ۲$ خواهد بود:

$$y = ۲ + \sqrt{x-۱} \Rightarrow y - ۲ = \sqrt{x-۱} \Rightarrow x - ۱ = (y-۲)^۲ \Rightarrow x = (y-۲)^۲ + ۱ \Rightarrow f^{-۱}(x) = (x-۲)^۲ + ۱ ; x \geq ۲$$
$$\xrightarrow[\text{۳ واحد پایین}]{\text{۲ واحد راست}} g(x) = (x-۴)^۲ - ۲;\ x \geq ۴ \Rightarrow g(۴) = -۲$$

۱۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)** طبق تبدیل‌های گفته شده داریم:

$$f(x) = \frac{۱}{x} \xrightarrow{x \to x-۱} y = \frac{۱}{x-۱} \xrightarrow[\text{مصدر } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \frac{-۱}{x-۱} \xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}} y = \frac{-۱}{x-۱} = ۲$$

حال معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم تا نقطهٔ برخورد تابع حاصل با f به‌دست آید.

$$\frac{-۱}{x-۱} - ۲ = \frac{۱}{x} \xrightarrow{\times x(x-۱)} -x - ۲x(x-۱) = x - ۱ \Rightarrow -x - ۲x^۲ + ۲x = x - ۱ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$y = \frac{۱}{x} = \frac{۱}{\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \pm\sqrt{۲} \Rightarrow \text{نقطهٔ برخورد } A(\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \sqrt{۲}) \text{ یا } A(-\frac{۱}{\sqrt{۲}}, -\sqrt{۲})$$

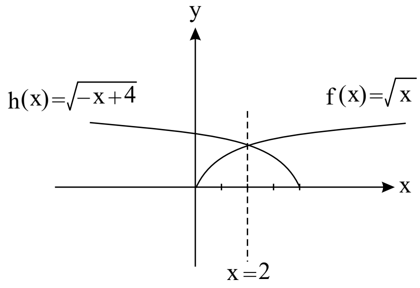
فاصلهٔ نقطهٔ A تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲ + (\pm\sqrt{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۱}{۲} + ۲} = \sqrt{\frac{۵}{۲}} = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۱۲ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

۲ نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت راست}} h(x) = \sqrt{-(x-۴)} = \sqrt{-x+۴}$$



$\rightarrow$

مشخص است که این دو نسبت به خط $x=۲$ متقارن هستند.

۱۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$f(x)=(x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} g(x)=-(-x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت بالا}} h(x)=-(-x-۱)^۲+۴$$

تلاقی: $(x-۱)^۲=-(-x-۱)^۲+۴ \Rightarrow x^۲+۱-۲x=-x^۲-۱-۲x+۴ \Rightarrow ۲x^۲=۲ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=۱\ ,\ x=-۱$

۱۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

روش اول:

$$y=\sqrt{۴-x} \xrightarrow[\text{راستای قائم}]{k \text{ واحد در}} y=\sqrt{۴-x}+k \xrightarrow[\text{راستای افقی}]{k-۲ \text{ واحد در}} y=\sqrt{۴-(x-(k-۲))}+k$$

محل برخورد تابع فوق و وارونش در نقطه‌ای با عرض ۱ است که باید روی خط $y=x$ باشد، پس نقطهٔ $(۱,۱)$ در تابع صدق می‌کند.

$$۱=\sqrt{۴-(۱-(k-۲))}+k \Rightarrow \sqrt{k+۱}+k=۱ \Rightarrow k=۰ \Rightarrow y=\sqrt{۲-x} \xrightarrow{\text{یک واحد پایین}} y=\sqrt{۲-x}-۱ \xrightarrow[y=۰]{\text{محل برخورد با } x \text{ ها}} \sqrt{۲-x}=۱ \Rightarrow ۲-x=۱$$

$$\Rightarrow x=۱$$

روش دوم: توابع رادیکالی به فرم داده‌شده در صورت سؤال، وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کنند. پس منحنی جدید وارون خود را در نقطه $(۱,۱)$ قطع کرده است. با انتقال ۱ واحد این نمودار به پایین، نقطه $(۱,۱)$ به نقطه $(۱,۰)$ متناظر می‌شود، درنتیجه طول نقطه برخورد نمودار نهایی با محور xها برابر ۱ است.

۱۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)** برای انتقال در راستای محور xها به اندازهٔ ۲ واحد به چپ، باید x را به $x+۲$ تبدیل کنیم، پس:

$$f(x)=۴x-x^۲ \xrightarrow{x\to x+۲} f(x+۲)=۴(x+۲)-(x+۲)^۲ \Rightarrow f(x+۲)=۴x+۸-x^۲-۴x-۴=۴-x^۲$$

حال نقطهٔ تلاقی توابع $y=۴-x^۲$ و $y=۴x-x^۲$ را می‌یابیم.

$$\begin{cases} y=۴x-x^۲ \\ y=۴-x^۲ \end{cases} \Rightarrow ۴x-x^۲=۴-x^۲ \Rightarrow ۴x=۴ \Rightarrow x=۱$$

$y=۴-۱^۲=۳ \Rightarrow$ نقطه تلاقی : $A(۱,۳)$

$$OA=\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

۱۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴) تابع f همانی است، پس $f(x)=x$ ؛ ضابطهٔ تابع g نیز به‌صورت $g(x)=\frac{۱}{x-a}$ می‌شود. طبق فرض، ریشهٔ معادله زیر برابر $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است:

$$|g(x)|-۲=\frac{۱}{|f(x)|} \Rightarrow \left|\frac{۱}{x-a}\right|-۲=\frac{۱}{|x|}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \left|\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a}\right|-۲=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{\left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a\right|}=۲+\sqrt{۲} \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a\right|=\frac{۱}{۲+\sqrt{۲}}\times\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a\right|=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{۲}}{۲}-a=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow a=\sqrt{۲}-۱ \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}-a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۱ \Rightarrow a=۱ \end{cases}$$

چون تابع f همانی است، پس از $f(x+a)=۳$ نتیجه می‌شود $x+a=۳$ و اختلاف مقادیر x در آن به‌صورت زیر می‌شود:

$$x_۱+a_۱=۳=x_۲+a_۲ \Rightarrow x_۱-x_۲=a_۲-a_۱$$

$$\Rightarrow x_۱-x_۲=۱-(\sqrt{۲}-۱)=۲-\sqrt{۲}$$

۱۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴) ابتدا مقدار تابع داخلی را محاسبه می‌کنیم:

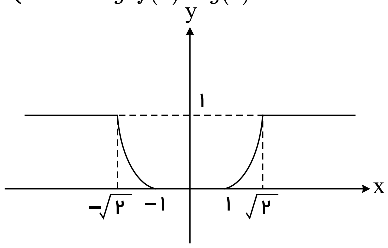
$$gof(-\frac{۵}{۳})=g(f(-\frac{۵}{۳})) \Rightarrow f(-\frac{۵}{۳})=۲[\overset{-۲}{\cancel{-\frac{۵}{۳}}}]-(-\frac{۵}{۳})=-۴+\frac{۵}{۳}=-\frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow g(-\frac{۷}{۳})=f([-\frac{۷}{۳}+f(-\frac{۷}{۳})]) \Rightarrow f(-\frac{۷}{۳})=۲[-\frac{۷}{۳}]-(-\frac{۷}{۳})=-۶+\frac{۷}{۳}=-\frac{۱۱}{۳}$$

$$\Rightarrow g(-\frac{۷}{۳})=f([-\frac{۷}{۳}-\frac{۱۱}{۳}])=f(-۶)=۲[-۶]-(-۶)=-۱۲+۶=-۶$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ **۴** ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x<-۱\ :\ gof(x)=g(-۱)=۰ \\ -۱\leq x\leq:\ gof(x)=g(x)=۱-x^۲ \\ x>۱\ :\ gof(x)=g(۱)=۰ \end{cases}$$



$$fog=f(۱-x^۲)=\begin{cases} -۱ & ۱-x^۲<-۱\Rightarrow x^۲>۲\Rightarrow x<-\sqrt{۲}\vee x>\sqrt{۲} \\ ۱-x^۲ & -۱\leq ۱-x^۲\leq x\Rightarrow ۱\geq x^۲-۱\geq -۱\geq -۱\Rightarrow ۰\leq x^۲\leq \sqrt{۲}\Rightarrow -\sqrt{۲}\leq x\leq \sqrt{۲} \\ ۱ & ۱-x^۲>۱\Rightarrow x^۲<۰\Rightarrow x\in\varnothing \end{cases}$$

$$\Rightarrow fog(x)=\begin{cases} -۱ & x<-\sqrt{۷}x>\sqrt{۲} \\ ۱-x^۲ & -\sqrt{۲}\leq x\leq \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$x<-\sqrt{۲}\Rightarrow gof(x)-fog(x)=۰-(-۱)=۱\ ,\ -\sqrt{۲}\leq x<-۱\Rightarrow gof(x)-fog(x)=۰-(۱-x^۲)=x^۲-۱$$

$$-۱\leq x\leq ۱\Rightarrow gof(x)-fog(x)=۱-x^۲-(۱-x^۲)=۰\ \ ,\ ۱<x\leq \sqrt{۲}\Rightarrow gof(x)-fog(x)=۰-(۱-x^۲)=x^۲-۱$$

$$x>\sqrt{۲}\Rightarrow gof(x)-fog(x)=۰-(-۱)=۱$$

در نمودار $gof-fog$ بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است.

۱۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

ابتدا ضابطهٔ $g(x)$ را می‌یابیم.

$$f(x)=۲x,gof(x)=۵x^۲+۱۱\Rightarrow g(f(x))=۵x^۲+۱۱\Rightarrow g(۲x)=۵x^۲+۱۱\xrightarrow{x\to\frac{۱}{۲}x} g(۲\times\frac{۱}{۲}x)=۵(\frac{۱}{۲}x)^۲+۱۱\Rightarrow g(x)=\frac{۵}{۴}x^۲+۱۱$$

حال تابع $g(x-۷)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=g(x-۷)=\frac{۵}{۴}(x-۷)^۲+۱۱$$

در تابع فوق به‌ازای $x=۷$، کمترین مقدار تابع به دست می‌آید.

$$y_{min}=g(۷)=۰+۱۱=۱۱$$

۲۰ **۱** ۲ ۳ ۴

$$f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}\Rightarrow f(\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}=\frac{۲}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$f(f(f(\sqrt{۲})))=f(f(\frac{\sqrt{۲}}{۲}))=\frac{\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$f(f(f(\sqrt{۲})))=f(\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

۲۱ ۱ ۲ **۳** ۴ چون f و g تابع ثابت هستند، در ضابطهٔ داده‌شده برای آنها، ضریب x باید صفر باشد.

$$f(x)=b-۳ax\Rightarrow ۳a=۰\Rightarrow a=۰\Rightarrow f(x)=b$$

$$g(x)=c-(۳b-۳)x\Rightarrow ۳b-۳=۰\Rightarrow b=۱\Rightarrow\begin{cases} f(x)=۱ \\ g(x)=c \end{cases}$$

$f + g = ۵ \Rightarrow ۱ + c = ۵ \Rightarrow c = ۴ \Rightarrow b \times c = ۱ \times ۴ = ۴$

۲۲ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (ax + ۲)(b - x) - ۷x^۲ = abx - ax^۲ + ۲b - ۲x - ۷x^۲$$
$$\Rightarrow f(x) = (-a - ۷)x^۲ + (ab - ۲)x + ۲b$$

چون f، تابع ثابت است، پس داریم:

$$-a - ۷ = ۰ \Rightarrow a = -۷ \;,\; ab - ۲ = ۰ \Rightarrow -۷b - ۲ = ۰ \Rightarrow b = \frac{-۲}{۷}$$

$$f(x) = ۲b = ۲ \times (-\frac{۲}{۷}) = -\frac{۴}{۷}$$

۲۳ ۴ **۳** ۲ ۱

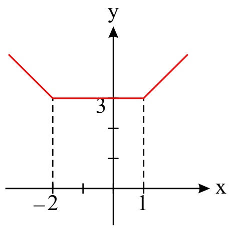
$$x_s = \frac{-a}{۱۰} = ۲/۵ \Rightarrow a = -۲۵$$

$$y_s = -\frac{\Delta}{۴x(-۵)} = \frac{۴۶۵}{۲۰} = ۲۳/۲۵$$

۲۴ ۴ ۳ ۲ **۱** سهمی در بازهٔ $(-۰/۷ , +\infty)$ اکیداً صعودی است؛ بنابراین طول رأس سهمی برابر $-۰/۷$ است.

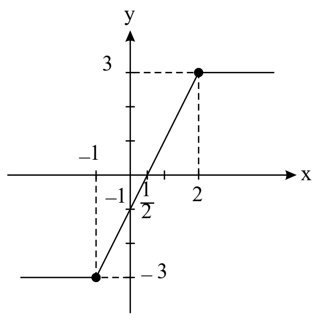
$$-\frac{۷}{۲a} = -۰/۷ \Rightarrow a = ۵$$
$$\Rightarrow y = ۵x^۲ + ۷x - ۱$$
$$\Rightarrow y_s = \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{-(۴۹ + ۲۰)}{۲۰} = -\frac{۶۹}{۲۰} = -۳/۴۵$$

۲۵ ۴ ۳ ۲ **۱** تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x = -۲$ و $x = ۱$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



اکیداً نزولی : $\rightarrow x < -۲$

۲۶ ۴ **۳** ۲ ۱ تابع داده‌شده یک تابع سرسره‌ای (آبشاری) است که در $x = -۱$ و $x = ۲$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



اکیداً صعودی : $\longrightarrow -۱ < x < ۲$

۲۷ **۴** ۳ ۲ ۱

$$۰ \le \cos^۲ x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le ۹\cos^۲ x \le ۹ \Rightarrow -۱ \le ۹\cos^۲ x - ۱ \le ۸ \Rightarrow -۱ \le \underbrace{\sqrt[۳]{۹\cos ۲x - ۱}}_{t} \le ۲ \Rightarrow -۱ \le t \le ۲$$

$$f(x) = ۲^t - ۲^{-t}$$

تابع ۲^t همواره صعودی است و تابع ۲^{-t} همواره نزولی است پس تابع -۲^{-t} نیز همواره صعودی است. پس می‌توان نتیجه گرفت تابع $f(x)$ یک تابع صعودی است.

کمترین مقدار تابع : $t = -۱ \Rightarrow ۲^{-۱} - ۲^{۱} = \frac{۱}{۲} - ۲ = -\frac{۳}{۲}$

بیشترین مقدار تابع : $t = ۲ \Rightarrow ۲^۲ - ۲^{-۲} = ۴ - \frac{۱}{۴} = \frac{۱۵}{۴}$

$\Rightarrow [-\frac{۳}{۲}, \frac{۱۵}{۴}]$

$$\Rightarrow b - a = \frac{۱۵}{۴} - (-\frac{۳}{۲}) = \frac{۲۱}{۴}$$

توجه: اگر تابع پیوسته $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ اکیداً صعودی باشد آنگاه برد تابع برابر است با:

$$R_f = [f(a) \;,\; f(b)]$$

۲۸ ۴ ۳ ۲ **۱** تابع $f(x) = (-۹ + k^۲)x^۳ + ۵$ زمانی اکیداً نزولی است که ضریب $x^۳$ عددی منفی باشد، پس داریم:

$$-۹ + k^۲ < ۰ \Rightarrow k^۲ < ۹ \Rightarrow |k| < ۳ \Rightarrow -۳ < k < ۳$$

مقادیر صحیح k : $-۲, -۱, ۰, ۱, ۲ \Rightarrow$ مجموع $= -۲ - ۱ + ۰ + ۱ + ۲ = ۰$

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(۳)=۰$ است. پس داریم:

$$x<۳ \Rightarrow f(x)>f(۳) \Rightarrow f(x)>۰$$
$$x>۳ \Rightarrow f(x)<f(۳) \Rightarrow f(x)<۰$$

برای $x<۳$، تابع f، مثبت و برای $x>۳$، تابع f، منفی است. حال برای تعیین دامنهٔ $g(x)=\sqrt{x^۲f(x)}$ باید نامعادلهٔ $x^۲f(x)\geq ۰$ را حل کنیم که با تعیین علامت داریم:

x	$-\infty$	۰		۳	$+\infty$
$x^۲$	+	۰	+		+
$f(x)$	+		+	۰	−
$x^۲f(x)$	+	۰	+	۰	−

$$x\leq ۳ \Rightarrow D\cdot g=(-\infty,۳]$$

دامنهٔ g شامل اعداد صحیح نامنفی $۰,۱,۲,۳$ است.

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$y=\sqrt{(x+۱)^۲}-|۳x-۶|=|x+۱|-|۳x-۶|$$

با توجه به ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها یعنی $x=-۱$ و $x=۲$ محدوده‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x<-۱ \Rightarrow y=-(x+۱)+۳x-۶=۲x-۷$$
$$-۱\leq x<۲ \Rightarrow y=x+۱+۳x-۶=۴x-۵$$
$$x\geq ۲ \Rightarrow y=x+۱-(۳x-۶)=-۲x+۷$$

در محدودهٔ $x\geq ۲$ تابع نزولی است و داریم:

$$x\geq ۲ \Rightarrow -۲x\leq -۴ \to -۲x+۷\leq -۴+۷ \Rightarrow y\leq ۳$$
$$y=-۲x+۷ \Rightarrow ۲x=-y+۷ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}y+\frac{۷}{۲}$$
$$\text{تابع وارون}: y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\ ;\ x\leq ۳$$

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴ تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است، پس:

$$f(x)=mx^۲-nx-k=\text{ثابت} \Rightarrow m=n=۰\ ,\ f(x)=-k$$

مجموعهٔ داده‌شده در صورتی تابع است که:

$$(\underbrace{m}_{۰}\ ,\ n-۱)=(۰\ ,k) \Rightarrow k=n-۱=-۱$$

پس $f(x)=۱$ و در نتیجه $f(\sqrt{۵})=۱$.

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به نمودار $g(۲)=۰$ است. برای معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$g(f(g(x+۲)))=۰ \xrightarrow{g(۲)=۰} f(g(x+۲))=۲$$
$$\Rightarrow |\tfrac{۱}{۲}g(x+۲)-۱|=۲ \to \tfrac{۱}{۲}g(x+۲)-۱=\pm ۲$$
$$\Rightarrow \begin{cases} g(x+۲)=۶ \\ \text{یا} \\ g(x+۲)=-۲ \end{cases}$$

می‌دانیم انتقال افقی، تعداد ریشه‌ها را تغییر نمی‌دهد و با توجه به نمودار که تابع g با دامنهٔ $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است، هر کدام از معادلات بالا یک جواب دارد.

۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴ طبق فرض، دامنهٔ f مجموعه‌ای از مقادیر منفی است، پس:

$$\begin{cases} m^۲-m-۵<۰ \to \dfrac{۱-\sqrt{۲۱}}{۲}<m<\dfrac{۱+\sqrt{۲۱}}{۲} \quad (I) \\ -m^۲+۲m-۳<۰ \to \Delta=۴-۱۲<۰ \Rightarrow (\text{همواره برقرار}) \end{cases}$$

$$\text{از طرفی}: f(m^۲-m-۵)<f(-۳+۲m-m^۲) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی}} m^۲-m-۵>-۳+۲m-m^۲$$
$$\Rightarrow ۲m^۲-۳m-۲>۰ \Rightarrow (۲m+۱)(m-۲)>۰ \Rightarrow (m<-\frac{۱}{۲})\cup(m>۲) \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک }(II),(I)} (\overbrace{\frac{۱-\sqrt{۲۱}}{۲}}^{\simeq -۱/۷۵},-\frac{۱}{۲})\cup(۲,\overbrace{\frac{۱+\sqrt{۲۱}}{۲}}^{\simeq ۲/۷۵}) \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=-۱$$

m فقط یک مقدار صحیح را می‌تواند بپذیرد.

$$۲m^۲ - ۹m - ۲ > ۰ \Rightarrow m < \frac{۹ - \sqrt{۹۷}}{۴} \;,\; m > \frac{۹ + \sqrt{۹۷}}{۴}) \;\; (۱) \;,$$

$$m^۲ - ۴m + ۴ > ۰ \Rightarrow (m - ۲)^۲ > ۰ \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{۲\} \;\; (۲)$$

$$f(۲m^۲ - ۹m - ۲) < f(m^۲ - ۴m + ۴) \xrightarrow{\text{صعودی اکید}} ۲m^۲ - ۹m - ۲ < m^۲ - ۴m + ۴ \to m^۲ - ۵m - ۶ < ۰ \to$$

$$(m + ۱)(m - ۶) < ۰ \to m \in (-۱ \,, ۶); \;\; (۳) \;,$$

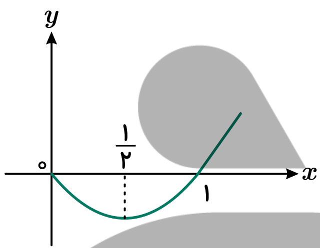
$$(۱) \cap (۲) \cap (۳) \to m \in (-۱ \,, \frac{۹ - \sqrt{۹۷}}{۴}) \cup (\frac{۹ + \sqrt{۹۷}}{۴} \,, ۶) \xrightarrow{m \in Z} m = ۵$$

در بازهٔ به‌دست‌آمده، فقط عدد ۵ عددی صحیح است.

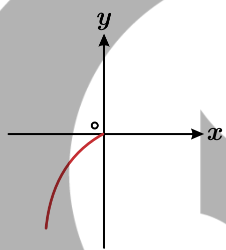
۳۵ ۴ ۳ **۲** ۱ در توابع قدرمطلقی، سریع‌ترین روش برای بررسی یکنوایی تابع، رسم آن است. چون قدرمطلقی است ابتدا تابع را تعیین علامت و سپس رسم می‌کنیم.

ریشهٔ قدرمطلق $x = ۰$ ، $y = (x - ۱) \cdot |x|$

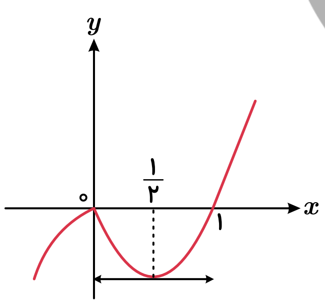
$$۱)\; x \geq ۰ \Rightarrow y = (x - ۱) \cdot (x) = x^۲ - x \xrightarrow{x \geq ۰}$$



$$۲)\; x < ۰ \Rightarrow y = (x - ۱) \cdot (-x) = -x^۲ + x \xrightarrow{x < ۰}$$



$$\xrightarrow{\text{شکل تقریبی تابع}}$$



$$\xrightarrow{۰ < x < ۱} y = (x - ۱)x = x^۲ - x \Rightarrow y' = ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{با توجه به شکل}]{\text{بازهٔ نزولی}} (a \,, b) = (۰ \,, \frac{۱}{۲}) \Rightarrow a + b = \frac{۱}{۲}$$

۳۶ ۴ ۳ **۲** ۱ تابع در واقع $y = \sqrt{x}$ است که سه واحد به‌سمت چپ و یک واحد به‌سمت پایین انتقال یافته است. این تابع اکیداً صعودی است. می‌دانیم محل تقاطع یک تابع صعودی و معکوسش روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی $y = x$ خواهد بود، پس کافی است تابع را با $y = x$ در یک دستگاه حل کنیم تا محل تقاطع حاصل شود.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x + ۳} - ۱ \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x + ۳} - ۱ = x \Rightarrow \sqrt{x + ۳} = x + ۱ \xrightarrow[x > -۱]{\text{توان ۲}} x + ۳ = x^۲ + ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$|OA| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}$$

۳۷ ۴ **۳** ۲ ۱ تابع اکیداً صعودی است؛ پس منحنی وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می‌کند؛ بنابراین منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x} + ۳} + k$ وارون خود را در نقطهٔ

(۱ , ۱) قطع می‌کند و این نقطه روی تابع نیز صدق می‌کند.

$$۱=\sqrt{۱+۳}+k\Rightarrow k=-۱$$

بنابراین نمودار یک واحد به پایین منتقل شده است. این منحنی را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

$$y=-\sqrt{\sqrt{x}+۳}+۱$$

حال نمودار را ۴ واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y=-\sqrt{\sqrt{x+۴}+۳}+۱$$

نقطهٔ $(\sqrt{۵}-۱\ ,\ ۰)$ روی این منحنی قرار دارد.

۳۸ (۴) (۳) **(۲)** (۱) می‌دانیم اگر نقطهٔ $A(a,b)$ متعلق به تابع f باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A'(b,a)$ متعلق به تابع f^{-1} است و بالعکس. پس گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$f(x)=x^۳-x+۱$

گزینه ۱) $(-۱,-۲)\Rightarrow(-۲,-۱)\Rightarrow f(-۲)=-۸+۲+۱=-۵$ نادرست

گزینه ۲) $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})\Rightarrow(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۸},)\Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱-۴+۸}{۸}=\frac{۵}{۸}$ درست

گزینه ۳) $(۱,۲)\Rightarrow(۲,۱)\Rightarrow f(۲)=۸-۲+۱=۷$ نادرست

گزینه ۴) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱۱}{۸})\Rightarrow(-\frac{۱۱}{۸},-\frac{۱}{۲})\Rightarrow f(-\frac{۱۱}{۸})\neq-\frac{۱}{۲}$

۳۹ **(۴)** (۳) (۲) (۱)

$$f(x)=x^۲\sqrt{x^۲}=x^۲|x|$$

تابع f را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۲\cdot x=x^۳ & x\geq ۰\\ x^۲(-x)=-x^۳ & x\leq ۰\end{cases}$$

مشخص است که تابع f برای $x\leq ۰$، نزولی است و داریم:

$x\leq ۰\Rightarrow x^۳\leq ۰\Rightarrow -x^۳\geq ۰\Rightarrow f(a)\geq ۰\Rightarrow$ برد : $[۰,+\infty]$

$y=-x^۳\Rightarrow x^۳=-y\Rightarrow x=\sqrt[۳]{-y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{-x}=-\sqrt[۳]{x}, x\geq ۰$

۴۰ (۴) (۳) (۲) **(۱)** نقطهٔ $A(a,b)$ بر روی تابع قرار دارد اگر و فقط اگر نقطهٔ $A'(b,a)$ روی وارون تابع قرار داشته باشد، بنابراین جواب گزینهٔ ۱ است، زیرا:

$y=-۳x^۳+۲x-۱۱$

$(۹,-۲)\rightarrow(-۲,۹)\Rightarrow ۹=-۳(-۸)-۴-۱۱=۲۴-۱۵=۹$

۴۱ (۴) **(۳)** (۲) (۱) تابع $y=x^۳+۳x-۱۲$ اکیداً صعودی است. پس نقطهٔ برخورد تابع و وارون آن بر روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y=x$ قرار دارد. پس باید تابع را با $y=x$ قطع بدهیم.

$$\begin{cases}y=x^۳+۳x-۱۲\\ y=x\end{cases}\Rightarrow x^۳+۳x-۱۲=x\Rightarrow x^۳+۲x-۱۲=۰$$

$x=۲$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند، پس داریم:

$$x=۲\Rightarrow y=۲\Rightarrow A(۲,۲)\Rightarrow OA=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

۴۲ (۴) (۳) (۲) **(۱)**

$$f(x)=\begin{cases}۲-۳x & x\leq-\frac{۳}{۲}\Rightarrow R_f=[\frac{۱۳}{۲}\ ,\ \infty)\\ ۲+۲mx-x^۲ & x>-\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲+۲m(-\frac{۳}{۲})-(-\frac{۳}{۲})^۲\leq\frac{۱۳}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲-\frac{۹}{۴}-۳m\leq\frac{۱۳}{۲}\Rightarrow -۳m\leq\frac{۱۳}{۲}+\frac{۱}{۴}\Rightarrow -۳m\leq\frac{۲۷}{۴}\Rightarrow m\geq-\frac{۹}{۴}\qquad(۱)$$

رأس سهمی $x=m\Rightarrow ۲+۲m^۲-m^۲+۲<\frac{۱۳}{۲}\Rightarrow m^۲+۲<\frac{۱۳}{۲}$

$$\Rightarrow m^۲<\frac{۹}{۲}\Rightarrow-\frac{۳}{\sqrt{۲}}<m<\frac{۳}{\sqrt{۲}}\qquad(۲)$$

$(۱),(۲)\Rightarrow m=-۲$

$f^{-۱}(-۱۹)=\alpha\Rightarrow f(\alpha)=-۱۹$

$\Rightarrow ۲-۴\alpha-\alpha^۲=-۱۹\Rightarrow\alpha^۲+۴\alpha-۲۱=۰\Rightarrow(\alpha+۷)(\alpha-۳)=۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-۷ & \text{غ ق ق}\\ \alpha=۳ & \text{ق ق}\end{cases}$$

۴۳ **(۴)** (۳) (۲) (۱) نقطه تلاقی تابع $y=f^{-۱}(x)$ و خط $y=۱۲-x$، نقطه‌ای به عرض ۱۰ است، پس:

$$\begin{cases} ۱۰ = ۱۲ - x \Rightarrow x = ۲ \\ ۱۰ = f^{-۱}(x) \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(۲) = ۱۰ \Rightarrow f(۱۰) = ۲(*)$$

$$f(x) = \sqrt{x - ۲\sqrt{mx - ۱}} \overset{(*)}{\Rightarrow} \sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۱۰m - ۱}} = ۲ \Rightarrow \sqrt{۱۰m - ۱} = ۳ \Rightarrow ۱۰m - ۱ = ۹ \Rightarrow m = ۱$$

در نتیجه خواسته سؤال $f(۵)$ است که به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(۵) = \sqrt{۵ - ۲\sqrt{۵ - ۱}} = \sqrt{۵ - ۴} = ۱$$

۴۴ ۴ ۳ **۲** ۱

$$۵y - ۱۰x = ۱۲ \xrightarrow{y=۷٫۲} x = ۲٫۴ \Rightarrow A'(۲٫۴\,,۷٫۲) \in f^{-۱}(x) \Rightarrow A(۷٫۲\,,۲٫۴) \in f(x) \Rightarrow$$

$$۲٫۴ = \sqrt{۷٫۲}\sqrt{۷٫۲m - ۱} \rightarrow ۲٫۴ \times ۲٫۴ = ۷٫۲(۷٫۲m - ۱) \Rightarrow ۰٫۸ = ۷٫۲m - ۱ \Rightarrow$$

$$m = \frac{۱}{۴} \rightarrow f(\frac{۴}{m}) = f(۱۶) = \sqrt{۱۶}\sqrt{\frac{۱}{۴} \times ۱۶ - ۱} \Rightarrow f(۱۶) = ۴\sqrt{۳}$$

۴۵ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا عرض نقطهٔ برخورد را در خط قرار داده تا طول نقطه برخورد به دست آید: $y = ۱ \xrightarrow{\text{خط}} x = ۲۰$

خط از نقطه$(۲۰\,,۱)$ می‌گذرد، پس وارون تابع هم از این نقطه می‌گذرد ، در نتیجه تابع f از نقطهٔ $(۱, ۲۰)$ عبور می‌کند.

$$\Rightarrow f(۱) = a + ۸ = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۲$$

توجه: اگر f و $f^{-۱}$ وارون یکدیگر باشند آنگاه:

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-۱}(b) = a$$

۴۶ **۴** ۳ ۲ ۱

f نزولی اکید است

$$x + ۱ \geq ۰ \rightarrow x \geq -۱ \;,\; ۱ - \sqrt{۱ + x} \geq ۰ \rightarrow x \leq ۰$$

$$D_f = [-۱, ۰]$$

$$R_f = [f(۰), f(-۱)] = [۰, ۱]$$

با توجه به دامنه و برد تابع f نمودار f در ناحیه دوم واقع شده است. پس فقط در $O(۰, ۰)$ همدیگر را قطع می‌کنند.

۴۷ **۴** ۳ ۲ ۱ محل تقاطع یک تابع و وارون آن (در صورت وجود) روی خط $y = x$ قرار دارد.

$$f(x) = x \Rightarrow \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + x}} = x$$

$$\Rightarrow ۱ + \sqrt{۱ + x} = x^۲ \Rightarrow ۱ + x = (x^۲ - ۱)^۲$$

$$\Rightarrow x^۴ - ۲x^۲ - x = ۰ \Rightarrow x(x^۳ - ۲x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x(x + ۱)(x^۲ - x - ۱) = ۰$$

بنابر $x^۲ = ۱ + \sqrt{۱ + x}$ نتیجه می‌شود $x \geq ۱$ تنها ریشهٔ بین ریشه‌های معادله فوق که از ۱ بزرگ‌تر است، $\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ است. بنابراین f و $f^{-۱}$ یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۴۸ ۴ ۳ ۲ **۱**

می‌دانیم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\}$$

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g \;,\; g(x) \in D_f\}$$

ابتدا $f^{-۱}$ را می‌نویسیم:

$$f^{-۱} = \{(۲, ۱), (۵, ۲), (۴, ۳), (۶, ۴)\}$$

و سپس $gof^{-۱}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$gof^{-۱} = \{(۵, ۳), (۴, ۱), (۶, ۲)\}$$

حال زوج‌مرتب $\frac{g}{gof^{-۱}}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{g}{gof^{-۱}} = \{(۵, ۲), (۴, ۲)\}$$

۴۹ **۴** ۳ ۲ ۱

$$f = \{(۱\,,۲)\,,(۲\,,۵)\,,(۳\,,۴)\,,(۴\,,۶)\} \quad , \quad g = \{(۲\,,۳)\,,(۴\,,۲)\,,(۵\,,۶)\,,(۳\,,۱)\}$$

$$g^{-۱} = \{(۳\,,۲)\,,(۲\,,۴)\,,(۶\,,۵)\,,(۱\,,۳)\} \Rightarrow g^{-۱}of = \{(۱\,,۴)\,,(۴\,,۵)\}$$

$$g^{-۱}of - f = \{(۱\,,۴ - ۲)\,,(۴\,,۵ - ۶)\} = \{(۱\,,۲)\,,(۴\,,-۱)\} \Rightarrow \text{برد} = \{۲\,,-۱\}$$

۵۰ (۴) (۳) (۲) (۱) می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آنگاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$(g^{-1}of^{-1})(۸) = g^{-1}(f^{-1}(۸))$$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(۸)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$۸ = \frac{۲}{۵}x - ۴ \to \frac{۲}{۵}x = ۱۲ \to ۲x = ۶۰ \to x = ۳۰$$

پس : $g^{-1}(f^{-1}(۸)) = g^{-1}(۳۰)$

برای محاسبهٔ $g^{-1}(۳۰)$ بدین صورت عمل می‌نماییم.

$$۳۰ = x^۳ + x \to x = ۳$$

۵۱ (۴) (۳) (۲) (۱) می‌دانیم که $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ است.

توجه کنید:

$$f^{-1}(۲۰) = a \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۶ \Rightarrow f^{-1}(۲۰) = ۱۶ g^{-1}(۱۶) = b \Rightarrow g(b) = \frac{۹b + ۶}{۱ - b} = ۱۶ \Rightarrow b = \frac{۲}{۵}$$

$$g^{-1}of^{-1}(۲۰) = g^{-1}(f^{-1}(۲۰)) = g^{-1}(۱۶) = \frac{۲}{۵}$$

۵۲ (۴) (۳) (۲) (۱) می‌دانیم که $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ است.

$$f^{-1}og^{-1}(-۹) = f^{-1}(g^{-1}(-۹)) = f^{-1}(۲۱) = ۶$$

توجه کنید:

$$g^{-1}(-۹) = a \Rightarrow g(a) = -۹ \Rightarrow \frac{۳ - a}{۲} = -۹ \Rightarrow ۳ - a = -۱۸ \Rightarrow a = ۲۱$$

$$f^{-1}(۲۱) = b \Rightarrow f(b) = ۲۱ \Rightarrow b^۲ - ۴b + ۹ = ۲۱ \Rightarrow b^۲ - ۴b - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (b - ۶)(b + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = ۶ \\ b = -۲ \ \text{(غ ق ق (با توجه به دامنه}\end{cases}$$

۵۳ (۴) (۳) (۲) (۱) هر کدام از عبارات $gof^{-1}(-۲)$ و $gog(۰)$ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به مقادیر مشخص شده روی نمودارها، داریم:

$$gog(۰) = g(g(۰)) = g(۲) = ۳$$

f تابع خطی گذرنده از دو نقطهٔ $(۰, -۳)$ و $(۲, ۰)$ است.

$$\text{شیب} = \frac{۰ - (-۳)}{۲ - ۰} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y - ۰ = \frac{۳}{۲}(x - ۲) = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

$$f(x) = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

$$f^{-1}(-۲) = k \Rightarrow f(k) = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}k - ۳ = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}k = ۱ \Rightarrow k = \frac{۲}{۳} \Rightarrow f^{-1}(-۲) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow gof^{-1}(-۲) = g(f^{-1}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳})$$

برای $a \leq ۱$، تابع خطی گذرنده از نقاط $(۱, ۱)$ و $(۰, ۲)$ است.

$$\text{شیب} = \frac{۲ - ۱}{۰ - ۱} = -۱ \Rightarrow y - ۲ = -۱(x - ۰) \Rightarrow y = -x + ۲$$

$$x \leq ۱ \Rightarrow g(x) = -x + ۲ \Rightarrow g(\frac{۲}{۳}) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$gof^{-1}(-۲) \times gog(۰) = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴$$

۵۴ (۴) (۳) (۲) (۱) می‌دانیم $g^{-1}of^{-1} = (Fog)^{-1}$، پس طبق فرض داریم:

محور yها : $x = ۰ \Rightarrow (g^{-1}of^{-1})(۰) = \alpha \Rightarrow (fog)^{-1}(۰) = \alpha \Rightarrow (fog)(\alpha) = ۰$

در تابع f داریم $f(۳) = ۰$، پس:

$$g(\alpha) = ۳ \Rightarrow \alpha + \sqrt{۲\alpha - ۴} = ۳ \Rightarrow \sqrt{۲\alpha - ۴} = ۳ - \alpha$$

$$\xrightarrow[(\alpha<۳)]{\text{توان ۲}} ۲\alpha - ۴ = ۹ + \alpha^۲ - ۶\alpha \Rightarrow \alpha^۲ - ۸\alpha + ۱۳ = ۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۸ \pm \sqrt{۶۴ - ۵۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha = ۴ \pm \sqrt{۳} \xrightarrow{\alpha<۳} \alpha = ۴ - \sqrt{۳}$$

۵۵ (۴) (۳) (۲) (۱) باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x - ۱$ برابر ۸ است، پس $P(۱) = ۸$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم بر $۲x + ۱$ برابر ۵ است پس $P(-\frac{۱}{۲}) = ۵$. باقی ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $۲x^۲ - x - ۱$ یک چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌صورت $mx + n$ است.

$$P(x)=(2x^2-x-1)Q(x)+mx+n\Rightarrow\begin{cases}P(1)=m+n=8\\ P(-\frac{1}{2})=-\frac{m}{2}+n=5\end{cases}\Rightarrow m=2\ ,\ \ n=6$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ این تقسیم $2x+6$ است.

۵۶ ۴ ۳ ۲ **۱** چون $P(x)$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر است پس $P(\frac{1}{2})=0$ است.

$$P(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{16})+a(\frac{1}{8})+2(\frac{1}{4})-\frac{3}{2}=0\Rightarrow\frac{1}{8}+\frac{a}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0\Rightarrow 1+a+4-12=0\Rightarrow a=7$$

بنابراین $P(x)=2x^4+7x^3+2x^2-3x$ است. اکنون برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ آن بر $x+2$ کافی است که $P(-2)$ را حساب کنید.

$$P(-2)=2(16)+7(-8)+2(4)-3(-2)=32-56+8+6=-10$$

۵۷ ۴ **۳** ۲ ۱

می‌دانیم:

$$P(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow P'(x)=2ax+b$$

الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$$ax^2+bx+c=(2ax+b)(\frac{1}{2}x+1)-2$$
$$\Rightarrow ax^2+bx+c=ax^2+2ax+\frac{b}{2}x+b-2$$
$$\Rightarrow ax^2+bx+c=ax^2+(2a+\frac{b}{2})x+(b-2)\Rightarrow\begin{cases}b=2a+\frac{b}{2}\Rightarrow b=4a\\ c=b-2\end{cases}$$

برای آن که کمترین میزان مجموع ضرایب به‌دست آید $a=1$ قابل قبول است. (برای هر مقدار a قابل قبول است.)

$$\Rightarrow\begin{cases}b=4\\ c=2\end{cases}\Rightarrow a+b+c=1+4+2=7$$

۵۸ **۴** ۳ ۲ ۱ رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x)=(x^2+2x)Q(x)+3x+1$$

از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$P'(x)=(2x+2)Q(x)+(x^2+2x)Q'(x)+3$$

با جایگذاری $x=-2$ داریم:

$$P'(-2)=-2Q(-2)+(4-4)Q'(-2)+3=-2(3)+3=-3$$

باقیماندهٔ $P'(x)$ بر $x+2$ برابر $P'(-2)$ است؛ باقیمانده برابر (-3) است.

۵۹ **۴** ۳ ۲ ۱ ابتدا $p(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$p(x)=x^{3n+1}+2x^{3n}+x^6+3x^5+16a=x^{3n}\times x+2x^{3n}+x^6+3x^5+16a$$
$$=(x+2)\cdot x^{3n}+x^6+3x^5+16a$$

چون $p(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، پس باید $p(-2)$ برابر صفر باشد.

$$p(-2)=(-2+2)\times(-2)^{3n}+(-2)^6+3\times(-2)^5+16a=0$$
$$\Rightarrow 0+64-3\times 32+16a=0\Rightarrow 16a=96-64=32\Rightarrow a=2$$

برای $n=1$ داریم:

$$p(x)=(x+2)x^3+x^6+3x^5+32=x^6+3x^5+^4+2x^3+32$$

باقی‌مانده $p(x)$ بر عبارت درجه دوم $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ عبارت درجهٔ اولی به‌صورت $ax+b$ است و داریم:

$$x^6+3x^5+^4+2x^3+32=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$$
$$x=1\Rightarrow 1+3+1+2+32=0+a+b\Rightarrow a+b=39$$

توجه کنید که فقط در گزینه ۴ حاصل $a+b$ برابر ۳۹ است. هرچند b, a قابل محاسبه است.

$$x=-3\Rightarrow 729-729+81+2(-27)+32=0-3a+b\Rightarrow -3a+b=59\Rightarrow 3a-b=-59$$
$$\begin{cases}a+b=39\\ 3a-b=-59\end{cases}\Rightarrow 4a=-20\Rightarrow a=-5\Rightarrow -5+b=39\to b=44$$
$$\text{باقی‌مانده}=ax+b=-5x+44$$

۶۰ ۴ ۳ ۲ **۱** در همسایگی $x=-1$ مقدار x منفی است و تابع را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y=x^2|x|+3ax^2+b=x^2(-x)+3ax^2+b$$
$$y=-x^3+3ax^2+b,\ \text{اکسترمم نسبی}\ A(-1,1)$$

مشتق به‌ازای $x=-1$ برابر صفر است.

$$y'=-3x^2+6ax\xrightarrow{x=-1}-3-6a=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$y=-x^3-\frac{3}{2}x^2+b$$

مختصات نقطهٔ $A(-۱,۱)$ در تابع صدق می‌کند.

$$۱ = -(-۱)^۳ - \frac{۳}{۲}(-۱)^۲ + b \Rightarrow ۱ = ۱ - \frac{۳}{۲} + b \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}} = -۳$$

۶۱) ۱ ۲ ۳ **۴** نقطهٔ مینیمم تابع $y = \frac{۳}{۲}x^۲ + x + \frac{۵}{۶}$ را می‌یابیم.

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{۱}{۲\times\frac{۳}{۲}} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۳} + \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۳} + \frac{۵}{۶} \Rightarrow y = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \min(-\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$$

پس $x = -\frac{۱}{۳}$ مجانب قائم و $y = \frac{۲}{۳}$ مجانب افقی تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+۳}{(a+۱)x+a-۱}$ است.

$$(a+۱)x + a - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱-a}{a+۱} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳ - ۳a = -a - ۱ \Rightarrow ۴ = ۲a \Rightarrow a = ۲$$

$$y = \frac{a}{a+۱} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳a = ۲a + ۲ \Rightarrow a = ۲$$

$$y = \frac{۲x+۳}{۳x+۱} \xrightarrow{y=۰} ۲x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}$$

۶۲) ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به گزینه‌ها که همگی عبارتی درجه اول برحسب x هستند، خارج‌قسمت را به‌صورت $Q(x) = ax + b$ در نظر گرفته و با نوشتن رابطهٔ تقسیم داریم.

$$f(x) = (x^۲ + ۴x + ۵)(ax + b) + x + ۲$$

$$x = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۱۰(a+b) + ۳ = ۱۳ \Rightarrow a + b = ۱$$

$$x = -۱ \Rightarrow f(-۱) = ۲(-a+b) + ۱ = ۱۱ \Rightarrow -a + b = ۵$$

$$\begin{cases} a + b = ۱ \\ -a + b = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۲b = ۶ \to b = ۳ \to a = -۲ \Rightarrow Q(x) = -۲x + ۳$$

۶۳) ۱ ۲ ۳ **۴**

$$۲ - x^{۱۴} = (x^۲ + x + ۱)q(x) + r(x)$$

$$(۲ - x^{۱۴})(x - ۱) = (x^۳ - ۱)q(x) + \underbrace{(x-۱)r(x)}_{\text{باقی‌مانده}}$$

$$x^۳ \equiv ۱ \Rightarrow x^{۱۴} \equiv x^۲(x^۳)^۴ \equiv x^۲ \Rightarrow (۲ - x^۲)(x - ۱) = r(x)(x - ۱)$$

$$\Rightarrow -\underset{۱}{\cancel{x^۳}} + x^۲ + ۲x - ۲ = r(x)(x - ۱)$$

$$\Rightarrow r(x)(x - ۱) = (x - ۱)(x + ۳)$$

$$\Rightarrow r(x) = (x + ۳) \Rightarrow \text{جمع ضرایب} = ۴$$

۶۴) ۱ **۲** ۳ ۴

$$p(x) = x^{۱۷} - ۵ = (x^۲ - x + ۱)\cdot q(x) + r(x)\ , r(x) = ax + b$$

$$\Rightarrow x^۲ - x + ۱ \equiv ۰ \Rightarrow x^۲ \equiv x - ۱$$

$$\Rightarrow x^۴ \equiv x^۲ - ۲x + ۱ \equiv -x$$

$$\Rightarrow x^۸ \equiv +x^۲ \equiv x - ۱$$

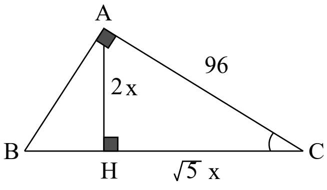
$$\Rightarrow x^{۱۶} \equiv x^۲ - ۲x + ۱ \equiv -x$$

$$\Rightarrow x^{۱۷} \equiv -x^۲ \equiv -x + ۱$$

$$\Rightarrow x^{۱۷} - ۵ \equiv -x - ۴ = r(x)$$

درنتیجه حاصل‌ضرب ضرایب $r(x)$ برابر است با ۴.

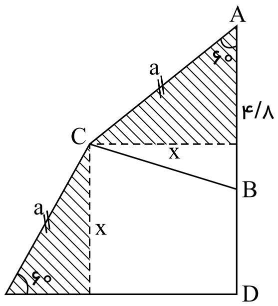
۶۵) ۱ ۲ **۳** ۴ چون $\frac{\sqrt{۵}}{۲} = \frac{CH}{AH}$ است $\cot C$ می‌توان $CH = \sqrt{۵x}$ و $AH = ۲x$ را در نظر گرفت.



$$A\overset{\Delta}{H}C : (۹۶)^۲ = (۲x)^۲ + (\sqrt{۵x})^۲ \to ۹۶ \times ۹۶ = ۴x^۲ + ۵x^۲ \to ۹۶ \times ۹۶ = ۹x^۲ \to x^۲ = ۳۲ \times ۳۲ \to x = ۳۲ \to AH = ۲x = ۶۴$$

۶۶) ۱ **۲** ۳ ۴ طبق مساحت سینوسی مثلث ABC داریم:

مطابق آزمون قلم‌چی



$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{۱}{۲}a \times ۴/۸ \times \sin ۶۰^\circ \\ \text{فرض} : S_{ABC} = ۷/۲\sqrt{۳} \end{cases} \rightarrow ۱/۲a\sqrt{۳} = ۷/۲\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۶$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ هاشورخورده با هم هم‌نهشت‌اند و داریم $x = a\sin ۶۰^\circ = ۳\sqrt{۳}$؛ پس CD قطر مربعی به ضلع $۳\sqrt{۳}$ است و درنتیجه:

$$CD = ۳\sqrt{۳} \times \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۶}$$

۶۷ ۴ **۳** ۲ ۱ هرکدام از نسبت‌های مثلثاتی داده‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\sin\frac{۱۷\pi}{۳} = \sin(۶\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin(\frac{-\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶}) = \cos\frac{۱۷\pi}{۶} = \cos(۳\pi - \frac{\pi}{۶}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۱۹\pi}{۴} = \tan(۵\pi - \frac{\pi}{۴}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶}) = -\sin\frac{۱۱\pi}{۶} = -\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\sin(\frac{-\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین خواستهٔ سؤال به‌صورت زیر است:

$$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶}) + \tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶}) = (\frac{-\sqrt{۳}}{۲})(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}) + (-۱)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۶۸ ۴ ۳ **۲** ۱ زاویه‌ها را شکسته و برحسب $\frac{\pi}{۴}$ می‌نویسیم.

$$A = \tan\frac{۱۱\pi}{۴} + \sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}$$

$$\tan(\frac{۱۱\pi}{۴}) = \tan(\frac{۱۲\pi - \pi}{۴}) = \tan(۳\pi - \frac{\pi}{۴}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\sin(\frac{۱۵\pi}{۴}) = \sin(\frac{۱۶\pi - \pi}{۴}) = \sin(۴\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\sin(\frac{\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos(\frac{۱۳\pi}{۴}) = \cos(\frac{۱۲\pi + \pi}{۴}) = \cos(۳\pi + \frac{\pi}{۴}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$A = -۱ + (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) \cdot (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -۱ + \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

۶۹ ۴ ۳ **۲** ۱

$$\tan\frac{۱۷\pi}{۶}\sin\frac{۱۱\pi}{۳} + \cos\frac{۱۰\pi}{۳} = \tan(۳\pi - \frac{\pi}{۶})\sin(۴\pi - \frac{\pi}{۳}) + \cos(۳\pi + \frac{\pi}{۳})$$

$$= \tan(-\frac{\pi}{۶})\sin(-\frac{\pi}{۳}) + \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = (-\tan\frac{\pi}{۶})(-\sin\frac{\pi}{۳}) - \cos\frac{\pi}{۳}$$

$$= \tan\frac{\pi}{۶}\sin\frac{\pi}{۳} - \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۲} = ۰$$

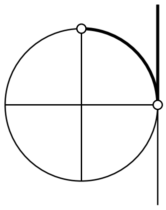
۷۰ ۴ ۳ ۲ **۱** زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}-x$ را تشکیل می‌دهیم:

$$-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\frac{\pi}{۴}>-x>-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}>\frac{\pi}{۴}-x>\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۰<\frac{\pi}{۴}-x<\frac{\pi}{۲}$$

فرض می‌کنیم $\alpha=\frac{\pi}{۴}-x$، داریم:

$$۰<\alpha<\frac{\pi}{۲},\tan\alpha=\frac{۱-m}{۲+m}$$

از روی دایرهٔ مثلثاتی مقابل مشخص است که اگر $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $\tan\alpha>۰$ پس داریم:



$$\frac{۱-m}{۲+m}>۰\Rightarrow$$

m		-۲		۱	
$\frac{۱-m}{۲+m}$	$-$	ت‌ن	$+$	۰	$-$

$$-۲<m<۱\Rightarrow m\in(-۲\,,\,۱)$$

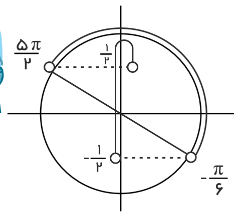
۷۱ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا حدود x را می‌یابیم:

$$-\frac{\pi}{۱۲}<x<\frac{۵\pi}{۱۲}\xrightarrow{\times ۲}-\frac{\pi}{۶}<۲x<\frac{۵\pi}{۱۲}$$

با فرض $۲x=\alpha$ و استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\sin\alpha=\frac{m-۱}{۴}\,,\,-\frac{\pi}{۶}<\alpha<\frac{۵\pi}{۶}$$

طبق دایرهٔ مثلثاتی مقابل، اگر $-\frac{\pi}{۶}<\alpha<\frac{۵\pi}{۶}$، $\sin\alpha$ از $-\frac{۱}{۲}$ تا ۱ افزایش یافته و سپس تا $\frac{۱}{۲}$ کاهش می‌یابد، بنابراین در کل داریم:



$$-\frac{۱}{۲}<\sin\alpha\le ۱\Rightarrow-\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۴}\le ۱\xrightarrow{\times ۴}-۲<m-۱\le ۴\xrightarrow{+۱}-۱<m\le ۵\Rightarrow m\in(-۱,۵]$$

۷۲ ۴ **۳** ۲ ۱

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=-۳\Rightarrow\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x\cos x}=-۳\Rightarrow\sin x\cos x=-\frac{۱}{۳}$$

$$(\sin x+\cos x)^۲=\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sin x\cos x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$۳\pi<۴x<۴\pi\Rightarrow\frac{۳}{۴}\pi<x<\pi\Rightarrow\sin x+\cos x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow\sin^۳ x+\cos^۳ x=(\sin x+\cos x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x-\sin x\cos x)=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}(۱+\frac{۱}{۳})=-\frac{۴}{۹}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\sin^۳ x+\cos^۳ x}=\frac{۱}{-\frac{۴}{۹}\sqrt{۳}}=\frac{-۹}{۴\sqrt{۳}}=-\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}=-۰/۷۵\sqrt{۳}$$

۷۳ ۴ ۳ **۲** ۱ می‌دانیم:

$$\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

$$T=۳\cos ۴x+\sqrt{۲}(\sin x-\cos x)=۳\cos ۴x+۲\sin(x-\frac{\pi}{۴})\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۱۲}}T=۳\cos\frac{\pi}{۳}+۲\sin(-\frac{\pi}{۶})=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

۷۴ ۴ ۳ **۲** ۱

$$\frac{۱}{\sqrt{\cos^۲\alpha}}-\tan\alpha=\frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

$$\frac{۱}{|\cos\alpha|}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

تساوی فوق زمانی برقرار است که $\cos\alpha < ۰$ باشد؛ زیرا در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{-۱}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۱+\sin\alpha}{-\cos\alpha}$$

$$\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = \frac{-۱}{\cot\alpha} \Rightarrow \frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$\Rightarrow$ باید $\sin\alpha < ۰$

با توجه به اینکه باید $\cos\alpha < ۰$ و $\sin\alpha < ۰$ باشد پس α در ناحیه سوم دایرهٔ مثلثاتی است.

۷۵ ۴ ۳ ۲ **۱** طرفین را بر $\sin^۲ x$ تقسیم می‌کنیم.

$$۳ + a\cot^۲ x = ۴(۱+\cot^۲ x) \Rightarrow \cot^۲ x = \frac{۱}{a-۴}$$

۷۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\tan(\widehat{B}-\widehat{C}) = \sqrt{۳} \Rightarrow \cos(\widehat{B}-\widehat{C}) = \cos(\widehat{C}-\widehat{B}) = \frac{۱}{۲}$$

$$A = \frac{۲(\frac{۱}{۲} - \cos(\widehat{B}+\widehat{C}))}{۴\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}} = \frac{۲(\cos(\widehat{B}-\widehat{C}) - \cos(\widehat{B}+\widehat{C}))}{۴\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}} = \frac{۴\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}}{۴\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}} = \tan\widehat{C}$$

۷۷ **۴** ۳ ۲ ۱

$$\frac{۳\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{۳\cot x - ۱}{\cot x + ۱} \xlongequal{\cot x = ۴} \frac{۱۲-۱}{۵} = ۲/۲$$

۷۸ ۴ **۳** ۲ ۱

$$\cot(\widehat{B}-\widehat{C}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \widehat{B}-\widehat{C} = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \cos(\widehat{B}-\widehat{C}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲\cos(\widehat{B}+\widehat{C})+۱}{۴\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}} = \frac{۲(\cos(\widehat{B}+\widehat{C})+\frac{۱}{۲})}{۴\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}} = \frac{\cos(\widehat{B}+\widehat{C})+\cos(\widehat{B}-\widehat{C})}{۲\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}} = \frac{۲\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}{۲\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}} = \frac{\cos\widehat{B}}{\sin\widehat{B}} = \cot\widehat{B}$$

۷۹ **۴** ۳ ۲ ۱ می‌دانیم که $۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ و چون $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ است، انتهای کمان در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی است و داریم:

$$\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴} - \sin^۲ x) = \sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}\left(۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ - \sin^۲ x\right) = \frac{۱}{\underbrace{|\cos x|}_{-}}(۱-\sin^۲ x) = \frac{-۱}{\cos x}(\cos^۲ x) = -\cos x$$

۸۰ ۴ ۳ ۲ **۱** می‌دانیم که $۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ و چون $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ است، انتهای کمان در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی است و داریم:

$$\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}(\frac{۱}{\sin x} - \sin x) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}}(\frac{۱-\sin^۲ x}{\sin x}) = \frac{\tan x}{\frac{۱}{\underbrace{|\cos x|}_{-}}}(\frac{\cos^۲ x}{\sin x}) = -(\frac{\sin x}{\cos x})(\cos x)(\frac{\cos^۲ x}{\sin x}) = -\cos^۲ x$$

۸۱ **۴** ۳ ۲ ۱

$$۱+\cot^۲ C = \frac{۱}{\sin^۲ C} \to ۱+\cot^۲ C = \frac{۱۶۹}{۲۵} \to \cot^۲ C = \frac{۱۴۴}{۲۵} \to \cot C = \frac{۱۲}{۵}$$

$$\overset{\triangle}{AHC}: \cot C = \frac{CH}{AH} \to \frac{۱۲}{۵} = \frac{۹}{AH} \to ۱۲AH = ۴۵ \to AH = ۳/۷۵$$

۸۲ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا صورت عبارت را کمی ساده کنیم، می‌دانیم $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = \cos\alpha$ و $\sin(\alpha-\pi) = -\sin(\pi-\alpha) = -\sin\alpha$. داریم:

$$\cos\alpha = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha} = \pm\sqrt{\frac{۵}{۹}} \xlongequal{\text{ربع چهارم}} -\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$۱+\tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱+\tan^۲\alpha = \frac{۹}{۴} \Rightarrow \tan^۲\alpha = \frac{۵}{۴}$$

حاصل عبارت موردنظر برابر می‌شود با:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^۲\alpha - ۱|} = \frac{\frac{۲}{۳} - \frac{\sqrt{۵}}{۳}}{|\frac{۵}{۴} - ۱|} = \frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$$

(۸۳) ۱ ۲ **۳** ۴ طرفین $\text{۲}\sin^{\text{۲}} x+\cos^{\text{۲}} x=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}$ را بر $\cos^{\text{۲}} x$ تقسیم می‌کنیم و از رابطهٔ $\text{۱}+\tan^{\text{۲}} x=\frac{\text{۱}}{\cos^{\text{۲}} x}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\text{۲}\sin^{\text{۲}} x}{\cos^{\text{۲}} x}+\frac{\cos^{\text{۲}} x}{\cos^{\text{۲}} x}=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\times\frac{\text{۱}}{\cos^{\text{۲}} x}\Rightarrow \text{۲}\tan^{\text{۲}} x+\text{۱}=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}(\text{۱}+\tan^{\text{۲}} x)\xrightarrow{\times\text{۳}}\text{۶}\tan^{\text{۲}} x+\text{۳}=\text{۴}+\text{۴}\tan^{\text{۲}} x\Rightarrow \text{۲}\tan^{\text{۲}} x=\text{۱}\Rightarrow \tan^{\text{۲}} x=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

روش دوم: از روابط $\sin^{\text{۲}} x=\text{۱}-\cos^{\text{۲}} x$ و $\cos^{\text{۲}} x=\text{۱}-\sin^{\text{۲}} x$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{۲}\sin^{\text{۲}} x+\cos^{\text{۲}} x=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}$$

$$\text{۲}\sin^{\text{۲}} x+\text{۱}-\sin^{\text{۲}} x=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\Rightarrow \sin^{\text{۲}} x=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}-\text{۱}=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$$

$$\text{۲}\sin^{\text{۲}} x+\cos^{\text{۲}} x=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\Rightarrow \text{۲}(\text{۱}-\cos^{\text{۲}} x)+\cos^{\text{۲}} x=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\Rightarrow \text{۲}-\text{۲}\cos^{\text{۲}} x+\cos^{\text{۲}} x=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\Rightarrow \cos^{\text{۲}} x=\text{۲}-\frac{\text{۴}}{\text{۳}}=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$$

$$\tan^{\text{۲}} x=\frac{\sin^{\text{۲}} x}{\cos^{\text{۲}} x}=\frac{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}}{\frac{\text{۲}}{\text{۳}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

(۸۴) ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به رابطهٔ داده‌شده، مقدار کسینوس را به دست می‌آوریم:

$$\sin\alpha=\text{۲}\cos\alpha\Rightarrow \tan\alpha=\text{۲}$$

می‌دانیم:

$$\text{۱}+\tan^{\text{۲}}\alpha=\frac{\text{۱}}{\cos^{\text{۲}}\alpha}\Rightarrow\frac{\text{۱}}{\cos^{\text{۲}}\alpha}=\text{۱}+\text{۴}=\text{۵}\Rightarrow\cos^{\text{۲}}\alpha=\frac{\text{۱}}{\text{۵}}$$

$$\xrightarrow[\cos\alpha<\text{۰}]{\text{ربع سوم}}\cos\alpha=\frac{-\text{۱}}{\sqrt{\text{۵}}}=-\frac{\sqrt{\text{۵}}}{\text{۵}}$$

(۸۵) ۱ ۲ **۳** ۴ روش اول: به‌ازای حاصل عبارت برابر ۱ و به‌ازای $\alpha=\frac{\pi}{\text{۲}}$ برابر $-\text{۱}$ است که این تساوی‌ها فقط در گزینهٔ «۳» دیده می‌شود.

روش دوم: در فرمول‌های مثلثاتی داریم:

$$\sin^{\text{۴}}\alpha=(\text{۱}-\cos^{\text{۲}}\alpha)^{\text{۲}}=\cos^{\text{۴}}\alpha-\text{۲}\cos^{\text{۲}}\alpha+\text{۱}$$

$$\cos^{\text{۴}}\alpha=(\text{۱}-\sin^{\text{۲}}\alpha)^{\text{۲}}=\sin^{\text{۴}}\alpha-\text{۲}\sin^{\text{۴}}\alpha+\text{۱}$$

این فرمول‌ها را در صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم و سپس داریم:

$$\Rightarrow T=\frac{\cos^{\text{۴}}+\text{۲}\cos^{\text{۲}}\alpha+\text{۱}}{\cos^{\text{۲}}\alpha+\text{۱}}-\frac{\sin^{\text{۴}}\alpha+\text{۲}\sin^{\text{۴}}\alpha+\text{۱}}{\sin^{\text{۲}}\alpha+\text{۱}}=\frac{(\cos^{\text{۲}}\alpha+\text{۱})^{\text{۲}}}{\cos^{\text{۲}}\alpha+\text{۱}}-\frac{(\sin^{\text{۲}}\alpha+\text{۱})^{\text{۲}}}{\sin^{\text{۲}}\alpha+\text{۱}}=\cos^{\text{۲}}\alpha-\sin^{\text{۲}}\alpha=\cos\text{۲}\alpha$$

(۸۶) ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم:

$$\sin^{\text{۲}}\alpha+\cos^{\text{۲}}\alpha=\text{۱}\xrightarrow{\alpha\ \text{ناحیه دوم}}\boxed{\cos\alpha=-\sqrt{\text{۱}-\sin^{\text{۲}}\alpha}}\ ,\ \boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\cos(\frac{\text{۱۱}\pi}{\text{۴}})=\cos(\frac{\text{۱۲}\pi-\pi}{\text{۴}})=\cos(\text{۳}\pi-\frac{\pi}{\text{۴}})=\cos(\pi-\frac{\pi}{\text{۴}})=-\cos\frac{\pi}{\text{۴}}=-\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}$$

$$\sin(\frac{\text{۱۱}\pi}{\text{۴}})=\sin(\pi-\frac{\pi}{\text{۴}})=\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}$$

$$\cos\alpha=-\sqrt{\text{۱}-\sin^{\text{۲}}\alpha}=-\sqrt{\text{۱}-(\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۱۰}})^{\text{۲}}}=-\sqrt{\frac{\text{۹۸}}{\text{۱۰۰}}}=\frac{-\sqrt{\text{۹۸}}}{\text{۱۰}}$$

$$\cos(\frac{\text{۱۱}\pi}{\text{۴}}+\alpha)=\cos\frac{\text{۱۱}\pi}{\text{۴}}\cdot\cos\alpha-\sin\frac{\text{۱۱}\pi}{\text{۴}}\cdot\sin\alpha=-\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}\times(\frac{-\sqrt{\text{۹۸}}}{\text{۱۰}})-(\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}})\cdot(\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۱۰}})=\frac{\sqrt{\text{۱۹۶}}}{\text{۲۰}}-\frac{\sqrt{\text{۴}}}{\text{۲۰}}=\frac{\text{۷}}{\text{۱۰}}-\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}=\frac{\text{۶}}{\text{۱۰}}=\frac{\text{۳}}{\text{۵}}$$

(۸۷) ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\text{۱}-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

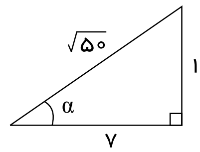
چون $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $\text{۲}x^{\text{۲}}+\text{۳}x-\text{۱}=\text{۰}$ هستند، پس داریم:

$$S=\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{\text{۳}}{\text{۲}}$$

$$P=\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{c}{a}=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{۱-(-\frac{۱}{۲})}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=-۱$$

۸۸ ۴ ۳ ۲ **۱** اگر α در ناحیهٔ اول باشد، به کمک مثلث قائم‌الزاویه زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را محاسبه می‌کنیم.



$$\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵۰}}\ ,\ \cos\alpha=\frac{۷}{\sqrt{۵۰}}$$

$$\sin(\frac{۱۳\pi}{۴})=\sin(\frac{۱۲\pi+\pi}{۴})=\sin(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=\sin(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

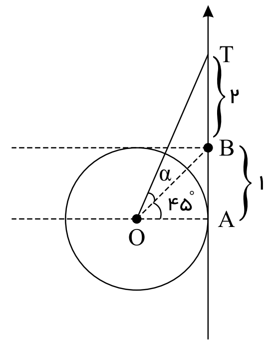
$$\cos(\frac{۱۳\pi}{۴})=\cos(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

حال خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم

$$\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)=\sin\frac{۱۳\pi}{۴}\cdot\cos\alpha+\cos\frac{۱۳\pi}{۴}\cdot\sin\alpha=(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\cdot(\frac{۷}{\sqrt{۵۰}})+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\cdot(\frac{۱}{\sqrt{۵۰}})=-\frac{۸\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۵۰}}=-\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۵۰}}=-\frac{۴\sqrt{۲}\times\sqrt{۵۰}}{۵۰}$$

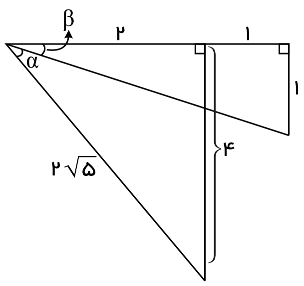
$$=-\frac{۴\times ۱۰}{۵۰}=-\frac{۴}{۵}$$

۸۹ ۴ **۳** ۲ ۱ می‌دانیم که $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ است. حال با در نظر گرفتن دایرهٔ مثلثاتی زیر داریم:



$$\tan\alpha=\tan(\alpha+۴۵^\circ-۴۵^\circ)=\frac{\tan(\alpha+۴۵^\circ)-۱}{۱+\tan(\alpha+۴۵^\circ)}=\frac{۳-۱}{۱+۳}=\frac{۱}{۲}$$

۹۰ ۴ ۳ **۲** ۱ مطابق شکل، زاویهٔ مجاور α را β در نظر می‌گیریم. همچنین طبق قضیه فیثاغورس ضلع قائمهٔ روبه‌روی زاویه $\alpha+\beta$ برابر ۴ می‌شود. طبق شکل داریم:



$$\begin{cases}\alpha=(a+\beta)-\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{۲}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\ ,\ \sin(\alpha+\beta)=\frac{۴}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\\ \cos\beta=\frac{۳}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}\ ,\ \sin\beta=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\end{cases}$$

$$\cos\alpha=\cos((\alpha+\beta)-\beta)=\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}+\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۵}{\sqrt{۵۰}}=\frac{۵}{۵\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

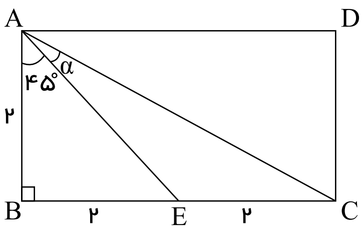
(راه‌حل دوم) از $\tan(\alpha+\beta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow\frac{۴}{۲}=\frac{\tan\alpha+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{\tan\alpha}{۳}}\Rightarrow\tan\alpha=۱$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۹۱ ۱ **۲** ۳ ۴

مثلث قائم‌الزاویهٔ سمت چپ، متساوی‌الساقین بوده و زاویهٔ حادهٔ آن 45° است. طبق شکل داریم:

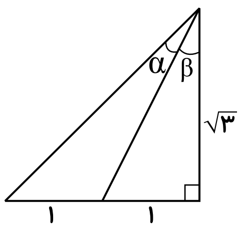


$$\begin{cases}\tan(45^\circ+\alpha)=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{4}{2}=2\\ \tan\alpha=1\end{cases}\Rightarrow \tan\alpha=\tan((45^\circ+\alpha)-45^\circ)$$

$$=\frac{\tan(45^\circ+\alpha)-\tan45^\circ}{1+\tan(45^\circ+\alpha)\tan45^\circ}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{2-1}{1+2\times1}=\frac{1}{3}\Rightarrow\cot\alpha=3$$

توجه طبق شکل $0<\alpha<45^\circ$ است، پس $\cot\alpha>1$ می‌باشد و تنها گزینهٔ (۲) درست است!

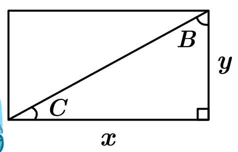
۹۲ ۱ ۲ ۳ **۴**



$$\tan\alpha=\tan((\alpha+\beta)-\beta)=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}{1+\tan((\alpha+\beta)\tan\beta}=\frac{\dfrac{2}{\sqrt3}-\dfrac{1}{\sqrt3}}{1+\dfrac{2}{\sqrt3}\times\dfrac{1}{\sqrt3}}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt3}}{\dfrac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\sqrt3}{5}$$

۹۳ ۱ ۲ ۳ **۴**



قطر مستطیل

$$\tan\widehat{B}=\frac{x}{y}\ ,\ \tan\widehat{C}=\frac{y}{x}$$

$\xrightarrow{\text{طبق فرض}}$ جذر مساحت $=\dfrac{1}{2}\times$ قطر مستطیل

$$\sqrt{xy}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow xy=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=4xy\ \star$$

$$\tan(\widehat{B}-\widehat{C})=\frac{\tan\widehat{B}-\tan\widehat{C}}{1+\tan\widehat{B}\tan\widehat{C}}=\frac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}\times\dfrac{x}{y}}=\frac{\dfrac{x^2-y^2}{xy}}{2}=\frac{x^2-y^2}{2xy}$$

$$\xrightarrow{\star}x^2+y^2+2xy=6xy\Rightarrow(x+y)^2=6xy\Rightarrow x+y=\sqrt{6xy}$$

$$\xrightarrow{\star}x^2+y^2-2xy=2xy\Rightarrow(x-y)^2=2xy\Rightarrow x-y=\sqrt{2xy}$$

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=\sqrt{2xy}\times\sqrt{6xy}=\sqrt{12xy}$$

$$\tan(\widehat{B}-\widehat{C})=\frac{x^2-y^2}{2xy}=\frac{\sqrt{12xy}}{2xy}=\sqrt{3}$$

۹۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha$

ضابطهٔ تابع f را در $\sin^2 3x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x)=16\left(\frac{\overbrace{\sin3x\cos3x}^{\frac{1}{2}\sin6x}\cos6x\cos12x\cos24x}{\sin3x}\right)^2$$

دقت کنید:

$$\sin3x\cos3x=\frac{1}{2}\sin6x$$

$$\sin6x\cos6x=\frac{1}{2}\sin12x$$

$$\sin 12x\cos 12x = \frac{1}{2}\sin 24x$$

$$\sin 24x\cos 24x = \frac{1}{2}\sin 48x$$

$$f(x) = 16\left(\frac{\frac{1}{16}\sin 48x}{\sin 3x}\right)^2$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{36}) = 16\left(\frac{\sin\frac{48\pi}{36}}{16\sin\frac{3\times\pi}{36}}\right)^2 = \frac{\sin^2\frac{4\pi}{3}}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}$$

از طرفی می‌دانیم $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ و $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و البته: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$f(\frac{\pi}{36}) = \frac{\frac{3}{4}}{16(\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2})} = \frac{3}{16(2-\sqrt{3})} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

95 ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا کمی عبارت را ساده کنیم.

دقت کنید که: $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$ و $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin 2\alpha$.

$$\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos\alpha}{\cot(2\alpha)}$$

برای حل سؤال مقادیر $\cos\alpha$، $\sin\alpha$، $\sin 2\alpha$، $\cos 2\alpha$ و $\cot 2\alpha$ را نیاز داریم، که آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$1)\ 1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+(\frac{3}{4})^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$2)\ \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = 1-(-\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \sin\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$3)\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$$

$$4)\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (-\frac{4}{5})^2 - (-\frac{3}{5})^2 = \frac{7}{25}$$

$$5)\ \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

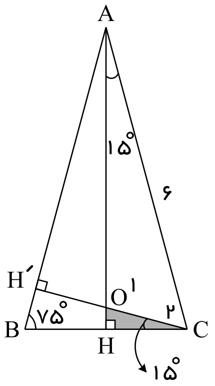
حال خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos\alpha}{\cot(2\alpha)} = \frac{\frac{24}{25}-(-\frac{4}{5})}{\frac{7}{24}} = \frac{44\times 24}{25\times 7} = \frac{1056}{175}$$

96 ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\ ,\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

روش اول: دقت کنید در مثلث $\overset{\triangle}{OHC}$ داریم $\hat{H}=۹۰^\circ, \hat{C}_۱=۱۵^\circ$.



نکته: در مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویهٔ ۱۵°، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

پس $S_{\overset{\triangle}{OHC}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}OC\times OC=\frac{OC^۲}{۸}$.

از طرفی در مثلث $\overset{\triangle}{OAC}$ طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{OC}{\sin ۱۵^\circ}=\frac{AC}{\sin\hat{O}_۱}\Rightarrow\frac{OC}{\sin ۱۵^\circ}=\frac{۶}{\underbrace{\sin ۱۰۵^\circ}_{\cos ۱۵^\circ}}\Rightarrow OC=۶\times\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}=۶\tan ۱۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin^۲ ۱۵^\circ=\dfrac{۱-\cos ۳۰^\circ}{۲}\\ \cos^۲ ۱۵^\circ=\dfrac{۱+\cos ۳۰^\circ}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\tan^۲ ۱۵^\circ=\frac{۱-\cos ۳۰^\circ}{۱+\cos ۳۰^\circ}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{(۲+\sqrt{۳})^۲}=\frac{۱}{۷+۴\sqrt{۳}}$$

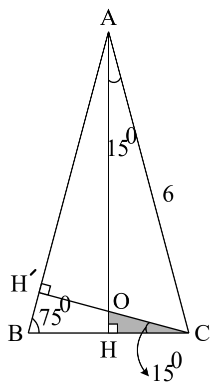
$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OHC}}=\frac{(۶\tan ۱۵^\circ)^۲}{۸}=\frac{۳۶}{۸}\times\frac{۱}{(۷+۴\sqrt{۳})}=\frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$$

* این روش فراتر از کتاب ریاضی تجربی است و مناسب دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی است.

روش دوم:

$$\overset{\triangle}{AHC}:\sin ۱۵^\circ=\frac{HC}{AC}\xrightarrow{AC=۶}HC=۶\sin ۱۵^\circ$$

$$\overset{\triangle}{OHC}:\tan ۱۵^\circ=\frac{OH}{HC}\Rightarrow OH=HC\times\tan ۱۵^\circ$$



$$S_{\overset{\triangle}{OHC}}=\frac{۱}{۲}\times HC\times OH$$
$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OHC}}=\frac{۱}{۲}\times(۶\sin ۱۵^\circ)\times(HC\tan ۱۵^\circ)=\frac{۱}{۲}\times ۳۶\sin^۲ ۱۵^\circ\times\tan ۱۵^\circ$$

می‌دانیم:

$$\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}\Rightarrow\sin^۲ ۱۵^\circ=\frac{۱-\cos ۳۰^\circ}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}$$

از طرفی:

$$\tan^{۲}\alpha=\frac{\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}=\frac{\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}}{\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}}\Rightarrow \tan^{۲}۱۵^{\circ}=\frac{۱-\cos ۳۰^{\circ}}{۱+\cos ۳۰^{\circ}}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{(۲+\sqrt{۳})^{۲}}\Rightarrow \tan ۱۵^{\circ}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$$

پس داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{OHC}}=۱۸(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴})\times\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۹}{۲(۲+\sqrt{۳})^{۲}}=\frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$$

۹۷ ۴ ۳ ۲ **۱** روش اول:

$$f(x)=۳۲(\cos x\cos ۲x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x)^{۲}$$

عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$f(x)=۳۲(\frac{\sin x\cos x\cos ۲x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x}{\sin x})^{۲}$$

$$f(x)=۳۲(\frac{\frac{۱}{۳۲}\sin ۳۲x}{\sin x})^{۲}=\frac{\sin^{۲}۳۲x}{۳۲\sin^{۲}x}=\frac{\sin^{۲}۳۲x}{۱۶(۱-\cos ۲x)}$$

در عبارت قبلی از اتحادهای $۲\sin^{۲}x=۱-\cos ۲x$ و $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$ استفاده کرده‌ایم.

پس داریم: $f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\sin^{۲}\frac{۸\pi}{۳}}{۱۶(۱-\cos\frac{\pi}{۶})}=\frac{\sin^{۲}\frac{۲\pi}{۳}}{۱۶(۱-\cos\frac{\pi}{۶})}=\frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{۳}{۳۲(۲-\sqrt{۳})}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۳۲}=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$

روش دوم: می‌توانیم $\cos ۱۵^{\circ}$ را ابتدا محاسبه کرده و سپس در صورت سؤال قرار دهیم: $(\frac{\pi}{۱۲}=۱۵^{\circ})$

می‌دانیم: $\cos^{۲}x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\Rightarrow \cos^{۲}۱۵^{\circ}=\frac{۱+\cos ۳۰^{\circ}}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}$

پس داریم: $f(\frac{\pi}{۱۲})=۳۲\cos^{۲}۱۵^{\circ}\cos^{۲}۳۰^{\circ}\cos^{۲}۶۰^{\circ}\cos^{۲}۱۲۰^{\circ}\cos^{۲}۲۴۰^{\circ}=۳۲\times(\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴})\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۳۲}$

۹۸ ۴ ۳ **۲** ۱

می‌دانیم:

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}\quad,\quad ۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۱۶}}=\frac{۸}{۱۵}$$

از طرفی:

$$۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۶۴}{۲۲۵}=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\Rightarrow \cos^{۲}\alpha=\frac{۲۲۵}{۲۸۹}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{۱۵}{۱۷}\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{۱-\frac{۲۲۵}{۲۸۹}}=\frac{۸}{۱۷}$$

حال خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{۸}{۱۵}-\frac{۸}{۱۷}}{\frac{۸}{۱۷}-\frac{۱۵}{۱۷}}=\frac{\frac{۸\times۱۷-۸\times۱۵}{۱۵\times۱۷}}{\frac{-۷}{۱۷}}=\frac{\frac{۱۶}{۱۵}}{-۷}=-\frac{۱۶}{۱۰۵}$$

دقت کنید اگر $\frac{\alpha}{۲}$ در ربع اول باشد با توجه به مقدار $\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۴}$، α نیز ربع اول خواهد بود و اگر $\frac{\alpha}{۲}$ در ربع سوم باشد باز هم α در ربع اول خواهد بود.

۹۹ ۴ ۳ ۲ **۱**

قبل از حل سؤال نحوهٔ محاسبهٔ $\sin ۳\alpha$ و اتحاد مثلثاتی آن را بررسی می‌کنیم.

$$\sin(۲\alpha+\alpha)=\sin ۲\alpha\cdot\cos\alpha+\cos ۲\alpha\cdot\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin ۳\alpha=۲\sin\alpha(۱-\sin^{۲}\alpha)+\sin\alpha-۲\sin^{۳}\alpha\Rightarrow \sin ۳\alpha=۳\sin\alpha-۴\sin^{۳}\alpha\Rightarrow \sin ۳\alpha=۲\sin\alpha\cdot\cos^{۲}\alpha+(۱-۲\sin^{۲}\alpha)\sin\alpha$$

حال تابع $(f\alpha)$ را ساده می‌کنیم.

$$f(\alpha)=۴\sin\alpha\cos۲\alpha+۲\sin\alpha=۴\sin\alpha(۱-۲\sin^۲\alpha)+۲\sin\alpha\Rightarrow f(\alpha)=۶\sin\alpha-۸\sin^۳\alpha=۲(۳\sin\alpha-۴\sin^۳\alpha)=۲\sin۳\alpha$$

$$f(\frac{۴۱\pi}{۹})=۲\sin(\frac{۴۱\pi}{۳})=۲\sin(\frac{۳۶\pi+۵\pi}{۳})=۲\sin(۱۲\pi+\frac{۵\pi}{۳})=۲\sin\frac{۵\pi}{۳}=۲\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=-۲\sin\frac{\pi}{۳}=-۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=-\sqrt{۳}$$

۱۰۰ (۴) **(۳)** (۲) (۱) راه‌حل اول:

مخرج مشترک گرفته و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}+\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^۲\theta+(۱-\cos^۲\theta)}{(۱-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{۲\sin^۲\theta}{(۱-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{۲\sin\theta}{۱-\cos\theta}=\frac{۲\times۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}{۲\sin^۲\frac{\theta}{۲}}=۲\cot\frac{\theta}{۲}$$

راه‌حل دوم:

$$\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}+\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}{۲\sin^۲\frac{\theta}{۲}}+\frac{۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}}{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}=\cot\frac{\theta}{۲}+\cot\frac{\theta}{۲}=۲\cot\frac{\theta}{۲}$$

۱۰۱ (۴) **(۳)** (۲) (۱)

$$۱۰(\sin x+\cos x)=۶\sqrt{۵}\Rightarrow\sin x+\cos x=\frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$$

طرفین تساوی فوق را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲=\frac{۹\times۵}{۲۵}\Rightarrow\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۹}{۵}\Rightarrow۱+\sin۲\alpha=\frac{۹}{۵}\Rightarrow\sin۲\alpha=\frac{۴}{۵}$$

حال از رابطهٔ $\sin۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow۴+۴\tan^۲\alpha=۱۰\tan\alpha\Rightarrow۴\tan^۲\alpha-۱۰\tan\alpha+۴=۰\Rightarrow۲\tan^۲\alpha-۵\tan\alpha+۲=۰$$

$$\Delta=۲۵-۴\times۲\times۲=۹\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۵\pm۳}{۴}\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=۲\\ \tan\alpha=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

۱۰۲ (۴) (۳) **(۲)** (۱) با توجه به فرض سؤال داریم:

$$A=B+۴۵^\circ, A+B+C=۱۸۰^\circ\Rightarrow B+۴۵^\circ+B+C=۱۸۰^\circ\Rightarrow C=۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۲B)$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$۲\cos A\sin B-\sin C=۲\cos(B+۴۵^\circ)\sin B-\sin(۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۲B))=$$
$$۲(\cos B\cos۴۵^\circ-\sin B\sin۴۵^\circ)\sin B-\sin(۴۵^\circ+۲B)=$$
$$۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos B-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin B)\sin B-\sin۴۵^\circ\cos۲B-\cos۴۵^\circ\sin۲B=$$
$$\sqrt{۲}\sin B\cos B-\sqrt{۲}\sin^۲B-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos۲B-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin۲B=$$
$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin۲B-\sqrt{۲}(\frac{۱-\cos۲B}{۲})-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos۲B-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin۲B=$$
$$-\sqrt{۲}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos۲B)-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos۲B=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos۲B-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos۲B=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۰۳ **(۴)** (۳) (۲) (۱) از رابطهٔ داده شده، مقدار $\sin x$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}=۴\Rightarrow۴+۴\sin x=۱-\sin x\Rightarrow۵\sin x=-۳\Rightarrow\sin x=\frac{-۳}{۵}$$

$$\cos^۲x=۱-\sin^۲x=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{۴}{۵}\xrightarrow{x\text{ ناحیهٔ ۳}}\cos x=\frac{-۴}{۵}$$

حاصل $\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}$ را می‌یابیم.

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=\tan^2(\frac{x}{2})\Rightarrow \tan^2(\frac{x}{2})=\frac{1-(-\frac{4}{5})}{1+(-\frac{4}{5})}\Rightarrow \tan^2(\frac{x}{2})=\frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}}=9\Rightarrow \tan(\frac{x}{2})=\pm 3$$

$$\pi<x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$$

$\frac{x}{2}$ زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم است و در این ناحیه مقدار تانژانت منفی است، پس:

$$\tan(\frac{x}{2})=-3$$

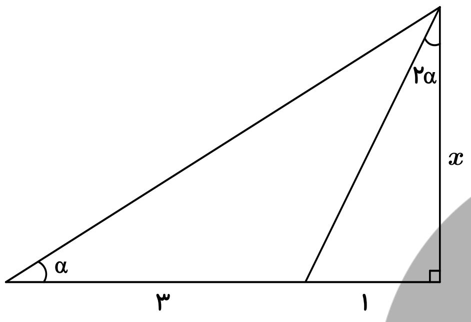
۱۰۴ ۱ ۲ **۳** ۴ طبق فرض داریم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \cos x-\sin x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 1-2\underbrace{\sin x\cos x}_{\sin 2x}=\frac{2}{3}\Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} m\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-3\sqrt{6}\times\frac{1}{3}=\sqrt{60}\Rightarrow m\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}\Rightarrow m=6$$

۱۰۵ ۱ ۲ ۳ **۴**



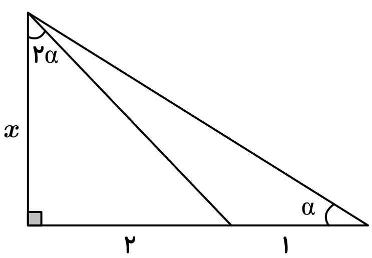
$$\tan\alpha=\frac{x}{4}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{1}{x}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\Rightarrow \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{16}}=\frac{8x}{16-x^2}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

$$\cos 2\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{4}{5}$$

۱۰۶ ۱ **۲** ۳ ۴ می‌دانیم $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-2\tan^2\alpha}$.



$$\tan 2\alpha=\frac{2}{x}\ ,\ \tan\alpha=\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x}=\frac{2\times\frac{x}{3}}{1-(\frac{x}{3})^2}\Rightarrow 1-\frac{x^2}{9}=\frac{x^2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}=x^2\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha=\frac{3}{x}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$$

۱۰۷ **۱** ۲ ۳ ۴ **روش اول:** تابع را ساده‌تر می‌کنیم.

$$f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)=\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}-\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}=\frac{\sin^2\pi x-\cos^2\pi x}{\sin\pi x\cos\pi x}$$

$$f(x)=\frac{-(\cos^{۲}\pi x-\sin^{۲}\pi x)}{\sin\pi x\cos\pi x}=\frac{-\cos ۲\pi x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\pi x}=-۲\cot ۲\pi x$$

$$T=\frac{\pi}{۲\pi}=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم:

با توجه به اتحاد $\tan\alpha-\cot\alpha=-۲\cot\alpha$ به‌راحتی حل می‌شود.

$$\tan(\pi x)-\cot(\pi x)=-۲\cot ۲\pi x$$

$$T=\frac{\pi}{۲\pi}=\frac{۱}{۲}$$

۱۰۸ ۴ ۳ ۲ ۱ تابع زوج و فرد حذف شده!

نمودار تابع نسبت به خط $x=۱$ متقارن است؛ پس:

$$f(۲-x)=f(x)$$

نمودار تابع نسبت به خط $x=۳$ متقارن است؛ پس:

$$f(۶-x)=f(x)$$

در رابطهٔ دوم به جای x قرار می‌دهیم: $x+۴$:

$$f(۶-(x+۴))=f(x+۴)\Rightarrow f(۲-x)=f(x+۴)$$

از طرفی $f(۲-x)=f(x)$، پس $f(x+۴)=f(x)$؛ بنابراین $t=۴$ دورهٔ تناوب است. حال بررسی می‌کنیم آیا $t=۲$ هم دورهٔ تناوب است. در رابطهٔ اول به جای x قرار می‌دهیم $x+۲$:

$$f(۲-(x+۲))=f(x+۲)\Rightarrow f(x+۲)=f(-x)$$

و دلیلی نداریم که $f(-x)=f(x)$، پس $t=۴$ کوچک‌ترین دورهٔ تناوب است.

۱۰۹ ۴ ۳ ۲ ۱ می‌دانیم در تابع $y=a\sin bx+c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a|+c$ است.

$$Max=\sqrt{۳}\rightarrow |b|+a=\sqrt{۳}\xrightarrow[\text{است، } b>0 \text{ است.}]{\text{چون شکل فرمت خود سینوس}} b+a=\sqrt{۳}$$

نقطهٔ $(\pi,-\frac{۳}{۲})$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\left|\begin{matrix}\pi\\ -\frac{۳}{۲}\end{matrix}\right.\rightarrow -\frac{۳}{۲}=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})\rightarrow -\frac{۳}{۲}=a-b\sin\frac{\pi}{۳}\rightarrow -\frac{۳}{۲}=a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b\rightarrow -۳=۲a-\sqrt{۳}b$$

$$-۲\begin{cases}b+a=\sqrt{۳}\\ ۲a-\sqrt{۳}b=-۳\end{cases}\rightarrow -۲b-\sqrt{۳}b=-۲\sqrt{۳}-۳\rightarrow ۲b+\sqrt{۳}b=۲\sqrt{۳}+۳$$

$$\rightarrow(۲+\sqrt{۳})b=۲\sqrt{۳}+۳\rightarrow b=\frac{۲\sqrt{۳}+۳}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۴\sqrt{۳}-۶+۶-۳\sqrt{۳}}{۴-۳}=\sqrt{۳}$$

۱۱۰ ۴ ۳ ۲ ۱

می‌دانیم:

$$y=\sin bx\rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}\quad,\quad \sin x\cdot\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$y=۱+a\cdot\sin bx\cdot\cos bx=۱+\frac{a}{۲}\cdot\sin ۲bx$$

چون فاصلهٔ دو نقطهٔ مینیمم متوالی برابر با دورهٔ تناوب اصلی منحنی است پس:

$$T=\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})=\pi$$

$$T=\frac{۲\pi}{|۲b|}=\frac{\pi}{|b|}\Rightarrow\frac{\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow|b|=۱\Rightarrow b=\pm۱$$

$$y=۱+\frac{a}{۲}\cdot\sin ۲bx\xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}}۱+|\frac{a}{۲}|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow|a|=۱\Rightarrow a=\pm۱$$

تابع دراطراف $x=0$ صعودی است، پس a و b هم‌علامتند و داریم:

$a+b=۲$ یا $a+b=-۲$

۱۱۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$$y=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=a+b\sin x$$

نقطه $(-\frac{۵\pi}{۶},۰)$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\left|\begin{matrix}\frac{-۵\pi}{۶}\\ ۰\end{matrix}\right. \to ۰=a+b\sin(\frac{-۵\pi}{۶})\to ۰=a-b\sin(\frac{۵\pi}{۶})$$

$$\to ۰=a-b\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})\to ۰=a-b\sin(\frac{\pi}{۶})\to a-\frac{b}{۲}=۰ \quad (I)$$

در تابع $y=a\sin bx+c$ مقدار Max تابع از رابطهٔ $|a|+c$ به دست می‌آید و چون تابع داده‌شده فرمت سینوس را دارد $ab>۰$ است و چون $y(۰)>۰$ است پس $a>۰$ است و در نتیجه $b>۰$ است.

$$Max=|a|+c\to ۳=|b|+a\to ۳=b+a \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) مقادیر $a=۱$ و $b=۲$ حاصل می‌شوند.

پس: $f(x)=۱+۲\sin x\to f(\frac{\pi}{۶})=۱+۲(\frac{۱}{۲})=۲$

۱۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴

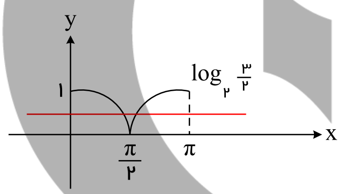
$$y=۲^{|\sin x|}\xrightarrow{\frac{\pi}{۲}\text{ به راست}}y=۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|}=۲^{|\cos x|}\xrightarrow{\frac{۳}{۲}\text{ به پایین}}\Rightarrow y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{y=۰}۲^{|\cos x|}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \log_۲\frac{۳}{۲}=|\cos x|$$

$\log_۲\frac{۳}{۲}$ در واقع عدد بین صفر تا یک است؛ زیرا:

$$\underbrace{\log_۲ ۱}_{\text{صفر}}<\log_۲\frac{۳}{۲}<\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱}$$

حال تابع $y=|\cos x|$ و خط $y=log_۲\frac{۳}{۲}$ را رسم می‌کنیم.

خط و نمودار در دو نقطه تقاطع دارند.



۱۱۳ ۱ ۲ **۳** ۴ از روی نمودار، مشخص است که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع برابر ۱ است، پس داریم:

$y=c+a\cos bx$

$$\left.\begin{matrix}max=|a|+c=۵\\ min=-|a|+c=۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=۶\Rightarrow c=۳$$

۱۱۴ **۱** ۲ ۳ ۴ با توجه به نمودار و اینکه $۰<c<\pi, b>۰$ مشخص است که a مثبت است.

$$\max=|a|=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{a>۰}a=\frac{۱}{۴}\to f(x)=\frac{۱}{۴}\cos(bx+c)$$

نقطهٔ $A(\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۴})$ در تابع صدق می‌کند:

$$\frac{۱}{۴}\cos(\frac{۳}{۴}b+c)=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos(\frac{۳b}{۴}+c)=-۱\Rightarrow\frac{۳b}{۴}+c=\pi$$

همچنین در $x=\frac{۵}{۴}$ مقدار تابع برابر صفر است.

$$f(\frac{۵}{۴})=۰\Rightarrow\frac{۱}{۴}\cos(\frac{۵}{۴}b+c)=۰\Rightarrow\cos(\frac{۵}{۴}b+c)=۰$$

با توجه به نمودار در $x=\frac{۵}{۴}$ دومین بار است که نمودار تابع محور xها را قطع می‌کند، پس داریم: $\frac{۵}{۴}b+c=\frac{۳\pi}{۲}$ و حال دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3}{4}b + c = \pi \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} \frac{5}{4}b - \frac{3}{4}b = \frac{3\pi}{2} - \pi \Rightarrow \frac{2}{4}b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \pi$$

$$\frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{b=\pi} c = \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{a \cdot c}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$

۱۱۵ (گزینهٔ ۴) با توجه به نمودار، ماکزیمم تابع برابر $\frac{5}{2}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است، پس:

$$\left.\begin{matrix} c + |a| = \frac{5}{2} \\ c - |a| = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2c = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow 1 + |a| = \frac{5}{2} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2}$$

چون نمودار در شکل برخورد با محور yها دارای مینیمم است، پس a منفی است.

$$|a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a<0} a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a \cdot c = -\frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}$$

۱۱۶ (گزینهٔ ۳) برای رسم نمودار داده‌شده، نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت راست می‌بریم، سپس طول نقاط را بر c تقسیم کرده و در ادامه، عرض نقاط را در b ضرب و با a جمع می‌کنیم.

با مقایسهٔ نمودار داده‌شده و نمودار $y = \cos x$ نتیجه می‌گیریم که b و c هر دو مثبت‌اند و داریم:

$$\begin{cases} (0\,,\,0) \in \text{نمودار} \Rightarrow a + b\cos(\frac{-\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (1) \\ y_{max} = a + |b| = 1 \xrightarrow{b>0} a + b = 1 \quad (2) \end{cases}$$

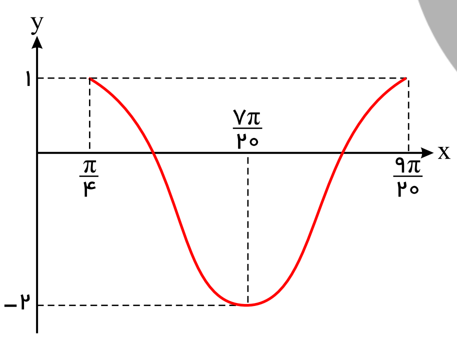
$$\xrightarrow{(1)\,,\,(2)} a = -1\,,\; b = 2$$

چون فاصلهٔ بین دو Min و دو Max متوالی یا یک دورهٔ تناوب است، پس دورهٔ تناوب تابع هم برابر $2\pi = (\frac{-2x}{3}) - \frac{4\pi}{3}$ است، پس:

$$\frac{2\pi}{|c|} = 2\pi \xrightarrow{c>0} c = 1$$

$$\text{عبارت مورد نظر}:\; b(c-a) = 2(1-(-1)) = 4$$

۱۱۷ (گزینهٔ ۱)



$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = \pm 5 \Rightarrow b = 5$$

$$\left.\begin{matrix} f(\frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow a\cos^2(5\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + c = 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ f(\frac{7\pi}{20}) = -2 \Rightarrow a\cos^2(5 \times \frac{7\pi}{20} - \frac{\pi}{4}) + c = -2 \Rightarrow c = -2 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow a = 3 \qquad \Rightarrow ab = 15$$

۱۱۸ (گزینهٔ ۴) ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + b\sin(cx - \frac{3\pi}{4})\cos(cx - \frac{3\pi}{4})$$

$$\Rightarrow fx = a + \frac{b}{2}\sin(2cx - \frac{3x}{2}) = a + \frac{b}{2}\cos(2cx)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق نمودار}} \begin{cases} a - |\frac{b}{2}| = 1 \\ a + |\frac{b}{2}| = 3 \end{cases} \to a = 1 \xrightarrow{f(0)=-1} -1 = 1 + \frac{b}{2} \Rightarrow b = -4$$

مقدار c را هم از دورهٔ تناوب تابع به دست می‌آوریم:

$$\frac{۲\pi}{|۲c|} = \pi \Rightarrow |c| = ۱ \Rightarrow c = \pm ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ - ۲\cos ۲x \xrightarrow{\text{صفرهای } f} ۱ - ۲\cos ۲x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{۰\le x\le} \begin{cases} ۲x_۱ = \frac{\pi}{۳} \\ ۲x_۲ = \frac{۵x}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۲ = \frac{۵\pi}{۶} \\ x_۱ = \frac{\pi}{۶} \end{cases} \rightarrow x_۲ - x_۱ = \frac{۴\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳}$$

۱۱۹ (۱) **(۲)** (۳) (۴) با استفاده از روابط مثلثاتی $\frac{۱}{۱+\tan^۲ x} = \cos^۲ x$ و $\cos^۲ x = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\cos ۲x$ داریم:

$$f(x) = \frac{۲}{a} - \frac{b}{۱+\tan^۲((cx - \frac{۳\pi}{۴})} = \frac{۲}{a} - b\cos^۲(cx - \frac{۳\pi}{۴}) = \frac{۲}{a} - b(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\cos ۲(cx - \frac{۳\pi}{۴}))$$

$$f(x) = \frac{-b}{۲}\sin ۲cx + \frac{۲}{a} - \frac{b}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{b}{۲}\sin(-۲cx) + \frac{۲}{a} - \frac{b}{۲} \xrightarrow[\text{صعودی شروع شده}]{\text{سینوس به شکل درست}} \begin{cases} b > ۰ \\ -۲c > ۰ \Rightarrow c < ۰ \end{cases}$$

$$T = \frac{۲\pi}{|۲c|} = ۹\pi \Rightarrow |c| = \frac{۱}{۹} \xrightarrow{c<۰} c = -\frac{۱}{۹}\ ;\ y_{max} = \left|\frac{-b}{۲}\right| + \frac{۲}{a} - \frac{b}{۲} = ۶ \xrightarrow{b>۰} \frac{۲}{a} = ۶ \Rightarrow a = \frac{۱}{۳}\ (۱)$$

$$y_{min} = -\left|\frac{-b}{۲}\right| + \frac{۲}{a} - \frac{b}{۲} = ۰ \xrightarrow{b>۰} -b + \frac{۲}{a} = ۰ \xrightarrow{(۱)} b = ۶$$

$$f(x) = ۳\sin(\frac{۲}{۹}x) + ۳ \rightarrow f(\frac{۳\pi}{۴}) = ۳\sin(\frac{۲}{۹} \times \frac{۳\pi}{۴}) + ۳ \rightarrow f(\frac{۳\pi}{۴} = ۴/۵)$$

۱۲۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)** می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{۱}{۲}\sin ۲a$ است.

$$۴\sin x \cdot \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱ \rightarrow -۴\sin x\cos x = ۱ \rightarrow -۴(\frac{۱}{۲}\sin ۲x) = ۱ \rightarrow -۲\sin ۲x = ۱ \rightarrow \sin ۲x = -\frac{۱}{۲} = \sin(\frac{-\pi}{۶})$$

$$\xrightarrow{\sin x=\sin\alpha \rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\alpha \\ x=۲k\pi+\pi-\alpha \end{cases}} \begin{cases} ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \\ ۲x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \rightarrow x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{به } k \text{ عدد می‌دهیم.}} x = \frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۱۱\pi}{۱۲}, \frac{۱۹\pi}{۱۲}, \frac{۲۳\pi}{۱۲} \xrightarrow{\text{مجموع جواب‌ها}} \frac{۶۰\pi}{۱۲} = ۵\pi$$

۱۲۱ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x \quad , \quad \sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴})$$

$$\sin^۳ x + \cos^۳ x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

به کمک اتحاد $a^۳ + b^۳ = (a+b)(a^۲ - ab + b^۲)$ عبارت $\sin^۳ x + \cos^۳ x$ را تجزیه می‌کنیم.

$$(\sin x + \cos x) \cdot (\sin^۲ x - \sin x \cdot \cos x + \cos^۲ x) = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x) = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x) - (۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x) = ۰$$

$$(۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x) \cdot (\sin x + \cos x - ۱) = ۰$$

$$\begin{cases} ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x = ۰ \Rightarrow \sin ۲x = ۲ \quad \text{غق} \\ \sin x + \cos x = ۱ \Rightarrow \sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = ۱ \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi\Rightarrow x=۰,۲\pi \\ x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

جمع $=۰+\frac{\pi}{۲}+۲\pi=\frac{۵\pi}{۲}$

۱۲۲ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم $\sin^۴ a+\cos^۴ a=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲a$ است.

$$۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin^۲ ۲x=۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \sin ۲x=۱\xrightarrow{\text{حالت خاص}}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴} \\ \sin ۲x=-۱\xrightarrow{\text{حالت خاص}}۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}\end{cases}$$

مجموع جواب‌ها $=\frac{\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}+\frac{۳\pi}{۴}+\frac{۷\pi}{۴}=\frac{۱۶\pi}{۴}=۴\pi$

۱۲۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\cos ۳x+\cos x=۰\to\cos ۳x=-\cos x\to\cos ۳x=\cos(\pi-x)$$

$$\xrightarrow{\cos x=\cos\alpha\to x=۲k\pi\pm\alpha}\begin{cases} ۳x=۲k\pi+\pi-x\to ۴x=۲k\pi+\pi\to x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \\ ۳x=۲k\pi-\pi+x\to ۲x=۲k\pi-\pi\to x=k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

توجه کنید چون $\cos x\neq ۰$ است پس جواب $x=k\pi-\frac{\pi}{۲}$ قابل قبول نمی‌باشد.

۱۲۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\tan ۳x\cdot\tan x=۱\to\tan ۳x=\frac{۱}{\tan x}\to\tan ۳x=\cot x\to\tan ۳x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)\xrightarrow{\tan x=\tan\alpha\to x=k\pi+\alpha}۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x\to ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$\to x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}\to$

k	۴	۵	۶	۷
x	$\frac{۹\pi}{۸}$	$\frac{۱۱\pi}{۸}$	$\frac{۱۳\pi}{۸}$	$\frac{۱۵\pi}{۸}$

$\to$ مجموع جواب‌ها $=\frac{۴۸\pi}{۸}=۶\pi$

۱۲۵ **۱** ۲ ۳ ۴ راه اول:

می‌دانیم:

$$\boxed{\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})+\cos(x+\frac{\pi}{۳})=\cos ۲x\to\sin x\cdot(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+\cos x\cdot(\frac{۱}{۲})+\cos x\cdot(\frac{۱}{۲})-\sin x\cdot(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\cos ۲x\ \cos x=\cos ۲x\to ۲x=۲k\pi\pm x$$

$$\to\begin{cases} ۲x=۲k\pi+x\to x=۲k\pi \\ ۲x=۲k\pi-x\to x=\frac{۲k\pi}{۳}\end{cases}$$

جواب‌های $x=۲k\pi$ توسط $x=\frac{۲k\pi}{۳}$ نیز تولید می‌شوند، پس جواب کلی $x=\frac{۲k\pi}{۳}$ است.

راه دوم: این تست با عددگذاری نیز حل می‌شود. $x=۰$ در معادله صدق می‌کند $(\sin\frac{\pi}{۶}+\cos\frac{\pi}{۳}=\cos ۰)$ بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند. $x=\frac{\pi}{۳}$ در معادله صدق نمی‌کند $(\sin\frac{\pi}{۲}+\cos\frac{۲\pi}{۳}\neq\cos\frac{۲\pi}{۳})$ بنابراین گزینهٔ دوم نیز حذف می‌شود و جواب گزینهٔ اول یعنی $x=\frac{۲k\pi}{۳}$ است.

۱۲۶ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم $\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x$ پس داریم:

$$۱-\sin^۲ x-\sin^۲ x\cos ۳x=۱\Rightarrow\sin^۲ x\cos ۳x+\sin^۲ x=۰$$

$$\sin^2 x(\cos 3x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=0,\pi,2\pi \\ \cos 3x=-1 \Rightarrow 3x=2k\pi+\pi \end{cases} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3} \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}$$

معادلهٔ دوم نیز سه جواب دارد $(\frac{5\pi}{3}$ ،π و $\frac{\pi}{3})$ اما جواب π در هر دو معادله به دست آمد و تکراری است. پس در کل معادلهٔ فوق ۵ جواب $(0,\pi,2\pi,\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$ را خواهد داشت.

۱۲۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

می‌دانیم:

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha \quad , \quad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)(1+\cos 8\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha\times 2\cos^2 2\alpha\times 2\cos^2 4\alpha=\frac{1}{8}\Rightarrow \cos^2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha\cdot\cos^2 4\alpha=\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cos 4\alpha=\pm\frac{1}{8}\xrightarrow[\alpha\neq k\pi]{\times\sin\alpha}\underbrace{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha=\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 4\alpha}\cdot\cos 4\alpha=\frac{1}{4}\underbrace{\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 8\alpha}$$

$$=\frac{1}{8}\sin 8\alpha=\pm\frac{1}{8}\sin\alpha\Rightarrow\sin 8\alpha=\pm\sin\alpha$$

$$(1)\ \sin 8\alpha=\sin\alpha\Rightarrow\begin{cases}8\alpha=2k\pi+\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{2k\pi}{7}\Rightarrow max:\frac{6\pi}{7}\\ 8\alpha=2k\pi+\pi-\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{2k\pi}{9}+\frac{\pi}{9}\Rightarrow max:\frac{7\pi}{9}\end{cases}$$

$$(2)\ \sin 8\alpha=-\sin\alpha\Rightarrow\sin 8\alpha=\sin(-\alpha)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}8\alpha=2k\pi-\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{2k\pi}{9}\Rightarrow max=\frac{8\pi}{9}\\ 8\alpha=2k\pi+\pi+\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{2k\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\Rightarrow max=\frac{5\pi}{7}\end{cases}$$

* البته دقت کنید که $\alpha=\pi$ جواب قابل‌قبول برای معادله نیست. پس ماکزیمم جواب‌ها $\frac{8\pi}{9}$ است.

۱۲۸ (۱) **(۲)** (۳) (۴) می‌دانیم $\cos 2x=1-2\sin^2 x$، پس می‌توان نوشت:

$$2\sin x(1-2\sin^2 x)+\sin x=1\Rightarrow 3\sin x-4\sin^3 x=1$$

سمت چپ معادله برابر $\sin 3x$ است، پس:

$$\sin 3x=1\Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\xrightarrow{0\le x\le 2\pi}x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{9\pi}{6}$$

بنابراین مجموع این سه ریشه برابر $\frac{5\pi}{2}=\frac{15\pi}{6}$ است.

۱۲۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}\times 2\cos^2\alpha\times 2\cos^2 2\alpha=\frac{1}{8}\Rightarrow 64\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha=1\Rightarrow 8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos 2\alpha=\pm 1$$

دو طرف را در $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$ ضرب می‌کنیم:

$$4\underbrace{(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2})}_{\sin\alpha}\cos\alpha\cos 2\alpha=\pm\sin\frac{\alpha}{2}\Rightarrow 2\underbrace{(2\sin\alpha\cos\alpha)}_{\sin 2\alpha}\cos 2\alpha=\pm\sin\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\sin 4\alpha=\sin(\pm\frac{\alpha}{2})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4\alpha=2k\pi\pm\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{7}{2}\alpha=2k\pi\\ \frac{9}{2}\alpha=2k\pi\end{cases}\\ 4\alpha=(2k+1)\pi\mp\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{9}{2}\alpha=(2k+1)\pi\\ \frac{7}{2}\alpha=(2k+1)\pi\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{7}{2}\alpha=k\pi\\ \frac{9}{2}\alpha=k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2k\pi}{7}\\ \alpha=\frac{2k\pi}{9}\end{cases}$$

باید $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$؛ یعنی $\alpha\neq 2k\pi$، پس ریشه‌ها در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ عبارتند از:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \cdots, \frac{12\pi}{7} & \text{۶ جواب} \\ \alpha = \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \cdots, \frac{16\pi}{9} & \text{۸ جواب} \end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[0\,,\,2\pi]$، ۱۴ جواب دارد.

۱۳۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$8\cos x - \tan^2 x = 1 \Rightarrow 8\cos x = 1 + \tan^2 x$$

با استفاده از رابطهٔ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$8\cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 8\cos^3 x = 1 \xrightarrow{\text{فرجه } 3} 2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{0 \le x \le 2\pi} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای ۲ جواب است.

۱۳۱ ۱ ۲ **۳** ۴ در معادلهٔ $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ به‌جای $\sqrt{3}$، $\tan\frac{\pi}{3}$ را قرار داده و داریم:

$$\sin x + \tan\frac{\pi}{3}\cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos x}{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\times \cos\frac{\pi}{3}} \sin x\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \to x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi, 2\pi]$ عبارتند از:

$$x = -\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$$

مجموع جواب‌ها : $-\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{23\pi}{12} = \frac{27\pi}{12} = \frac{9\pi}{4}$

۱۳۲ ۱ **۲** ۳ ۴ با استفاده از رابطهٔ $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ داریم:

$$\sin(x + \frac{\pi}{6})\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{6}))\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6})\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{3} - x)\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$، پس:

$$\cos(x - \frac{\pi}{3})\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow \cos^2(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \pm 1$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0, 2\pi]$ عبارتند از:

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$$

۱۳۳ ۱ **۲** ۳ ۴ با استفاده از رابطهٔ $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ عبارت $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ را به‌صورت زیر نوشته و در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{4})) = \cos(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$$

طبق رابطهٔ (۱) داریم:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{4}) \quad (1)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \xrightarrow{(1)} \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \pm 1$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \to x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi\Rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$$

$$0\le x\le 2\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}=\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

۱۳۴ ۴ ۳ **۲** ۱ طبق فرض داریم:

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}\Rightarrow \cos^2 x=(1+\sin x)^2$$

$$\Rightarrow 1-\sin^2 x=1+\sin^2 x+2\sin x\Rightarrow 2\sin^2 x+2\sin x=0$$

$$\Rightarrow 2\sin x(\sin x+1)=0\Rightarrow \begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\\ 1+\sin x=0 \quad \text{(چرا؟) غ ق ق}\end{cases}$$

جواب‌های معادله به‌صورت $k\pi$ هستند که فاصلهٔ هر دو جواب متوالی π است.

۱۳۵ **۴** ۳ ۲ ۱ می‌دانیم: $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

سمت چپ معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\begin{cases}\cos(\frac{17\pi}{8}+x)=\cos(2\pi+\frac{\pi}{8}+x)=\cos(x+\frac{\pi}{8})\\ \cos(\frac{3\pi}{8}-x)=\cos(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{8}+x))=\sin(x+\frac{\pi}{8})\end{cases}$$

$$\text{معادله}:\ \cos(x+\frac{\pi}{8})\sin(x+\frac{\pi}{8})=(\frac{1}{2})^2\Rightarrow\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{24}\xrightarrow{x\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}x_1=\frac{-\pi}{24}\\ 2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{24}\xrightarrow{x\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}x_2=\frac{7\pi}{24}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{6\pi}{24}=\frac{\pi}{4}$$

۱۳۶ **۴** ۳ ۲ ۱

$$\Rightarrow\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+2x)}+\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+4x)}=0\Rightarrow\frac{-\sin 4x+\cos 2x}{(\cos 2x)(-\sin 4x)}=0\Rightarrow\sin 4x=\cos 2x$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x=\cos 2x\Rightarrow\cos 2x(2\sin 2x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos 2x=0\Rightarrow \text{غ ق ق}\\ \sin 2x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{6},\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{12},\ x=k\pi+\frac{5\pi}{12}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{12}\\ x_2=\frac{5\pi}{12}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

$$\tan(2\alpha)=\tan(\frac{2\pi}{3})=-\sqrt{3}$$

۱۳۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sin(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{۶}-\cos x\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow$$

$$\sin x\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\cos x\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\xrightarrow{\times ۲\sqrt{۳}}۳\sin x-\sqrt{۳}\cos x=۲\quad(۱)$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\sin^۲(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\cos^۲(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۲}{۳}\ ;\ \cos^۲(x-\frac{\pi}{۶})-\sin^۲(x-\frac{\pi}{۶})=\cos(۲x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۳}$$

$$\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})=\sin(۲x+\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳})=\cos(۲x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۳}\quad(۲)$$

$$۳\sin x-\sqrt{۳}\cos x+m\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})=۱\xrightarrow{(۱),(۲)}۲+m\times\frac{۱}{۳}=۱\to m=-۳$$

۱۳۸ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم:

$$\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$$
$$(۱-۲\sin^۲ x)+\sin^۲ x=۰\Rightarrow\sin^۲ x=۱\Rightarrow\sin x=\pm ۱\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

k	۰	-۱	-۲	-۳
x	$\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{۳\pi}{۲}$	$-\frac{۵\pi}{۲}$

جواب‌های بازهٔ $[-۳\pi,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۲},-\frac{\pi}{۲},-\frac{۳\pi}{۲},-\frac{۵\pi}{۲}$ که مجموع آنها برابر -۴π است.

۱۳۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})=-\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{۳\pi}{۴}-x)$$

$$۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi\pm(\frac{۳\pi}{۴}-x)\xrightarrow{-\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲}}x=\frac{\pi}{۳},-\frac{\pi}{۳},-\frac{\pi}{۲}$$

۱۴۰ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\cos(x-\frac{\pi}{۳})+\cos(\frac{\pi}{۶}-x)=۰$$
$$\Rightarrow\cos x\cos\frac{\pi}{۳}+\sin x\sin\frac{\pi}{۳}+\cos x\cos\frac{\pi}{۶}+\sin x\sin\frac{\pi}{۶}=۰$$
$$\Rightarrow\cos x(\cos\frac{\pi}{۳}+\cos\frac{\pi}{۶})+\sin x(\sin\frac{\pi}{۳}+\sin\frac{\pi}{۶})=۰$$
$$\Rightarrow\cos x+\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}$$
$$x\in(۰,۲\pi)\to x=\frac{۳\pi}{۴},\ \frac{۷\pi}{۴}\xrightarrow{\text{مجموع}}\frac{۵\pi}{۲}$$

۱۴۱ **۱** ۲ ۳ ۴ در صورتی بازه برای یک عدد همسایگی محسوب می‌شود که آن عدد درون بازه باشد. پس:

$$x+۱<۳<۲x-۱\Rightarrow\begin{cases}x+۱<۳\to x<۲\\ ۲x-۱>۳\to x>۲\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\varnothing$$

۱۴۲ **۱** ۲ ۳ ۴ تابع سینوس در ربع اول افزایش می‌یابد پس $\sin\frac{\pi^-}{۶}=(\frac{۱}{۲})^-$ داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}[۲\sin x-۱]=[۲(\frac{۱}{۲})^- -۱]=[۱^- -۱]=[۰^-]=-۱$$

۱۴۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$$f(x)=x(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳}{x}=\lim_{x\to ۰}(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳=(\sqrt{\frac{۱}{۹}})^۳=(\frac{۱}{۳})^۳=\frac{۱}{۲۷}$$

۱۴۴ ۱ **۲** ۳ ۴ اگر $x\to ۲^+$، حاصل $[x^۳]$ دقیقاً برابر ۸ است و داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۲}{x^۲+۲x+۴}=\frac{۴}{۴+۴+۴}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)** در $a \to -1^+$ عبارت $x+1$ مثبت است، از طرفی در مورد $[x]$ و $[-x]$ داریم:

$$[x] = [(-1)^+] = -1 \quad [-x] = [-(-1)^+] = [1^-] = 0 \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{|x+1|+[x]}{x-[-x]} = \lim_{x\to -1^+} \frac{|x+1|+(-1)}{x-0} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x} = 1$$

۱۴۶ **(۱)** (۲) (۳) (۴) طبق فرض، تابع $f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$ در نقطه‌ای حد دارد ولی در آن نقطه پیوسته نیست؛ این نقطه اولاً $x=1$ بوده و ثانیاً $x=1$ ریشهٔ صورت f نیز هست، پس:

$$x^2+ax+b \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 1+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1 \, (I)$$

همچنین $x=1$ ریشهٔ معادلهٔ داده‌شده است:

$$5x^2-ax+b \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 5-a+b=0 \Rightarrow a-b=5 \, (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} a+b=-1 \\ a-b=5 \end{cases} \Rightarrow a=2 \,,\, b=-3$$

$$\left[\frac{b-2a}{3}\right] = \left[\frac{-3-4}{3}\right] = \left[\frac{-7}{3}\right] = -3$$

۱۴۷ **(۱)** (۲) (۳) (۴) حدود چپ و راست تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x^2-[x^2]} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-[x^2]} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

پس مجموع حدها برابر $\frac{1}{4}$ است.

۱۴۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴) **روش اول:**

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $\left((a+b)(a^2+b^2-ab) = a^3+b^3\right)$

$$\lim_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})} \times \frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to -8} \frac{(x+8)(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6(8+x)}$$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6} = \frac{-6(12)}{6} = -12$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to -8} \frac{2x+10}{6\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)} = \frac{-6}{6\left(\frac{1}{12}\right)} = -12$$

۱۴۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)** **روش اول:**

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $\left((a-b)(a^2+b^2+ab) = a^3-b^3\right)$ و مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x-2$ تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16} \times \frac{4+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}}{4+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}} = \lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{8-(3x+2)}^{-3x+6}}{(x-2)(5x-8)(4+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-3(x-2)}{(x-2)(5x-8)(4+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2})} = \lim_{x\to 2} \frac{-3}{(5x-8)(4+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2})}$$

$$= \frac{-3}{(2)(4+4+4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{-3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x-18} = \frac{\frac{-1}{4}}{2} = \frac{-1}{8}$$

۱۵۰ (۱) **(۲)** (۳) (۴) روش اول: از اتحاد مزدوج برای رفع ابهام، استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+5)-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}\times\frac{(2x+5)+7\sqrt{x}}{(2x+5)+7\sqrt{x}}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{2x+\sqrt{3x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+5)^2-49x}{4x^2-(3x+1)}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-29x+25}{4x^2-3x-1}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}}=\frac{-21}{5}\times\frac{4}{14}=-1/2$$

روش دوم: از قاعدهٔ هوپیتال کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{2-7(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{2-\frac{1(3)}{2\sqrt{3x+1}}}=\frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{-3}{2}}{\frac{5}{4}}=-1/2$$

۱۵۱ ۴ ۳ ۲ ۱ با استفاده از اتحاد مزدوج، صورت کسر و با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، مخرج کسر را گویا می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}\times\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}\times\frac{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(2x+3-3x-4)\overbrace{(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}^{3}}{(1+x)\underbrace{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4})}_{2}}=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)\times 3}{(1+x)\times 2}=-\frac{3}{2}$$

۱۵۲ ۴ ۳ ۲ ۱

$$\Rightarrow\lim_{x\to 8}\frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2b}{ax-b}=\frac{0}{8a-b}\Rightarrow 8a-b=0\Rightarrow b=8a$$

راه اول $=\lim_{x\to 8}\frac{8a(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2)}{a\cdot(x-8)}=\lim\frac{(8\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2)(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+3)}{(x-8)(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2)}$

$$\lim_{x\to 8}\frac{8(\sqrt[3]{x}-2)}{(x-8)\times 4}=\lim_{x\to 8}\frac{2\times(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{4(x-8)(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt[3]{x+4}})}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{6}$$

راه دوم $\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 8}\frac{b\frac{\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{2\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}}}{a}=\frac{8a\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{4a}=\frac{1}{6}$

۱۵۳ ۴ ۳ ۲ ۱

در مخرج برابر صفر است و حد خود کسر در صفر موجود و برابر ۲ است؛ پس حد صورت نیز باید برابر با صفر باشد، بنابراین:

$$a=-1\overset{Hop}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2bcx+b+c}{2}}{1}=\frac{b+c}{2}=2$$

$$\begin{matrix}b+c=4\\a=-1\end{matrix}\Rightarrow\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}=-4$$

۱۵۴ ۴ ۳ ۲ ۱ با توجه به اینکه مخرج کسر در حالت حدی برابر صفر شده، ولی مقدار حد عددی حقیقی است، صورت کسر نیز باید صفر شود.

$$\lim_{x\to ۰} a+\sqrt{bx+c}=a+\sqrt{c}=۰ \Rightarrow a=-\sqrt{c}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{bx+c}-\sqrt{c}}{x}\times\frac{\sqrt{bx+c}+\sqrt{c}}{\sqrt{bx+c}+\sqrt{c}}=\lim_{x\to ۰}\frac{bx+c-c}{x(\sqrt{bx+c}+\sqrt{c})}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{bx}{x(\sqrt{bx+c}+\sqrt{c})}=\frac{b}{۲\sqrt{c}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\sqrt{c}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c}=\frac{(-\sqrt{c})(\frac{۱}{۲}\sqrt{c})}{c}=\frac{-۱}{۲}$$

۱۵۵ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا براکت را به عدد تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲ \pi x}{[x]+\cos \pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-\cos^۲ \pi x}{۱+\cos \pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(۱-\cos \pi x)(۱+\cos \pi x)}{۱+\cos \pi x}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}(۱-\cos \pi x)=۱-\cos \pi=۱-(-۱)=۲$$

۱۵۶ ۴ ۳ ۲ **۱**

روش اول:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}\times\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sqrt{۱+\cos x}}\times\frac{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{(۲+۳x-۲+x)(\sqrt{۲})}{(\sqrt{۱-\cos^۲ x})(۲\sqrt{۲})}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۴x}{۲|\sin x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲x}{-\sin x}=-۲$$

روش دوم: می‌دانیم که $\lim_{u\to ۰}(۱-\cos u)\sim\frac{u^۲}{۲}$ است.

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{\frac{x^۲}{۲}}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}|\underbrace{x}_{-}|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰^-}\frac{\frac{۱(۳)}{۲\sqrt{۲+۳x}}-\frac{۱(-۱)}{۲\sqrt{۲-x}}}{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\frac{\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}}{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\frac{\frac{۴}{۲\sqrt{۲}}}{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=-۲$$

۱۵۷ **۴** ۳ ۲ ۱ می‌دانیم: بنا به هم‌ارزی مثلثاتی:

$$\tan^n u\simeq\lim_{u\to ۰}(u^n)\ ,\ \lim_{u\to ۰}(۱-\cos u)\simeq\lim_{u\to ۰}\frac{u^۲}{۲}$$

$$(۱)\ \ ۱-\underset{u\to ۰}{\cos u}\sim\underset{u\to ۰}{\frac{u^۲}{۲}}\Rightarrow ۱-\underset{x\to ۰^+}{\cos}(\sqrt{۲x})=\frac{(\sqrt{۲x})^۲}{۲}=x$$

پس داریم: (۲) $\underset{u\to ۰}{tg^۲u}\sim\underset{u\to ۰}{u^۲}\Rightarrow tg^۲(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)\sim(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)^۲=(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}})^۲$

$$\lim_{u\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{۱+\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{x^n}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}(۱+\sqrt{۱-x^۲})})^۲}{x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{x^۲}{۲})^۲}{x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۴}{۴x^n}=a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{۴}\\ n=۴\end{cases}\Rightarrow a+n=\frac{۱}{۴}+۴=\frac{۱۷}{۴}$$

۱۵۸ ۴ ۳ **۲** ۱

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\cos^۳(۲x)+ax^۲+b}{x}=۰\xrightarrow{\text{صفر صفرم}}۱+b=۰\Rightarrow b=-۱$$

دقت کنید با توجه به صفر بودن مخرج کسر باید صورت نیز صفر باشد تا حاصل حد بتواند مقداری عددی شود که در این صورت b باید -۱ باشد.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-6\cos^3(2x)\cdot\overbrace{\sin 2x}^{2x}+2ax}{x}=2 \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x\to 0^-} \underbrace{-6\cos^3(2x)}_{1}\times 2+2a=2 \Rightarrow -12+2a=2 \Rightarrow a=7$$

در نهایت داریم: $a+b=7-1=6$

۱۵۹ ۱ ۲ ۳ ۴ در یک همسایگی راست $x = 0$ داریم:

$$x\to 0^+ \;:\; \tan[x]=\tan[0^+]=\tan 0=0$$

پس حد داده شده، چنین است:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)}{x^n(2\sin^2\frac{\sqrt{3x}}{2})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{2x^n\times(\frac{\sqrt{3x}}{2})^2}\times\frac{\sqrt{1-x^3}+1}{\sqrt{1-x^3}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3}{2x^n\times\frac{3x}{4}\times 2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{3x^n}$$

اگر حاصل حد، موجود و مخالف صفر باشد، باید $n=2$ و در این صورت حاصل حد $-\frac{1}{3}$ است؛ پس $n=2$ و $a=\frac{-1}{3}$ است و در نتیجه $a^n=\frac{1}{9}$. باید در صوت سؤال قید شود $a\neq 0$.

۱۶۰ ۱ ۲ ۳ ۴ در مزدوج صورت ضرب و تقسیم نموده و برای مخرج از فرمول $1-\cos\alpha=2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2(1-\cos x)}}\times\frac{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2-3x-2+5x}{\sqrt{2\times 2\sin^2(\frac{x}{2})}\times(\underbrace{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x}}_{2\sqrt{2}})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{2|\sin\frac{x}{2}|\times 2\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|\frac{x}{2}|\times 2\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-\frac{x}{2}\times 2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

۱۶۱ ۱ ۲ ۳ ۴ طبق فرض داریم:

$$f(x)=xg(x)+1\Rightarrow g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}=\frac{\frac{(\sin x-1)^2}{(\sin x+1)^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-1)^2-(\sin x+1)^2}{x(1+\sin x)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin x}{x\times 1}=-4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-4$$

۱۶۲ ۱ ۲ ۳ ۴

راه اول:

$$f(x)=xg(x)-2x+5$$

$$g(x)=\frac{f(x)-2x-5}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\frac{\frac{5\cos x}{1-\sin x}+2x-5}{x}=\frac{5\cos x+(1-\sin x)(2x-5)}{x(1-\sin x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cos x}{x(1-\sin x)}+\lim_{x\to 0}\frac{2x-5}{x}$$

با استفاده از هم‌ارزی‌های $\cos x\underset{x\to 0}{\simeq}1-\frac{x^2}{2}$ و $\sin x\underset{x\to 0}{\simeq}x$ داریم:

$$\simeq\lim\frac{5(1-\frac{x^2}{2})}{x(1-x)}+\frac{2x-5}{x}$$

$$\frac{5(2-x^2)}{2x(1-x)}+\frac{2x-5}{x}=\frac{5(2-x^2)+2(1-x)(2x-5)}{2x(1-x)}$$

$$\frac{\cancel{10}-5x^2+4x\cancel{-10}-4x^2+10x}{2x(1-x)}=\frac{-9x^2+14x}{2x-2x^2}=7$$

راه دوم:

$$f(x)=xg(x)-۲x+۵\to g(x)=\frac{\frac{۵\cos x}{۱-\sin x}+۲x-۵}{x}\Rightarrow g(x)=\frac{۵\cos x+۲x-۵-۲x\sin x+۵\sin x}{x(۱-\sin x)}$$

$$\lim_{x\to ۰} g(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{۵\cos x+۲x-۵-۲x\sin x+۵\sin x}{x(۱-\sin x)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{Hop}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-۵\sin x+۲-۲(\sin x+x\cos x)+۵\cos x}{۱-(\sin x+x\cos x)}=۷$$

۱۶۳ ۱ ۲ ۳ **۴** گزینهٔ چهارم صحیح است زیرا:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+\underbrace{|x|}_{+}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

توجه کنید تابع در همسایگی چپ صفر، تعریف نمی‌شود زیرا مخرج به‌صورت $x-x$ یعنی صفر مطلق می‌شود.

۱۶۴ ۱ **۲** ۳ ۴

هرگاه x به‌سمت عددی میل کند که به‌موجبِ آن جواب حد یک نوع بی‌نهایت شود (مثلاً فقط $-\infty$) آن عدد ریشهٔ مضاعف مخرج است. یعنی $x=۲$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

بنابراین:

$$x^۲+ax+b=(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴\Rightarrow a=-۴\ ,\ b=۴$$

در نتیجه داریم:

$$a+b=-۴+۴=۰$$

۱۶۵ **۱** ۲ ۳ ۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ اول: $$\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(\frac{-۱}{۲})^-}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=-\infty$$: درست

گزینهٔ سوم: $$\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^-}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(\frac{-۱}{۲})^+}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=+\infty$$: نادرست

گزینهٔ چهارم: $$\lim_{x\to\frac{۴\pi}{۳}}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}\begin{cases}\lim_{x\to(\frac{۴\pi}{۳})^+}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^+}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=-\infty\\ \lim_{x\to(\frac{۴\pi}{۳})^-}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^-}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=+\infty\end{cases}$$ → نادرست

توجه کنید:

$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}\to\begin{cases}\cos(\frac{۲\pi}{۳})^+=(-\frac{۱}{۲})^-\\ \cos(\frac{۲\pi}{۳})^-=(-\frac{۱}{۲})^+\end{cases}$$

$$\sin\frac{۴\pi}{۳}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos(\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\to\begin{cases}\cos((\frac{4\pi}{3})^+)=(\frac{-1}{2})^+\\ \cos((\frac{4\pi}{3})^-)=(\frac{-1}{2})^-\end{cases}$$

۱۶۶ ① ② ③ ④ ابتدا عبارت داخل براکت را تعیین عدد می‌کنیم.

$$x\to(-\frac{1}{2})^-\Rightarrow x^2\to(\frac{1}{4})^+\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{x^2}\to 12^-\\ \frac{2}{x^2}=8^-\Rightarrow-\frac{2}{x^2}\to(-8)^+\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}[\frac{3}{x^2}]=11\\ [-\frac{2}{x^2}]=-8\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+11}{16x+8}=\frac{-5-5+11}{-8^-+8}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

۱۶۷ ① ② ③ ④ وقتی $x\to-\frac{1}{2}^+$ داریم:

$$x>-\frac{1}{2}\Rightarrow x^2<\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{x^2}>4\Rightarrow\begin{cases}-\frac{2}{x^2}<-8\Rightarrow[-\frac{2}{x^2}]=-9\\ \frac{3}{x^2}>12\Rightarrow[\frac{3}{x^2}]=12\end{cases}$$

پس حد را می‌توان به صورت زیر بازنویسی و حل کرد:

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}\frac{16x-(-9)}{24x+12}=\frac{-8+9}{(-12)^++12}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۱۶۸ ① ② ③ ④ از حد داده‌شده می‌فهمیم که مخرج به‌ازای $x=\frac{\pi}{3}$ برابر صفر می‌شود:

$$a\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}=0\Rightarrow\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Rightarrow a=\sqrt{3}$$

حال ببینیم که مخرج کسر داده‌شده به‌ازای $x\to(\frac{\pi}{3})^+$، از چه سمتی به صفر نزدیک می‌شود:

$$x\to(\frac{\pi}{3})^+:\sqrt{3}\cos((\frac{\pi}{3})^+)-\sin((\frac{\pi}{3})^+)=\sqrt{3}(\frac{1}{2})^--(\frac{\sqrt{3}}{2})^+=(\frac{\sqrt{3}}{2})^--(\frac{\sqrt{3}}{2})^+\to 0^-$$

پس حد مخرج کسر به‌صورت 0^- شده و نتیجه می‌گیریم که حد صورت عددی مثبت خواهدبود.

$$ax+b\Big|_{x\to\frac{\pi}{3}^+}>0\Rightarrow\sqrt{3}(\frac{\pi}{3})+b>0\Rightarrow b>\frac{-\pi}{\sqrt{3}}\simeq-1/000$$

کمترین مقدار صحیح b برابر ۱- می‌شود.

۱۶۹ ① ② ③ ④ ابتدا تابع $f-g$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{4}{(x+3)(x-1)}-\frac{1}{x-1}=\frac{1-x}{(x+3)(x-1)}=\frac{-1}{x+3}$$

خطوط مجانب این نمودار $x=-3$ و $y=0$ هستند که نقطه تلاقی آنها $(-3,0)$ است.

۱۷۰ ① ② ③ ④

برای این که f یک مجانب قائم داشته باشد، یا باید مخرج درجه یک باشد، یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد یا ریشه‌ای مشترک با صورت داشته باشد:

$$1)\ a=0\Rightarrow y=\frac{3x^2-8x-3}{x+1}\Rightarrow \text{یک مجانب قائم}$$

$$2)\ \text{مخرج}\ \Delta=0\Rightarrow a^2+2a-\frac{1}{3}=0\Rightarrow(a+1)^2=\frac{4}{3}\Rightarrow a=-1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \text{ریشه مضاعف}=\frac{a-1}{2a}$$

$$3)\ 3x^2-8x-3=(x-3)(3x+1)=0$$

اگر $x=3$ یا $x=-\frac{1}{3}$ ریشهٔ مخرج هم باشند آنگاه مخرج یک‌ریشه خواهد داشت. لذا فقط یک مجانب قائم داریم. توجه کنید که ریشه‌های مخرج در هر یک از حالت‌های فوق متمایز است.

درکل ۵ مقدار برای a به دست می‌آید.

۱۷۱ ① ② ③ ④ اگر $f(x)=\frac{2x^2+x-6}{ax^2+(a-2)x+4}$ دارای یک مجانب قائم باشد، یکی از سه حالت زیر متصور است:

۱) مخرج درجهٔ ۱ باشد: $a=0$

۲) مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$\Delta=(a-2)^2-16a=0\Rightarrow a^2-20a+4=0$$
$$a=10\pm 4\sqrt{6}$$

۳) یکی از ریشه‌های صورت، ریشهٔ مخرج نیز باشد.

$$2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-2\Rightarrow a(-2)^2+(a-2)(-2)+4=0\\ \qquad\Rightarrow a=-4\\ x=+\frac{3}{2}\Rightarrow a(\frac{3}{2})^2+(a-2)(\frac{3}{2})+4=0\\ \qquad\Rightarrow a=\frac{-4}{15}\end{cases}$$

پس در مجموع به‌ازای ۵ مقدار برای a، $f(x)$ یک مجانب قائم دارد.

۱۷۲ **۴** ۳ ۲ ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2+x}}{x}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2|\overbrace{x}^{-}|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$$

۱۷۳ ۴ ۳ ۲ **۱** می‌دانیم که $(\text{عدد بزرگتر از یک})^{-\infty}=0$ است.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times 2^{1-2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n+1}-0}{2^{2n+1}+0}=1$$

۱۷۴ ۴ ۳ **۲** ۱ می‌دانیم که $(\text{عدد بزرگتر از یک})^{-\infty}=0$ است.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2n}-2^{-2n+1}}{2\times 3^{2n}+3^{-2n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2n}-0}{2\times 3^{2n}-0}=\frac{1}{2}$$

۱۷۵ **۴** ۳ ۲ ۱ ابتدا زیر هریک از رادیکال‌ها مخرج مشترک می‌گیریم و عبارت $\sqrt{x}$ را به زیر رادیکال‌ها برده و با xهایی که از مخرج کسرها، فاکتور گرفته‌ایم ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+x}}-\sqrt{\frac{1}{x^4+x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}-\sqrt{\frac{1}{x^3+x}}\right)=\sqrt{2}-0=\sqrt{2}$$

در واقع رفع ابهام $\infty\times 0$ است که مربوط به نظام قدیم است اما با ساده‌سازی عبارت می‌توان به جواب رسید.

۱۷۶ ۴ ۳ **۲** ۱ می‌دانیم: $\underbrace{2+4+6+\cdots+2n}_{n\text{ تا}}=n\cdot(n+1)$: مجموع n عدد زوج

چون حد تابع در منفی بی‌نهایت خواسته شده است پس از قاعدهٔ پرتوان استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{a^{2+4+\cdots+100}x^{2+4+\cdots+100}}}{a^{49}x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{a^{50\times51}x^{50\times51}}}{a^{49}x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|a^{51}x^{51}|}{a^{49}x^k}=-1$$

واضح است که $k=51$ است. از طرفی اگر $a=-1$ باشد با توجه به اینکه $x\to-\infty$ می‌رود عبارت از داخل قدر مطلق مثبت خارج می‌شود و خواهیم داشت که $a^2=-1$ نادرست است پس $a=1$.

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{-a^{51}x^{51}}{a^{49}x^k}=-1\Rightarrow a^2=1\xrightarrow{a>0}a=1$$

۱۷۷ ۴ **۳** ۲ ۱ در $x\to1^+$ مقدار $[x]$ دقیقاً برابر ۱ است و داریم:

$$\lim_{x\to1^+}(4-[x])g(x)=\lim_{x\to1^+}(4-1)g(x)=\lim_{x\to1^+}3g(x)=6\Rightarrow\lim_{x\to1^+}g(x)=2\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}=2$$

حد مخرج در $x\to1^+$ برابر صفر است و چون حاصل حد برابر عدد متناهی ۲ است، پس باید حد صورت هم صفر شود و عبارت زیر رادیکال یعنی ax^2+bx+c باید به فرم $a(x-1)^2$ باشد.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|}=\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|\sqrt{a}}{|x-1|}=\sqrt{a}=2\Rightarrow a=4$$

حال حاصل $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ را می‌یابیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+bx+c}}{|x-1|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

۱۷۸ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^2+x+1}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^2}}{x}$$

مشخص است که چون حد فوق برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس باید $a>۰$ باشد و داریم:

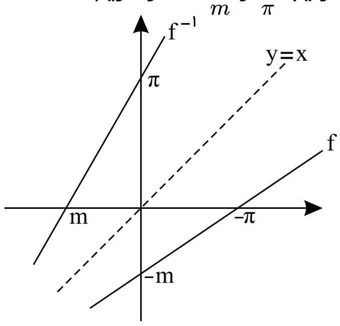
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{a}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{a}}{x}=\sqrt{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

حال خواست سؤال را محاسبه می‌کنیم.

$$x\to -۱^-\Rightarrow x<-۱\Rightarrow \frac{۱}{x}>-۱\Rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right]=-۱$$

$$\lim_{x\to-۱^-}\left[\frac{۱}{x}\right]f(x)=\lim_{x\to-۱^-}-f(x)=-\lim_{x\to-۱^-}\sqrt{\frac{۱}{۴}x^۲+x+۱}=-\sqrt{\frac{۱}{۴}(-۱)^۲+(-۱)+۱}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۷۹ (۴) (۳) (۲) (۱) نمودار دو تابع f و $f^{-۱}$ به $y=x$ قرینهٔ همدیگرند، پس با توجه به شکل، شیب خط‌های f و $f^{-۱}$ به ترتیب $\frac{m}{\pi}$ و $\frac{\pi}{m}$ است و داریم:



$$f^{-۱}(x)=\frac{\pi}{m}x+\cdots$$
$$f(x)=\frac{m}{\pi}x+\cdots$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}=\pi\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{m}x+\cdots}{\frac{m}{\pi}x+\cdots}=\pi$$
$$\Rightarrow\frac{\frac{\pi}{m}}{\frac{m}{\pi}}=\frac{\pi^۲}{m^۲}=\pi\Rightarrow m^۲=\pi\xrightarrow{m<۰}m=-\sqrt{\pi}$$

۱۸۰ (۴) (۳) (۲) (۱)

f تابع $\Rightarrow(۰,۳m)(m,۰)$

$\Rightarrow f(x)=-۳x+۳m$

g تابع $(۴,۰)(-۳,۰)\Rightarrow g(x)=\frac{۳}{۴}x-۳$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|-۳x+۳m|}{\frac{۳}{۴}x-۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳x}{\frac{۳}{۴}x}=-۴$$

۱۸۱ (۴) (۳) (۲) (۱) طبق فرض داریم:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\xrightarrow{g=\frac{۱}{f}}g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$$

نکته: $\begin{cases}f^{-۱}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}\\[2mm] g^{-۱}(x)=\dfrac{-bx+d}{ax-c}\end{cases}$

طبق برابری‌های حد در $(x\to-\infty)$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-۱}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{-۱}(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\Rightarrow\frac{b^۲}{a^۲}=۱\Rightarrow\frac{b}{a}=\pm۱$$

خواسته سؤال: $\lim_{x\to۰^+}f^{-۱}(x)=\lim_{x\to۰^+}\frac{-dx+b}{cx-a}=\frac{-b}{a}=۱$ یا (-۱)

۱۸۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

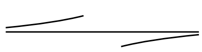
ابتدا حد تابع را در $\pm\infty$ بررسی می‌کنیم:

$$y=\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲}=۲$$

خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است؛ حال تفاضل تابع و خط مجانب افقی را می‌یابیم.

$$y-۲=\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}-۲=\frac{۲x^۲-x-۲-۲x^۲-۴x}{x^۲+۲x}=\frac{-۵x-۲}{x^۲+۲x}$$

$$x\to+\infty\Rightarrow\frac{-۵x-۲}{x^۲+۲x}<۰\Rightarrow y-۲<۰\Rightarrow y<۲$$
$$x\to-\infty\Rightarrow\frac{-۵x-۲}{x^۲+۲x}>۰\Rightarrow y-۲>۰\Rightarrow y>۲$$

$\Rightarrow$ 

۱۸۳ (۴) (۳) (۲) (۱) برای محاسبهٔ مجانب افقی باید از تابع حد در بی‌نهایت بگیریم و برای محاسبهٔ مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را می‌یابیم. چون $x=-۲$ و $x=۱$

خطوط مجانب قائم هستند بنابراین ریشه‌های مخرج محسوب می‌شوند.

مجانب قائم : $\begin{cases} x=۱ \xrightarrow{\text{مخرج}} a+b+c=۰ \quad (۱)\\ x=-۲ \xrightarrow{\text{مخرج}} ۴a-۲b+c=۰ \quad (۲)\end{cases}$

مجانب افقی : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-۲x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c} \overset{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim \frac{-۲x^۲}{ax^۲} = -\frac{۲}{a} = -۱ \Rightarrow a=۲$

$a=۲ \xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} b+c=-۲\\ -۲b+c=-۸\end{cases} \Rightarrow b=۲ \quad , \quad c=-۴$

$\xrightarrow{\text{بازنویسی}} f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{۲x^۲+۲x-۴} \Rightarrow f(-۱)=\frac{-۵}{۲-۲-۴}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$

۱۸۴ ۱ **۲** ۳ ۴ می‌دانیم اگر $x=k$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، آنگاه:

$ax^۲+bx+c=a\cdot(x-k)^۲$

چون $x=۲$ تنها مجانب قائم این منحنی است پس ریشهٔ مضاعف مخرج می‌باشد. پس:

$۲x^۲+bx+c=۲(x-۲)^۲=۲x^۲-۸x+۸ \to b=-۸ \, , \, c=۸$

بازنویسی: $f(x)=\frac{ax^۲+۷x}{۲x^۲-۸x+۸} \to f(۳)=۶ \to f(۳)=\frac{۹a+۲۱}{۲}=۶ \to a=-۱ \to$ بازنویسی : $f(x)=\frac{-x^۲+۷x}{۲x^۲-۸x+۸}$

مجانب افقی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۲+۷x}{۲x^۲-۸x+۸}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۲}{۲x^۲}=-\frac{۱}{۲}$

خط $y=-\frac{۱}{۲}$ خط مجانب افقی است.

۱۸۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۳-bx^۲+۲}{ax^۳-bx+۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۳}{ax^۳}=۱$

تابع یک مجانب افقی به‌صورت $y=۱$ دارد چون فقط در دو نقطه ناپیوسته است و دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد باید یک مجانب قائم نیز داشته باشد. در واقع باید مخرج دو ریشه داشته باشد که یکی از آنها ریشهٔ مشترک با صورت است و به‌عنوان یک نقطهٔ ناپیوستگی (نه مجانب) باشد. این ریشه را به دست می‌آوریم.

$ax^۳-bx^۲+۲=ax^۳-bx+۲ \Rightarrow bx^۲=bx \Rightarrow bx^۲-bx=۰ \Rightarrow bx\cdot(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غ ق ق}\\ x=۱\end{cases}$

$\xrightarrow{x=۱\ \text{ریشهٔ مخرج}} a-b+۲=۰ \Rightarrow b=a+۲$

$f(x)=\frac{ax^۳-(a+۲)x^۲+۲}{ax^۳-(a+۲)x+۲}=\frac{ax^۲\cdot(x-۱)-۲(x-۱)(x+۱)}{ax\cdot(x^۲-۱)-۲(x-۱)}=\frac{ax^۳-ax^۲-۲x^۲+۲}{ax^۳-ax-۲x+۲}=\frac{(x-۱)(ax^۲-۲x-۲)}{(x-۱)(ax^۲+ax-۲)}$

در نتیجه عبارت $ax^۲+ax-۲$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$\xrightarrow{\Delta=۰} a^۲+۸a=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۰ & \text{غ ق ق}\\ a=-۸ \Rightarrow b=-۶\end{cases}$

۱۸۶ **۱** ۲ ۳ ۴ ابتدا دقت کنید که:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \frac{x^۳}{x\times ۴x^۲}=\frac{۱}{۴}$

پس $y=\frac{۱}{۴}$ مجانب افقی تابع است. بنابراین باید تابع تنها یک مجانب قائم داشته باشد. مجانب‌های قائم را در ریشه‌های مخرج جست‌وجو می‌کنیم. دقت کنیم که:

$(x-a)(۴x^۲-۴x+۱)=۰ \Rightarrow (x-a)(۲x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=a \, , \, \frac{۱}{۲}$

پس باید یکی از حالات زیر رخ دهد:

۱) $a=\frac{۱}{۲}$ که در این صورت $x=\frac{۱}{۲}$ تنها مجانب قائم است.

۲) $x=a$ ریشهٔ صورت هم باشد:

$a^۳-۵a+۴=۰ \Rightarrow a^۳-a-۴a+۴=۰ \Rightarrow a(a-۱)(a+۱)-۴(a-۱)=۰ \Rightarrow (a-۱)(a^۲+a-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a-۱=۰ \Rightarrow a=۱\\ a^۲+a-۴=۰\\ \xrightarrow[a\neq۱]{\Delta=\sqrt{۱۷}>۰} a_۲+a_۳=-۱\end{cases}$

از اینجا سه مقدار برای a به‌دست می‌آید که مجموع آنها $۱-۱=۰$ است.

۳) $x=\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ مضاعف صورت باشد و $x=a$ تنها مجانب قائم باشد که چنین چیزی نیست. بنابراین برای a چهار مقدار به‌دست می‌آید که مجموع آنها $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۸۷ ۴ ۳ ۲ ۱

$$f(x)=\frac{|ax+۱|+۲x}{|x|+b}$$

چون تابع f دو مجانب قائم دارد، پس مخرج باید دارای دو ریشه باشد:

$$|x|+b=۰\Rightarrow |x|=-b\Rightarrow -b>۰\Rightarrow b<۰\Rightarrow x=\pm(-b)\Rightarrow x=\pm b$$

حد تابع در $\pm\infty$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|ax+۱|+۲x}{|x|+b}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|ax|+۲x}{|x|}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|a||x|+۲x}{|x|}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|a|x+۲x}{x}=|a|+۲,\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-|a|x+۲x}{-x}=|a|-۲$$

چون $|a|+۲>۰$, $-b>۰$، طبق فرض سؤال داریم:

$$\left.\begin{matrix}|a|+۲=-b\\|a|-۲=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲|a|=۰\Rightarrow a=۰, b=-۲$$

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{|x|-۲}\Rightarrow \lim_{x\to۱^+}\frac{۲x+۱}{|x|-۲}=\frac{۳}{-۱}=-۳$$

۱۸۸ ۴ ۳ ۲ ۱

چون نقطهٔ $A(-\frac{۱}{۲},۳)$ محل تلاقی مجانب‌های تابع $y=\frac{bx^۲+۷}{۴x^۲+ax+۱}$ است، پس $y=۳$ مجانب افقی و $x=\frac{-۱}{۲}$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{bx^۲+۷}{۴x^۲+ax+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{bx^۲}{۴x^۲}=\frac{b}{۴}=۳\to b=۱۲$$

$$۴x^۲+ax+۱=۰\xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}}۴\times\frac{۱}{۴}-\frac{a}{۲}+۱=۰\Rightarrow ۲=\frac{a}{۲}\Rightarrow a=۴$$

$$\frac{b}{a}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

۱۸۹ ۴ ۳ ۲ ۱

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\to f^{-۱}(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ax+b}{cx+d}}{\frac{dx-b}{-cx+a}}=\frac{-ac}{cd}=\frac{-a}{d}\quad,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{dx-b}{-cx+a}}{\frac{ax+b}{cx+d}}=\frac{-dc}{ac}=\frac{-d}{a}$$

$$\frac{-a^۲}{d}=\frac{-d}{a}\to a^۲=d^۲\to\begin{cases}x=-\frac{d}{c}\ ,\ y=\frac{a}{c}\xrightarrow{a=d}\omega(-\frac{d}{c},\frac{d}{c})\\ x=-\frac{d}{c}\ ,\ y=\frac{a}{c}\xrightarrow{a=-d}\omega(\frac{d}{c},\frac{d}{c})\end{cases}$$

با توجه به نقطه تلاقی مجانب‌های به‌دست‌آمده، نقطه‌ای قبول است که یا طول و عرض برابر داشته باشند و یا طول و عرض قرینه که فقط گزینه ۳ چنین شرایطی دارد.

۱۹۰ ۴ ۳ ۲ ۱ کافی است حد چپ تابع در $x=-۲$ و مقدار تابع در $x=-۲$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{۸+x^۳}{\underbrace{|x+۲|}_{-}}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{-(x+۲)}=-۱۲$$

درضمن $f(-۲)=a$ است پس $a=-۱۲$ است.

۱۹۱ ۴ ۳ ۲ ۱ برای پیوسته بودن باید حد چپ و راست با مقدار تابع برابر باشند.

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(ax-۱)=۲a-۱\quad \text{حد چپ}$$

$$f(۲)=۲a-۱\quad \text{مقدار تابع}$$

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\frac{۰}{۰}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{(۳x-۶)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-\sqrt{x+۲})(x+\sqrt{x+۲})}=\lim_{x\to۲^+}\frac{(۳x-۶)(x+\sqrt{x+۲})}{x^۲-x-۲}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x+۱)(x-۲)} = \frac{۳\times(۲+\sqrt{۴})}{(۲+۱)} = ۴ \quad \text{حد راست}$$

با توجه به تعریف پیوستگی داریم:

$$۲a - ۱ = ۴ \Rightarrow a = ۲/۵$$

۱۹۲ (۱) (۲) (۳) **(۴)** کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = ۲$ محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{۲\underbrace{|x-۲|}_{+}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(x+۲)(x-۲)}{۲(x-۲)} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x^۲-۴}{۲\underbrace{|x-۲|}_{-}} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{(x+۲)(x-۲)}{-۲(x-۲)} = \frac{۴}{-۲} = -۲$$

$$f(۲) = ۲$$

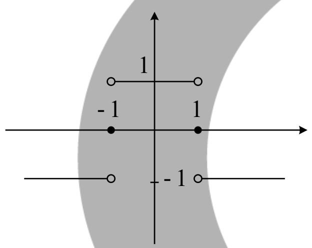
بنابراین تابع در $x = ۲$ از راست پیوسته است.

۱۹۳ (۱) (۲) **(۳)** (۴) تابع gof را با توجه به توابع f و g تعریف می‌کنیم:

$$gof(x) = g(f(x)) = \begin{cases} ۱ & f(x) > ۰ \\ ۰ & f(x) = ۰ \\ -۱ & f(x) < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} ۱ & -۱ < x < ۱ \\ ۰ & x = \pm ۱ \\ -۱ & x > ۱ \quad \text{یا} \quad x < -۱ \end{cases}$$

$x = ۱$ و $x = -۱$ طول نقاط ناپیوستگی هستند.



۱۹۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$|x^۳| < x^۲ \Rightarrow x^۲|x| < x^۲ \xrightarrow{x\neq ۰} |x| < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱$$

$$|x^۳| = x^۲ \Rightarrow x^۲|x| = x^۲ \xrightarrow{x=۰} |x| = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow x = ۰, ۱, -۱$$

$$|x^۳| > x^۲ \Rightarrow x^۲|x| > x^۲ \xrightarrow{x\neq ۰} |x| > ۱ \Rightarrow x < -۱ \text{ یا } x > ۱$$

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & -۱ < x < ۱, x \neq ۰ \\ ۱ + \cos \pi x & x = ۰, ۱, -۱ \\ [x^۲] - [x] & x < -۱ \text{ یا } x > ۱ \end{cases}$$

در محدوده‌های $x > ۱$ یا $x < -۱$ در تمام xهایی که به‌ازای آنها $x^۲$ عدد صحیح است ولی x عدد صحیح نیست، مانند $x = \pm\sqrt{۲}$ تابع $[x^۲]$ ناپیوسته ولی تابع $[x]$ پیوسته است، بنابراین تابع $[x^۲] - [x]$ ناپیوسته است. در نتیجه تابع f در بی‌شمار نقطه ناپیوسته است.

$$\text{نقاط ناپیوستگی}: x = \pm\sqrt{۲}, \pm\sqrt{۳}, \pm\sqrt{۵}, \pm\sqrt{۶}, \cdots$$

۱۹۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴) توجه کنید که در صورت سؤال باید می‌گفت که تابع در $x = ۰$ پیوسته است، زیرا ضابطهٔ $y = [x] - ۲a$ برای $x < ۰$ در بی‌شمار عدد صحیح منفی ناپیوسته است و تابع نمی‌تواند همواره پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱-\cos x}{۲bx^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sin^۲(\frac{x}{۲})}{۲bx^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{(\frac{x}{۲})^۲}{bx^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\frac{۱}{۴}x^۲}{bx^۲} = \frac{۱}{۴b}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} [x] - ۲a = -۱ - ۲a$$

$$f(۰) = |b - ۰| = |b|$$

$$\frac{۱}{۴b} = -۱ - ۲a = |b|$$

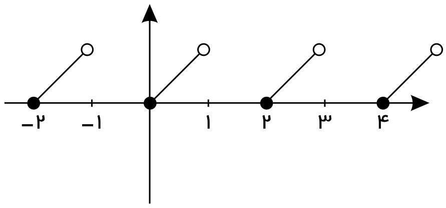
با توجه به اینکه حاصل قدرمطلق نمی‌تواند منفی باشد، پس باید $\frac{۱}{۴b} > ۰$ و در نتیجه $b > ۰$ و داریم:

$\frac{۱}{۴b} = |b| = b \Rightarrow ۴b^۲ = ۱ \to b^۲ = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{۱}{۲}$

$-۱ - ۲a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲a = \frac{۳}{۲} \to a = -\frac{۳}{۴}$

$b - a = \frac{۱}{۲} - (-\frac{۳}{۴}) = \frac{۵}{۴}$

۱۹۶ ۴ ۳ ۲ **۱** نمودار تابع $y = x - [x]$ به‌ازای (زوج $= [x]$) به صورت روبه‌روست:



نمودار $y = |x - [x - a]|$ به‌ازای (فرد $= [x]$) باید قسمت‌های خالی نمودار قبلی را بپوشاند، پس این نمودار از پاره‌خط‌هایی با شیب منفی تشکیل شده، یعنی $y = [x - a] - x$.

از طرفی حد تابع f باید در نقاط به طول زوج، صفر باشد:

$$\lim_{x\to(۲k)^-} [x - a] - x = ۰ \Rightarrow [(۲k)^- - a] - ۲k = ۰ \Rightarrow [۲k - a] = ۲k$$

$$\Rightarrow ۲k \le ۲k - a < ۲k + ۱ \xrightarrow{-(۲k)} ۰ \le -a < ۱ \Rightarrow -۱ < a \le ۰$$

در صورتی که در صورت سؤال قید شده $a < -۱$، در نتیجه برای a مقداری وجود ندارد.

۱۹۷ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$x = a \text{ پیوستگی در نقطهٔ } \Rightarrow \frac{۲\sin b}{۳\sqrt{a+۲}} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{۳x^۲ + (m-۱)x + (m-۴)}}{|x^۳ + ((m-۷)x + a)^۲|} = \frac{\sqrt{۳a^۲ + (m-۱)a + (m-۴)}}{|a^۳ + ((m-۷)a + a)^۲|}$$

$$\Rightarrow a^۳ + ((m-۶)a)^۲ = a^۳ + (m-۶)^۲a^۲ = a^۲(a + m - ۶) = ۰ \begin{cases} a = ۰ \\ a = ۶ - m \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳(۶-m)^۲ + (m-۱)(۶-m) + m - ۴ = ۳(۳۶ + m^۲ - ۱۲m) + (-m^۲ - ۷m - ۶) + m - ۴ = ۲(m-۷)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow m = ۷ \Rightarrow a = ۶ - m = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to-۱} \frac{\sqrt{۳x^۲ + ۶x + ۳}}{|x^۳ + ۱|} = \lim_{x\to-۱} \frac{\sqrt{۳}|x+۱|}{|x^۳+۱|} =$$

$$\lim_{x\to-۱} \frac{\sqrt{۳}\cancel{|x+۱|}}{\cancel{|x+۱|}\,|x^۲ - x + ۱|} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \frac{۲\sin b}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow b = \frac{\pi}{۳}$$

۱۹۸ ۴ ۳ **۲** ۱ سؤال را در دو بخش n زوج و n فرد حل می‌کنیم:

الف) فرض کنیم n زوج است، داریم:

$$x = n = \text{زوج} \to [x] = \text{زوج}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(n) = |n - [-n]| = |۲n| \\ f(n^+) \xrightarrow{[n^+] = \text{زوج}} = |n - [-(n^+)]| = |n - \overbrace{[-n^-]}^{-n-۱}| = |۲n + ۱| \end{cases}$$

نیازی به محاسبه $f(n^-)$ نیست چون در حالت n زوج، $f(n) \neq f(n^+)$ است، پس به‌ازای n زوج، تابع f در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته نیست:

ب) فرض کنیم n فرد است، داریم:

$$x = n = \text{فرد} \to [x] = \text{فرد}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(n) = n - [n] + k = n - n + k = k \\ f(n^+) \xrightarrow{[n^+] = \text{فرد}} = n - [n^+] + k = n - n + k = k \\ f(n^-) \xrightarrow{[n^-] = \text{زوج}} = |n - [-(n^-)]| = |n - \underbrace{[-n^+]}_{-n}| = |۲n| \end{cases}$$

در این حالت، تابع f اگر بخواهد در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته باشد، باید:

$$k = k = |۲n|$$

با شرط n فرد طبیعی، به‌ازای $k = ۲n$، تابع f در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته است.

۱۹۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

فرد $n \Rightarrow [n^+]=n \;,\; [n^-]=n-1 \;,\; [-n^+]=-n \;,\; [-n^-]=-n-1$

$$\lim_{x\to n^+}|[-x]-x| = |(-n-1)-n| = 2n+1 = \lim_{x\to n^-} k-x+[x] = k-n+(n-1) = k-1 \Rightarrow k=2n+2$$

$$\lim_{x\to -n^+}|[-x]-x| = |(n-1)+n| = 2n-1 = \lim_{x\to -n^-} k-x+[x] = k+n+(-n-1) = k-1 \Rightarrow k=2n$$

با توجه به مقادیر مختلف که برای k به دست آمده، پس برای nهای فرد پیوسته نیست.

زوج $n \Rightarrow [n^+]=n \;,\; [n^-]=n-1 \;,\; [-n^+]=-n-1 \;,\; [-n^-]=-n$

$$\lim_{x\to n^-}|[-x]-x| = |-n-n| = 2n = \lim_{x\to n^+} k-x+[x] = k-n+n = k \Rightarrow k=2n$$

$$\lim_{x\to -n^+} k-x+[x] = k+n+(-n) = k = \lim_{x\to -n^-}|[-x]-x| = |n+n| = 2n \Rightarrow k=2n$$

با توجه به مقادیر مساوی که برای k به دست آمد، پس برای nهای زوج پیوسته است.

۲۰۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$f(x)=\begin{cases} x[x] & ; |x|<1 \Rightarrow -1<x<1 \\ ax+b & ; |x|\ge 1 \Rightarrow x\le -1 \text{ یا } x\ge 1 \end{cases}$$

تابع باید در نقاط $x=-1$ و $x=1$ پیوسته باشد. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=-a+b \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-} ax+b = -a+b \\ \text{حد راست} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} x[x] = -1[(-1)^+] = -1(-1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -a+b=1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=a+b \\ \text{حد راست} = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax+b = a+b \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x[x] = 1[1^-] = 1\times 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=0$$

$$\begin{cases} -a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow a=-b \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۲۰۱ **۱** ۲ ۳ ۴ می‌دانیم که $|f(x)|\le k \xrightarrow{k>0} -k\le f(x)\le k$ و $|f(x)|\ge k \xrightarrow{k>0} \begin{cases} f(x)\ge k \\ \text{یا} \\ f(x)\le -k \end{cases}$ است.

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)[x] & -1<x-1<1 \\ x^2+ax+b & x-1\ge 1 \text{ یا } x-1\le -1 \end{cases} \to f(x)=\begin{cases} (x-1)[x] & 0<x<2 \\ x^2+ax+b & x\ge 2 \text{ یا } x\le 0 \end{cases}$$

چون تابع همواره پیوسته است، پس حتماً در $x=0$ و $x=2$ نیز پیوسته است.

$$x=0\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)[x] = -1[0^+] = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+ax+b) = b \qquad \to b=0 \\ f(0)=b \end{cases}$$

$$x=2\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+ax+b) = 4+2a \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)[x] = 1[2^-] = 1 \qquad \to 4+2a=1 \to a=\frac{-3}{2} \\ f(2)=4+2a \end{cases}$$

۲۰۲ ۱ ۲ ۳ **۴** برای دامنهٔ تابع $f(x)=[x]\sin \pi x$ دو حالت داریم:

$f(x)=[x]\cdot\sin\pi x \quad [-2,2]$

$1)\ if: x\notin\mathbb{Z}\to$

در این حالت $[x]$ و $\sin\pi x$ هر دو پیوسته هستند، بنابراین حاصل‌ضربشان نیز پیوسته است.

$2)\ if: x\in\mathbb{Z}\to$

در این حالت $[x]$ ناپیوستگی دارد اما تابع $\sin\pi x$ در اعداد صحیح همواره صفر است پس حد تابع و مقدار تابع $f(x)=[x]\cdot\sin\pi x$ در اعداد صحیح صفر است. بنابراین همواره پیوسته است پس تابع فوق در $\mathbb{R}$ پیوستگی دارد.

۲۰۳ ۱ **۲** ۳ ۴ اگر $\sin x=\pm 1$ یعنی به ازای $x=\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}$ داریم:

$$f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\pm 1)^{2n} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

در سایر نقاط که $-1<\sin x<1$ داریم:

$f(x) = (\text{عددهای بین ۱ و ۱}-)^{+\infty} = ۰$

پس در بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$ ضابطهٔ تابع چنین است:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ; \quad x = \frac{\pi}{۲} , \frac{۳\pi}{۲} \\ ۰ & ; \quad x \in [۰ , ۲\pi] - \{\frac{\pi}{۲} , \frac{۳\pi}{۲}\} \end{cases}$$

پس تابع در دو نقطهٔ $\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ ناپیوسته است.

۲۰۴ ۴ ۳ ۲ **۱** تابع f در نقاط $x = ۱$ و $x = ۵$ پیوسته است، پس:

$$x = ۱ \text{ پیوستگی در } : \tan\frac{۳\pi}{۴} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\overbrace{|x^۲ + x - ۲|}^{(x+۲)(x-۱)}}{a(۱-x)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x+۲)(x-۱)}{a(۱-x)} \Rightarrow -۱ = \frac{۳}{-a} \Rightarrow a = ۳$$

$$x = ۵ \text{ پیوستگی در } : b(۵ - [-۵]) = \lim_{x\to ۵^-} \frac{|x^۲ + x - ۲|}{a(۱-x)} \Rightarrow ۱۰b = \frac{۲۸}{۳(-۴)} \Rightarrow b = \frac{-۷}{۳۰}$$

$$a \times b = ۳ \times (\frac{-۷}{۳۰}) = (\frac{-۷}{۱۰}) = -۰/۷$$

۲۰۵ ۴ **۳** ۲ ۱ برای اینکه تابع f در همهٔ نقاط حد (و به تبع آن پیوسته) باشد، لازم است در ضابطهٔ اول ضرایب $[-x]$ و $[x]$ برابر باشند:

$$\Rightarrow ۱ - a = ۳a^۲ - ۱ \Rightarrow ۳a^۲ + a - ۲ = (a+۱)(۳a-۲) = ۰ \Rightarrow a = -۱ \text{ یا } \frac{۲}{۳}$$

به ازای $a = -۱$ حد ضابطه بالا -۲ اما حد ضابطهٔ پائین صفر می‌شود که غیرقابل قبول است.

$$\xrightarrow{a=\frac{۲}{۳}} f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}([x] + [-x]) & x \notin \mathbb{Z} \\ b\sin(\frac{۳\pi}{۲}) = -b & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۳} & x \notin Z \\ -b & x \in Z \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در صورتی همواره پیوسته است که هر دو ضابطه برابر باشند بنابراین داریم:

$$-b = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow b = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{a}{b} = ۲$$

۲۰۶ ۴ ۳ ۲ **۱** تابع در $x = \pm c$ پیوسته است پس

$$\begin{cases} |c-۱| = ac^۲ + bc + ۲ \\ |c+۱| = ac^۲ - bc + ۲ \end{cases} \quad c \geq ۱$$

$$\begin{cases} c - ۱ = ac^۲ + bc + ۲ \\ c + ۱ = ac^۲ - bc + ۲ \end{cases} \overset{(۱)}{\Rightarrow} \begin{cases} \text{تفاضل} \quad ۲ = -۲bc \Rightarrow bc = -۱ \Rightarrow b = -\frac{۱}{c} \\ \overset{(۱)}{\Rightarrow} \quad c - ۱ = ac^۲ - ۱ + ۲ \Rightarrow a = \frac{c-۲}{c^۲} \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{c-۲}{c^۲}}{-\frac{۱}{c}} = \frac{۲-c}{c} = \underbrace{\frac{۲}{c}}_{\text{طبیعی}} - ۱ \Rightarrow \begin{cases} c = ۱ \to \frac{a}{b} = ۱ \\ c = ۲ \to \frac{a}{b} = ۰ \\ c \geq ۳ \to -۱ < \frac{a}{b} < ۰ \to [\frac{a}{b}] = -۱ \end{cases}$$

۲۰۷ ۴ ۳ **۲** ۱ با توجه به اینکه هر یک از ضابطه‌های f پیوسته است، $f(x)$ باید در نقاط مرزی خود پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} |x-۲| & |x-۲| \leq c \\ a(x-۲)^۲ + b(x-۲) & |x-۲| > c \end{cases}$$

$$\text{نقاط مرزی} : |x-۲| = c \Rightarrow x = c + ۲ \text{ یا } -c + ۲ , c \geq ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^+(c+۲) = f^-(c+۲) \Rightarrow c = ac^۲ + bc \\ f^+(-c+۲) = f^-(-c+۲) \Rightarrow c = ac^۲ - bc \end{cases} \Rightarrow c = ac^۲$$

$$c(ac-۱) = ۰ \Rightarrow c = ۰ \text{ یا } ac = ۱ \Rightarrow \begin{cases} [ac] = ۱ \\ [ac] = ۰ \end{cases}$$

۲۰۸ ۴ **۳** ۲ ۱

می‌دانیم:

$$\lim_{a\to ۰} \frac{f(x+a) - f(x)}{a} = f'(a)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin a \cdot \cos x + \cos a \cdot \sin x - \sin a}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin(x+a) - \sin a}{x}$$

بنابه تعریف مشتق، این عبارت مشتق تابع $y = \sin x$ در نقطهٔ $x = a$ است.

$= (\sin x)'(a) = \cos a$

۲۰۹ ۴ ۳ ۲ ۱ می‌دانیم $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است، پس عبارت خواسته‌شده $f'(۴)$ است.

$$f(x) = \frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x) - (-۲)(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۴) = \frac{\frac{۱}{۴}(-۳) + ۲(۳)}{(-۳)^۲} = \frac{-\frac{۳}{۴}+۶}{۹} = \frac{۲۱}{۳۶} = \frac{۷}{۱۲}$$

۲۱۰ ۴ ۳ ۲ ۱ می‌دانیم $f'(x) = \lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ است، پس عبارت خواسته‌شده $f'(\frac{۱}{۴})$ است.

$$f(x) = \frac{-x-۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-۱(\sqrt{x}) - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x} \Rightarrow f'(\frac{۱}{۴}) = \frac{-\frac{۱}{۲} - (-\frac{۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{-۱}{۲} + \frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۴}} = ۳$$

۲۱۱ ۴ ۳ ۲ ۱ برای حل این سؤال از مشتق حاصل‌ضرب استفاده می‌کنیم. $((uv)' = u'v + v'u)$

$$f(x) = x \cdot \sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}} + \frac{۱\left(\frac{۳(x+۲) - ۱(۳x+۱)}{(x+۲)^۲}\right)}{۳\sqrt[۳]{\left(\frac{۳x+۱}{x+۲}\right)^۲}}x = \sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}} + \frac{۵x}{۳(x+۲)^۲\sqrt[۳]{(\frac{۳x+۱}{x+۲})^۲}}$$

$$\Rightarrow f'(-۳) = \sqrt[۳]{۸} + \frac{\frac{۵}{۱}}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}(-۳) = ۲ - \frac{۱۵}{۱۲} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

۲۱۲ ۴ ۳ ۲ ۱ ابتدا شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای منحنی را به‌هم وصل می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} A \left| \begin{matrix} ۰ \\ -۵ \end{matrix} \right. \\ B \left| \begin{matrix} ۸ \\ ۳ \end{matrix} \right. \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-۵-۳}{۰-۸} = \frac{-۸}{-۸} = ۱ \xrightarrow{\text{موازی}} m_{\text{مماس}} = ۱$$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر یک قرار دهیم.

$$y' = \frac{۴(x+۱) - ۱(۴x-۵)}{(x+۱)^۲} = \frac{۹}{(x+۱)^۲} = ۱ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۹ \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۱ \Rightarrow C \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۱ \end{matrix} \right. \\ x+۱ = -۳ \Rightarrow x = -۴ \ (\text{در بازه نیست})\ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

اکنون باید معادلهٔ خط مماس را در نقطهٔ C و با شیب یک بنویسیم.

$$y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - ۱ = ۱(x-۲) \Rightarrow y = x - ۱$$

عرض از مبدأ این خط برابر -۱ است.

۲۱۳ ۴ ۳ ۲ ۱

$$f(x) = (x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$$

حد خواسته‌شده را به‌صورت تعریف مشتق می‌نویسیم:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)} = \lim_{h\to ۰} \frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)}$$

چون $f(۵) = ۱ \times \sqrt[۳]{۸} = ۲$، داریم:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۵-h)-۱}{۵-h} \times \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵-h)-۲}{h} = \frac{f(۵-h)-۲}{h} \times \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵-h)-۲}{h}$$

$$= \frac{۲-۱}{۵} \times \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵+(-h)) - f(۵)}{h} = -\frac{۱}{۵} \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵+(-h)) - f(۵)}{-h}$$

با فرض $t = -h$ داریم:

مطابق آزمون قلم‌چی

$$-\frac{1}{5}\lim_{t\to 0}\frac{f(5+t)-f(5)}{t}=-\frac{1}{5}f'(5)$$

$$f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3}\Rightarrow f'(x)=1\times\sqrt[3]{x+3}+\frac{x-4}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

$$f'(5)=\sqrt[3]{8}+\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}=2+\frac{1}{3\times 4}=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$-\frac{1}{5}f'(5)=-\frac{1}{5}\times\frac{25}{12}=-\frac{5}{12}$$

۲۱۴ ۴ ۳ **۲** ۱ با فاکتور گرفتن ۲ از صورت کسر داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(f(x)-\frac{1}{2})}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}$$

در تابع $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$، توجه کنید که $f(1)=\frac{1}{2}$، پس:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

حال مشتق f در $x=1$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}})(2x^2+x-1)-(4x+1)x\sqrt{x}}{(2x^2+x-1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{(1+\frac{1}{2})(2+1-1)-(4+1)\times 1}{(2+1-1)^2}=\frac{\frac{3}{2}\times 2-5}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

۲۱۵ ۴ ۳ ۲ **۱** اگر مخرج تابع $g(x)$ را گویا کنیم داریم:

$$g(x)=\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{x}}{8}=\frac{1}{8}f(x)$$

حال عبارت مطلوب را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم: (صورت و مخرج $f'(1)g(1)-g'(1)f(1)$ را در $g^2(1)$ ضرب می‌کنیم:)

$$f'(1)g(1)-g'(1)f(1)=g^2(1)\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}=g^2(1)(\frac{f}{g})'(1)$$

$$\frac{f}{g}=\frac{f}{\frac{1}{8}f}=8$$

$\frac{f}{g}$ تابع ثابت است و مشتق آن برابر صفر است.

۲۱۶ ۴ ۳ **۲** ۱

$$f(x)=\frac{(2+\cos x)(\cos^2 x+4-2\cos x)}{(2-\cos x)(2+\cos x)}=\frac{4-2\cos x+\cos^2 x}{2-\cos x}$$

$$(f-2g)(x)=\frac{\cos^2 x-2\cos x}{2-\cos x}=-\cos x$$

$$(f-2g)'(x)=\sin x\Rightarrow f'(\frac{7\pi}{6})-2g'(\frac{7\pi}{6})=\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

توجه کنید که $2\pm\cos x$ همواره ناصفر است.

۲۱۷ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}=\frac{(3-\sin x)(9+3\sin x+\sin^2 x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)}=\frac{9+3\sin x+\sin^2 x}{3+\sin x}$$

$$3g'(\frac{5\pi}{3})-f'(\frac{5\pi}{3})=(3g-f)'(\frac{5\pi}{3})$$

$$3g-f=\frac{9}{3+\sin x}-\frac{9+3\sin x+\sin^2 x}{3+\sin x}=-\frac{3\sin x+\sin^2 x}{3+\sin x}=-\sin x$$

$$\Rightarrow(3g-f)'(\frac{5\pi}{3})=(-\sin)'(\frac{5\pi}{3})=-\cos(\frac{5\pi}{3})=-\frac{1}{2}$$

۲۱۸ ۴ ۳ ۲ ۱

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & ;\ ۰\le x<۴\\ [\frac{x}{۴}](x^۲-۹x) & ;\ ۴\le x<۸\end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ تابع، برای محاسبهٔ $f'(۲)$ از ضابطهٔ بالایی و برای محاسبهٔ $f'(۵)$ از ضابطهٔ پایینی استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲+۶x}\rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴+۶}{۲\times ۴}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$$

برای مشتق تابع در $x=۵$ باید از ضابطهٔ پایینی استفاده کنیم:

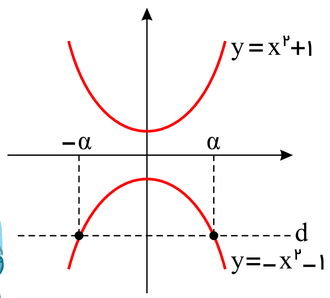
$$f(x)=[\frac{x}{۴}](x^۲-۹x)$$

ابتدا باید براکت را در $x=۵$ تعیین عدد کنیم و سپس مشتق بگیریم:

$$x=۵: f(x)=x^۲-۹x\Rightarrow f'(x)=۲x-۹\Rightarrow f'(۵)=۱$$

$$f'(۲)-f'(۵)=\frac{۵}{۴}-۱=\frac{۱}{۴}$$

۲۱۹ ۴ ۳ ۲ ۱ مطابق شکل، ضابطهٔ قرینه سهمی نسبت به محور xها برابر می‌شود با: $y=-x^۲-۱$ خط افقی d، نمودار تابع را در نقطه به طول‌های α و $-\alpha$ قطع می‌کند؛ از طرفی طبق فرض، مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند، یعنی:



$$\begin{cases}f'(\alpha)\cdot f'(-\alpha)=-۱\\ f(x)=-x^۲-۱\Rightarrow f'(x)=-۲x\end{cases}\Rightarrow(-۲\alpha)(+۲\alpha)=-۱\Rightarrow\alpha^۲=\frac{۱}{۴}$$

عرض نقاط مورد نظر (نقاط به طول α و $-\alpha$) برابر می‌شود با:

$$f(\alpha)=f(-\alpha)=-\alpha^۲-۱=\frac{-۱}{۴}-۱=-\frac{۵}{۴}$$

یعنی معادلهٔ خط d به‌صورت $y=\frac{-۵}{۴}$ است و مبدأ مختصات به فاصلهٔ $\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$ از خط d است.

۲۲۰ ۴ ۳ ۲ ۱

$$۱)\ x=۴\xrightarrow{\text{تابع}}y=۸\Rightarrow A\Big|\begin{matrix}۴\\۸\end{matrix}$$

$$۲)\ y'=\frac{۵\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵x-۴)}{x}\xrightarrow{x=۴}m_{\text{مماس}}=\frac{۱۰-\frac{۱}{۴}(۱۶)}{۴}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

$$۳)\ y-۸=\frac{۳}{۲}(x-۴)\rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۲\xrightarrow{x=۰}y=۲$$

۲۲۱ ۴ ۳ ۲ ۱ چون در $x=۴$ مماس مشترک دارند پس در این نقطه هم مقادیرشان با هم برابر است و هم مشتق این دو تابع در $x=۴$ با هم برابر هستند.

$$y_۱=f(x)=x\sqrt{x}\quad,\quad y_۲=g(x)=x^۲+ax+b$$

$$f(۴)=۴\times\sqrt{۴}=۸\Rightarrow g(۴)=۱۶+۴a+b\Rightarrow\boxed{۴a+b=-۸}\ (۱)$$

$$f'(۴)=g'(۴)\Rightarrow f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=۳$$

$$g'(x)=۲x+a\Rightarrow g'(۴)=۸+a\Rightarrow ۸+a=۳\Rightarrow a=-۵\xrightarrow{(۱)}\boxed{b=۱۲}$$

۲۲۲ ۴ ۳ ۲ ۱ تابع f اکیداً صعودی است؛ پس وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند:

$$\begin{cases}y=\sqrt{x}+۲\\ y=x\end{cases}\Rightarrow x=\sqrt{x}+۲\Rightarrow x-\sqrt{x}-۲=۰\Rightarrow(\sqrt{x}+۱)(\sqrt{x}-۲)=۰\Rightarrow\sqrt{x}-۲=۰\Rightarrow x=۴$$

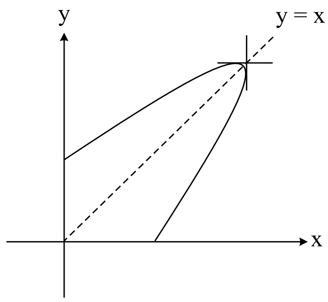
پس نقطهٔ تلاقی $(۴\ ,\ ۴)$ است. شیب خط مماس بر منحنی f در $x = ۴$ برابر $f'(۴)$ است:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۴}$$

ضابطهٔ تابع وارون را می‌یابیم:

$$f(x) = y = \sqrt{x} + ۲ \Rightarrow y - ۲ = \sqrt{x} \Rightarrow x = (y-۲)^۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = (x-۲)^۲ \Rightarrow (f^{-۱})'(x) = ۲(x-۲) \Rightarrow (f^{-۱})'(۴) = ۴$$

پس شیب خط مماس بر منحنی $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(۴\ ,\ ۴)$ برابر ۴ است. می‌دانیم شیب یک خط برابر تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور xهاست. اگر زاویهٔ بین این دو مماس و محور xها را به‌ترتیب $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ و زاویهٔ بین این دو مماس را α بنامیم، داریم:



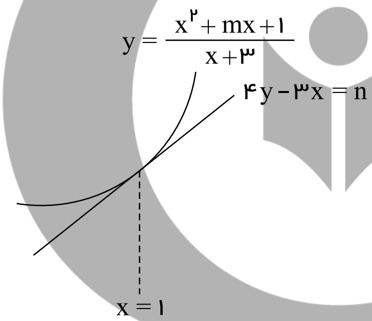
$$\alpha = \alpha_۲ - \alpha_۱ \Rightarrow \tan\alpha = \tan(\alpha_۲ - \tan\alpha_۱) = \frac{\tan\alpha_۲ - \tan\alpha_۱}{۱+\tan\alpha_۲\tan\alpha_۱} = \frac{۴-\frac{۱}{۴}}{۱+۴\times\frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{۱۵}{۴}}{۲} = \frac{۵}{۸}$$

بنابراین:

$$\sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} = \frac{۲\times\frac{۱۵}{۸}}{۱+\frac{۲۲۵}{۶۴}} = \frac{۲۴۰}{۲۸۹}$$

۲۲۳ ① ② ③ **④**

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



$$y = \frac{x^۲ + mx + ۱}{x+۳}$$

$$۴y - ۳x = n$$

$$۴y = ۳x + n \Rightarrow y = \frac{۳}{۴}x + \frac{n}{۴} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۳}{۴}$$

شیب خط مماس در $x = ۱$ برابر $\frac{۳}{۴}$ است، پس:

$$y = \frac{x^۲+mx+۱}{x+۳} \Rightarrow y' = \frac{(۲x+m)(x+۳) - ۱\times(x^۲+mx+۱)}{(x+۳)^۲}$$

$$y'(۱) = \frac{(۲+m)\times ۴ - (۱+m+۱)}{۴^۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴(m+۲) - ۲ - m = ۱۲ \Rightarrow ۴m + ۸ - ۲ - m = ۱۲ \Rightarrow ۳m = ۶ \Rightarrow m = ۲$$

$$y = \frac{x^۲+۲x+۱}{x+۳} \xrightarrow{x=۱} y = \frac{۱+۲+۱}{۱+۳} = ۱ \Rightarrow A(۱,۱)$$

نقطه $A(۱,۱)$ بر روی خط $۴y - ۳x = n$ نیز قرار دارد.

$$۴\times ۱ - ۳\times ۱ = n \Rightarrow n = ۱ \Rightarrow m + n = ۲ + ۱ = ۳$$

۲۲۴ ① ② **③** ④ خط $y = ۲x + b$ در نقطه‌ای به طول $x = ۱$ بر تابع $y = \frac{x+a}{ax+۱}$ مماس است، پس خط مماس یعنی مشتق د $x = ۱$ برابر ۲ است.

$$y' = \frac{۱\times(ax+۱) - a(x+a)}{(ax+۱)^۲} = \frac{ax+۱-ax-a^۲}{(ax+۱)^۲} = \frac{۱-a^۲}{(ax+۱)^۲}$$

$$y'(۱)=\frac{۱-a^۲}{(a+۱)^۲}=۲\Rightarrow ۲(a^۲+۲a+۱)=۱-a^۲$$

$$۲a^۲+۴a+۲-۱+a^۲=۰\Rightarrow ۳a^۲+۴a+۱=۰\Rightarrow (a+۱)(۳a+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} a=-۱\\ a=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

به ازای $a=-۱$ تابع $y=\frac{x-۱}{-x+۱}=-۱$ تابع ثابت است و خط $y=۲x+b$ نمی‌تواند بر آن مماس شود، پس $a=-\frac{۱}{۳}$ قابل قبول است و داریم:

$$y=\frac{x-\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}x+۱}=\frac{۳x-۱}{-x+۳}\xrightarrow{x=۱} y=\frac{۳-۱}{-۱+۳}=۱$$

نقطهٔ $A(۱,۱)$ بر روی خط $y=۲x+b$ نیز قرار دارد.

$$۱=۲+b\Rightarrow b=-۱\Rightarrow a-b=-\frac{۱}{۳}+۱=\frac{۲}{۳}$$

۲۲۵ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا نقطه تلاقی منحنی‌های f و g را می‌یابیم.

$$f(x)=g(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=\frac{۳}{۲}\sin x\Rightarrow \frac{۱}{۲}\cos x=\frac{۱}{۲}\sin x\Rightarrow \sin x=\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{cosx}=\frac{\cos x}{cosx}\Rightarrow \tan x=۱\xrightarrow{۰\le x\le\pi} x=\frac{\pi}{۴}$$

حال معادلهٔ خط مماس بر $f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x$ را در $x=\frac{\pi}{۴}$ می‌یابیم:

$$f(\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲}\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}\Rightarrow A(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\sqrt{۲}}{۴})$$

$$f'(x)=\cos x-\frac{۱}{۲}\sin x\rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\cos\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\Rightarrow \text{شیب خط مماس}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

$$y-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}(x-\frac{\pi}{۴})\xrightarrow{y=۰}-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}(x-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow x-\frac{\pi}{۴}=-۳$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴}-۳$$

۲۲۶ ۴ **۳** ۲ ۱ شیب خط $۶y-۳x=۱$ را می‌یابیم:

$$۶y=۳x+۱\Rightarrow y=\frac{۳}{۶}x+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۶}\Rightarrow \text{شیب}=\frac{۱}{۲}$$

$$\text{شیب خط مماس}=-۲$$

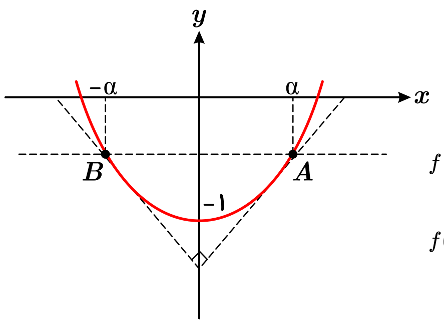
بنابراین در تابع $y=x^۲-۴x+۵$ باید نقطه‌ای را بیابیم که شیب خط مماس یعنی مشتق در آن برابر ۲- باشد.

$$y'=۲x-۴=-۲\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=۱-۴+۵=۲\Rightarrow \left|\begin{array}{l}x=۱\\ y=۲\end{array}\right.$$

۲۲۷ ۴ ۳ ۲ **۱**

مشتق تابع $f'(x)=۲x$ است.

نقاط تماس را $A(\alpha\,,\alpha^۲-۱)$ و $B(-\alpha\,,\alpha^۲-۱)$ فرض می‌کنیم. چون مماس‌های رسم‌شده در این نقاط، بر هم عمود هستند داریم:



$$f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-۱\rightarrow (۲\alpha)\times(-۲\alpha)=-۱\rightarrow ۴\alpha^۲=۱\rightarrow \alpha=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$f(\frac{۱}{۲})+f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}-۱+\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۳}{۲}$$

۲۲۸ ۴ **۳** ۲ ۱ توجه: خط مماس بر منحنی در نقطهٔ عطف از منحنی عبور می‌کند.

$$y=x^۳+ax^۲+bx-۱$$

$$y'=۳x^۲+۲ax$$

$$y''=۶x+۲x=۰\rightarrow ۶x=-۲a\rightarrow x=\frac{-۲a}{۶}=-\frac{a}{۳}$$

نقطهٔ $(-۱,-۴)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع است، پس:

$$-\frac{a}{۳}=-۱\Rightarrow a=۳$$

$$y=x^۳+ax^۲+bx-۱\xrightarrow{x=-۱,y=-۴}-۴=(-۱)^۳+۳(-۱)^۲+b(-۱)-۱\Rightarrow b=۵$$

بنابراین:

$$\frac{a}{b}=۰/۶$$

۲۲۹ ۴ ۳ ۲ **۱** می‌دانیم $(f(g(x)))'=g'(x)\cdot f'(g(x))$ است.

$$(fog)'(۲)=۶\to g'(۲)\cdot f'(g(۲))=۶$$

$$\text{: توجه کنید}\begin{cases}g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۱}\to g(۲)=\dfrac{۴+۱}{۲-۱}=۵\\[2mm] g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۱}\to g'(x)=\dfrac{۲(x-۱)-۱(۲x+۱)}{(x-۱)^۲}\to g'(۲)=-۳\end{cases}$$

$$g'(۲)\cdot f'(g(۲))=۶\to -۳f'(۵)=۶\to f'(۵)=-۲$$

۲۳۰ ۴ **۳** ۲ ۱ می‌دانیم که $(fog)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ است.

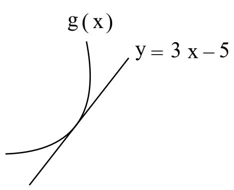
$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۳}$$

$$(fog)'(۱)=g'(۱)\cdot f'(g(۱))\Rightarrow\begin{cases}g(۱)=۱+۱=۲\\ g'(x)=۱+\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\to g'(۱)=۱+\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(۱)\cdot f'(g(۱))=\frac{۳}{۲}\times f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}=۲$$

۲۳۱ **۴** ۳ ۲ ۱

می‌دانیم که $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ و $(fog(x))'=g'(x)\cdot f'(g(x))$ است.



$$\Rightarrow g(۲)=۱\ ,\ \text{شیب خط مماس}=۳\Rightarrow g'(۲)=۳$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲(x-۱)}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow(fog)'(۲)=g'(۲)\cdot f'(g(۲))=۳f'(۱)=۳\times\frac{۴}{۳}=۴$$

۲۳۲ ۴ ۳ **۲** ۱ می‌دانیم:

$$\boxed{۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}}\ ,\ \boxed{(f(u))'=u'\cdot f'(u)}$$

$$g(x)=f(\sqrt{۱+\tan^۲ x})=f(\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}})=f(|\frac{۱}{\cos x}|)\xrightarrow{\text{ناحیه اول}}g(x)=f(\frac{۱}{\cos x})\Rightarrow g'(x)=(\frac{۱}{\cos x})'\cdot f'(\frac{۱}{\cos x})$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{۰-(-\sin x)}{\cos^۲ x}\cdot f'(\frac{۱}{\cos x})\Rightarrow g'(\frac{\pi}{۳})=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۴}}\times f'(۲)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow ۴f'(۲)=۱\Rightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۴}$$

۲۳۳ ۴ ۳ **۲** ۱

می‌دانیم:

$$y=f(u)\to y'=u'\cdot f'(u)$$

$$g(x)=f(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})\Rightarrow g'(x)=(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})'\cdot f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})=\frac{-۲\cos x}{(۱+\sin x)^۲}\cdot f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$$

به‌ازای $x=\dfrac{\pi}{۶}$ داریم:

$$g'(\frac{\pi}{6}) = \frac{-2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2})}{(1+\frac{1}{2})^2} \cdot f'(\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}) = \frac{-\sqrt{3}}{\frac{9}{4}} \cdot f'(\frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f'(\frac{1}{3}) = -\frac{3}{4}$$

۲۳۴ (۱) (۲) (۳) (۴) می‌دانیم: $(fog(x))' = f'(g(x)) \times g'(x)$، پس ابتدا $g(\frac{3}{\sqrt{8}})$ را حساب می‌کنیم:

$$g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}} = 2 \Rightarrow (fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) \cdot f'(2) \quad (*)$$

$$g(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = \frac{-2 \times \frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{(\frac{1}{8})^4}} = \frac{-16}{\sqrt{2}} = -8\sqrt{2}$$

حال برای محاسبهٔ $f'(2)$، در یک همسایگی $x=2$ ضابطهٔ f به‌صورت زیر است و داریم:

$$f(x) = (4x)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$\xrightarrow{(*)} (fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = -8\sqrt{2} \times 64 = -128\sqrt{2} \times 4$$

۲۳۵ (۱) (۲) (۳) (۴) می‌دانیم:

$$(fog(x))' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

ابتدا از تابع $g(x)$ در نقطهٔ $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ مشتق می‌گیریم. دقت کنید تابع در این نقطه پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x \Rightarrow g'(\frac{\sqrt{5}}{2}) = -\frac{1}{2} \times (\frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}} \times \sqrt{5} = -4\sqrt{5}$$

در قدم بعدی $g(x)$ را به‌ازای $x \to (\frac{\sqrt{5}}{2})^-$ محاسبه می‌کنیم.

$$x \to (\frac{\sqrt{5}}{2})^- \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{4})^-}} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^-} = 2^+$$

پس باید از تابع f به‌ازای $x \to 2^+$ مشتق بگیریم:

$$x \to 2^+ \Rightarrow [2^+] = 2 \Rightarrow f(x) = (2x)^3 = 8x^3 \Rightarrow f'(x) = 24x^2 \Rightarrow f'(2^+) = 24 \times 4$$

در نتیجه مقدار مشتق چپ تابع fog در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2}^-)) \times g'(\frac{\sqrt{5}}{2}^-) = 24 \times 4 \times (-4\sqrt{5}) = 8(-48\sqrt{5})$$

۲۳۶ (۱) (۲) (۳) (۴) هر کدام از توابع fog و gof را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad 1-x^2 < -1 \\ 1-x^2 & ; \quad -1 \le 1-x^2 \le 1 \\ 1 & ; \quad 1-x^2 > 1 \ \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow fog(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x^2 > 2 \\ 1-x^2 & ; \quad x^2 \le 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (fog(x))' = \begin{cases} 0 & x^2 > 2 \\ -2x & x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow$$ این تابع در نقاط مرزی $\{\pm\sqrt{2}\}$ مشتق‌ناپذیر است.

$$(gof)(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < -1 \\ 1-x^2 & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & ; \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow (gof(x))' = \begin{cases} -2x & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & ; \quad x < -1 \ \text{یا} \ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{نقاط مشتق‌ناپذیر} = \{-1, 1\}$$

در مجموع ۴ نقطهٔ مشتق‌ناپذیر در دو تابع وجود دارد.

۲۳۷ (۱) (۲) (۳) (۴) چون f متناوب با دورهٔ متناوب ۵ است، پس مشتق f نیز متناوب با دوره متناسب ۵ است، زیرا:

$$f(x+5) = f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} 1 \times f'(x+5) = f'(x) \Rightarrow f'(x+5) = f'(x)$$

حال مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$g(x)=f(x+۱)+f(۳x+۱۰)\to g'(x)=f'(x+۱)+۳f'(۳x+۱۰)$

$g'(-۲)=f'(-۲+۱)+۳f'(-۶+۱۰)=f'(-۱)+۳f'(۴)\quad (۱)$

f' متناوب با دورهٔ تناوب ۵ است، پس:

$$f'(۴)=f'(۴-۵)=f'(-۱)\xrightarrow{(۱)} g'(-۲)=۴f'(-۱)=۴\times\frac{۳}{۲}=۶$$

۲۳۸ ۱ ۲ ۳ **۴** از طرفین رابطهٔ داده‌شده، مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=f(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\cos x)$$

$$g'(x)=(۲(۱+\tan^۲ x)\tan x-\sqrt{۲}\sin x)f'(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\cos x)$$

$$g'(\tfrac{\pi}{۴})=(۲+(۱+\tan^۲\tfrac{\pi}{۴})\tan\tfrac{\pi}{۴}-\sqrt{۲}\sin\tfrac{\pi}{۴})F'(\tan^۲\tfrac{\pi}{۴}+\sqrt{۲}\cos\tfrac{\pi}{۴})$$

$$\sqrt{۳}=(۲\times۲\times۱-\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})f'(۱+\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})=(۴-۱)f'(۱+۱)\Rightarrow\sqrt{۳}=۳f'(۲)\Rightarrow f'(۲)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۳۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$(fog)'(-\sqrt[۳]{۲})=g'(-\sqrt[۳]{۲})\times f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))\Rightarrow x=-\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۲x}}\\[2mm] g(x)=\dfrac{۱}{۲x^۳}\end{cases}$$

$$f(g(x))=f(\frac{۱}{۲x^۳})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۲}{۲x^۳}}}=x\Rightarrow(fog)'=(x)'=۱$$

۲۴۰ ۱ **۲** ۳ ۴ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۲^+}\dfrac{۱}{x-۱}=۱\\ \lim\limits_{x\to۲^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۲^-}(-x^۲+ax+b)=-۴+۲a+b\\ f(۲)=۱\end{cases}$$

پس $-۴+۲a+b=۱$ و درنتیجه $۲a+b=۵$ است.

$$f'(۲^+)=f'(۲^-):\frac{-۱}{(x-۱)^۲}=-۲x+a\xrightarrow{x=۲}-۱=-۴+a\Rightarrow a=۳$$

$$\xrightarrow{۲a+b=۵}۶+b=۵\Rightarrow b=-۱$$

۲۴۱ **۱** ۲ ۳ ۴ ابتدا پیوستگی تابع را در نقطهٔ مرزی $x=۲$ بررسی می‌کنیم و نیز می‌دانیم به‌ازای $x<۲$ داریم: $|x^۲-۲x|=۲x-x^۲$ پس:

$$f(x)=\begin{cases}۲x-x^۲ & x<۲\\ \dfrac{۱}{۲}x^۲+ax+b & x\geq۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<۲\Rightarrow f(۲^-)=۴-۴=۰\\ x>۲\Rightarrow f(۲^+)=۲+۲a+b\end{cases}\Rightarrow\boxed{۲a+b=-۲}\quad(۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases}۲-۲x & x<۲\\ x+a & x>۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_-(۲)=-۲\\ f'_+(۲)=۲+a\end{cases}\Rightarrow۲+a=-۲\Rightarrow a=-۴\xrightarrow{(۱)}\boxed{b=۶}$$

درنتیجه داریم:

$$a+b=۲$$

۲۴۲ ۱ ۲ **۳** ۴ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۲^+}\dfrac{۸}{ax+b}=\dfrac{۸}{۲a+b}\\ \lim\limits_{x\to۲^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۲^-}(-x^۳+۶x)=-۸+۱۲=۴\\ f(۲)=-۸+۱۲=۴\end{cases}\Rightarrow\frac{۸}{۲a+b}=۴\Rightarrow۲a+b=۲$$

$$f'(۲^+)=f'(۲^-):\frac{-۸a}{(ax+b)^۲}=-۳x^۲+۶\xrightarrow{x=۲}\frac{-۸a}{(۲a+b)^۲}=-۱۲+۶$$

$$\xrightarrow{2a+b=2} \frac{-8a}{4} = -6 \Rightarrow -8a = -24 \Rightarrow a = 3\ ,\ b = -4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴۳

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \ge k \\ 2ax + b & x < k \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \ge k \\ 2a & x < k \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \text{شرط پیوستگی} : ak^2 + bk + c = 2ak + b \\ (2)\ \text{شرط مشتق‌پذیری} : 2ak + b = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow ak^2 + bk + c = 2a$$

$$\xrightarrow[c=a-b]{b=2a-2ak} ak^2 + (2a - 2ak)k + a - (2a - 2ak) = 2a$$

$$\Rightarrow ak^2 + 2ak - 2ak^2 + a - 2a + 2ak = 2a \Rightarrow -ak^2 + 4ak - 3a = 0 \xrightarrow{\div(-a)} k^2 - 4k + 3 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} k = 1 \\ k = 3(max) \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴۴ توجه: یک تابع چند ضابطه‌ای درصورتی که در نقطهٔ مرزی مشتق‌پذیر است که:

۱) در آن نقطه پیوسته باشد.

۲) مشتق چپ و مشتق راست در آن نقطه برابر باشند.

تابع باید در $x = a$ نیز مشتق‌پذیر باشد، پس در این نقطه در ابتدا باید پیوسته باشد.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = ab + c \quad , \lim_{x \to a^+} f(x) = \frac{1}{a} = f(a)$$

$$\xrightarrow{\text{پیوستگی}} ab + c = \frac{1}{a} \quad (\star)$$

تابع مشتق را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} b & x < a \\ -\dfrac{1}{x^2} & x \ge a \end{cases} \Rightarrow f'_-(a) = b\ , f'_+ = -\frac{1}{a^2}$$

مشتق‌های چپ و راست نیز باید با هم برابر باشند:

$$b = -\frac{1}{a^2} \xrightarrow{(\star)} a(-\frac{1}{a^2}) + c = \frac{1}{a} \Rightarrow c = \frac{2}{a} \Rightarrow ac = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴۵ ضابطه تابع را به صورت روبه‌رو ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 4\sqrt{ax}|x - \frac{3}{4}|$$

عبارت $\frac{3}{4} - a$ عامل صفرشونده در $x = \frac{3}{x}$ است و مشتق چپ و راست تابع در $x = \frac{3}{4}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} f'_+(\frac{3}{4}) = 4\sqrt{a(\frac{3}{4})} = 2\sqrt{3a} \\ f'_-(\frac{3}{4}) = -4\sqrt{a(\frac{3}{4})} = -2\sqrt{3a} \end{cases} \Rightarrow f'_+(\frac{3}{4}) - f'_-(\frac{3}{4}) = 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{3a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3a = \frac{6}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴۶ قرار است f نقطهٔ گوشه‌ای داشته باشد، پس نقطهٔ گوشه‌ای فقط $x = a$ می‌تواند باشد؛ بنابراین شرط پیوستگی f در a الزامی بوده، و مشتق چپ و راست در a باید نابرابر باشند. از شرط پیوستگی نتیجه می‌شود $m > 0$ و :

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x - a)^{m-1} & x > a \end{cases}$$

$$f'_-(a) = 0 \Rightarrow f'_+(a) \ne 0 \Rightarrow m = 1$$

$$m - 1 \ge 1 \Rightarrow f'_+(a) = 0 \Rightarrow \text{نقطهٔ گوشه‌ای نمی‌شود}\ a$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴۷ اگر (a, b) نقطهٔ گوشه‌ای باشد، مشتق چپ و راست در a باید نابرابر باشد.

$$f'_+(a) \ne f'_-(a)$$

$$m(x - a)^{m-1} \ne 0 \Rightarrow m = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴۸

$$f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x} \quad , \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

ریشه‌های سادهٔ قدرمطلق نقاط مشتق‌ناپذیر است، پس داریم:

$$x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین تابع در دو نقطه $x = \pm\sqrt{2}$ مشتق‌ناپذیر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴۹ تابع داده شده $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ است.

$$[۱,۴] \text{ آهنگ تغییر متوسط در } = \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{(۸-\frac{۱}{۴})-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳} = \frac{\frac{۳۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۳} = \frac{۱۱}{۴}$$

$$x=۲ \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای در } = f'(۲) \Rightarrow f'(x) = x + \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f'(۲) = ۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

اختلاف این دو $۰٫۵ = \frac{۲}{۴} = \frac{۱۱}{۴} - \frac{۹}{۴}$ است.

۲۵۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰} = \frac{۱۲-۲}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'(x) = \sqrt{۴x+۱} + \frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}(x+۲) \Rightarrow f'(\frac{۳}{۴}) = ۲ + \frac{۱۱}{۴} = \frac{۱۹}{۴} = ۴٫۷۵$$

پس $۰٫۲۵ = ۴٫۷۵ - ۵$ است.

۲۵۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$f(x) = \sqrt{۲x+۱} + \frac{۱}{x+۱} \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = ۱+۱ = ۲ \\ f(۴) = ۳ + \frac{۱}{۵} = ۳٫۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow [۰,۴] \text{ آهنگ تغییر متوسط تابع در } = \frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰} = \frac{۳٫۲-۲}{۴} = \frac{۱٫۲}{۴} = ۰٫۳$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر همان مشتق است:

$$f'(x) = \frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x+۱}} - \frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{۳}{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۳+۱}} - \frac{۱}{(\frac{۳}{۲}+۱)^۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{۲۵} = \frac{۲۵-۸}{۵۰} = \frac{۱۷}{۵۰} = ۰٫۳۴$$

بنابراین تفاضل آن‌ها برابر $۰٫۰۴ = ۰٫۳ - ۰٫۳۴$ است.

۲۵۲ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$[۵,۶] \text{ آهنگ تغییر متوسط در } = \frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵} = \frac{\sqrt{۲۱-۳۶+۲۴} - \sqrt{۲۱-۲۵+۲۰}}{۱} = ۳ - ۴ = -۱$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = y' = \frac{۱(-۲x+۴)}{۲\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}} = \frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}$$

$$\xrightarrow{\text{برابری}} \frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}} = -۱ \Rightarrow -x+۲ = -\sqrt{۲۱-x^۲+۴x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲+۴-۴x = ۲۱-x^۲+۴x \Rightarrow ۲x^۲-۸x-۱۷=۰ \Rightarrow x = ۲ \pm \frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

اما $x = ۲ - \frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$ در معادله صدق می‌کند.

۲۵۳ **(۱)** (۲) (۳) (۴) آهنگ تغییر متوسط دو تابع داده‌شده در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}\right]$ را می‌یابیم.

$$y = \sin x \cos ۲x \Rightarrow \frac{y(\frac{\pi}{۲}) - y(\frac{\pi}{۴})}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}} = \frac{\sin\frac{\pi}{۲}\cos\pi - \sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۱\times(-۱)-۰}{\frac{\pi}{۴}} = -\frac{۴}{\pi}$$

$$y = \sin^۴ x - \cos^۴ x = \underbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}_{۱}(\sin^۲ x - \cos^۲ x) = \sin^۲ x - \cos^۲ x = -\cos ۲x$$

$$\frac{y(\frac{\pi}{۲}) - y\frac{\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}} = \frac{-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۴}} = \frac{-(-۱)+۰}{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۴}{\pi}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{-\frac{۴}{\pi}}{\frac{۴}{\pi}} = -۱$$

۲۵۴ ۱ **۲** ۳ ۴ دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{۱\}$ می‌شود و تابع f روی این دامنه، پیوسته است:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{۱+x^۲}\ ;\ x<۰\\ \dfrac{x}{۱-x^۲}\ ;\ x\geq ۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۱-x^۲}{(۱+x^۲)^۲}\ ;\ x<۰\\ \dfrac{۱+x^۲}{(۱-x^۲)^۲}\ ;\ x\geq ۰\end{cases}$$

تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق دارد و مقدارش برابر $f'(۰)=۱$ است. با توجه به دامنهٔ هر ضابطه، تابع f فقط در نقطه $x=-۱$ مشتق برابر صفر دارد، یعنی $f'(-۱)=۰$؛ در نتیجه این تابع فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد. توجه: نقطه $x=۱$ جزء دامنهٔ تابع نیست و نباید لحاظ شود.

۲۵۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$x(۱-|x|)\geq ۰\Rightarrow x\leq -۱$ یا $۰\leq x\leq ۱$: دامنهٔ تعریف

$D_f=(-\infty,-۱)\cup[۰,۱]$

با توجه به تعریف کتاب نقاط با طول $x=-۱,۰,۱$ نقاط بحرانی خواهند بود.

$f'(x)=\dfrac{۱\pm ۲x}{۲\sqrt{x-x|x|}}=۰\quad x=\pm\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow x=\dfrac{۱}{۲}$ با توجه به دامنه f ⇐ ۴نقطه بحرانی و یک اکسترمم نسبی داریم

۲۵۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

$f(x)=\sqrt{x(|x|-۱)}\Rightarrow D_f=[-۱\,,۰]\cup[۱\,,+\infty)$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x^۲-x} & -۱\leq x\leq ۰\\ \sqrt{x^۲-x} & x\geq ۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-۲x-۱}{۲\sqrt{-x^۲-x}} & -۱<x<۰\\ \dfrac{۲x-۱}{۲\sqrt{x^۲-x}} & x>۱\end{cases}$$

$f'(x)=۰\Rightarrow x=-\dfrac{۱}{۲}\,,f'_-(\dfrac{-۱}{۲})>۰\,,f'_+(\dfrac{-۱}{۲})<۰\Rightarrow\dfrac{-۱}{۲}:\ max$ طول نقطهٔ

نقاط بحرانی $=\left\{-۱\,,۰\,,۱\,,\dfrac{-۱}{۲}\right\}\Rightarrow k=۴\,,m=۱\,,n=۰\Rightarrow\dfrac{km+n}{k-n}=۱$

۲۵۷ ۱ ۲ **۳** ۴ برای محاسبهٔ اکسترمم‌های مطلق یک تابع، عرض‌های نقاط بحرانی را با مقادیر تابع در دو سر دامنه مقایسه می‌کنیم:

$f(x)=\dfrac{x^۲+۲x}{(x-۱)^۲}\quad,\quad D_f=\mathbb{R}-\{۱\}=(-\infty,+\infty)-\{۱\}$

$f'(x)=\dfrac{(۲x+۲)\cdot(x-۱)^۲-۲(x-۱)\cdot(x^۲+۲x)}{(x-۱)^۴}=۰$

$۲(x-۱)\Big((x+۱)\cdot(x-۱)-(x^۲+۲x)\Big)=۰\Rightarrow x=۱\notin D_f$

$(x^۲-۱-x^۲-۲x)=۰\Rightarrow x=-\dfrac{۱}{۲}$ طول نقطهٔ بحرانی

$f(-\dfrac{۱}{۲})=\dfrac{\frac{۱}{۴}-۱}{\frac{۹}{۴}}=-\dfrac{۱}{۳}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^۲}{x^۲}=۱$

عدد $-\dfrac{۱}{۳}$ مینیمم مطلق تابع است که در $x=-\dfrac{۱}{۲}$ قرار دارد و خط قائم $x=۱$ مجانب قائم است چون ریشهٔ مخرج است اما ریشهٔ صورت نیست.

فاصله $=۱-(-\dfrac{۱}{۲})=\dfrac{۳}{۲}$

۲۵۸ ۱ **۲** ۳ ۴ نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم:

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-۲x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}-\dfrac{۲}{۲\sqrt{a-۲x}}=۰$

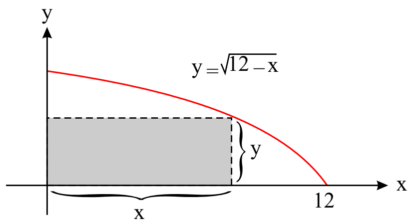
$\Rightarrow\sqrt{a-۲x}=۲\sqrt{x}\Rightarrow a-۲x=۴x\Rightarrow x=\dfrac{a}{۶}$ (بحرانی)

دامنهٔ تابع هم به‌صورت $۰\leq x\leq\dfrac{a}{۲}$ است و در نتیجه:

$$\begin{cases} f(۰)=\sqrt{a} \\ f(\frac{a}{۲})=\sqrt{\frac{a}{۲}}\ (min) \\ f(\frac{a}{۶})=\sqrt{\frac{a}{۶}}+\sqrt{\frac{۲a}{۳}}=\frac{۳}{\sqrt{۶}}\sqrt{a}\ (max) \end{cases}$$

طبق فرض : $\sqrt{\frac{a}{۲}}\times\frac{۳}{\sqrt{۶}}\sqrt{a}=\sqrt{۱۲}\Rightarrow\frac{۳}{\sqrt{۱۲}}a=\sqrt{۱۲}\Rightarrow ۳a=۱۲\Rightarrow a=۴$

۲۵۹ ۴ ۳ ۲ ۱



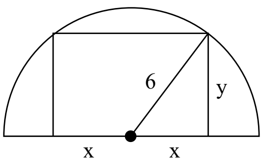
$$S=x\cdot y=x\cdot\sqrt{۱۲-x}\xrightarrow{S'=۰}\sqrt{۱۲-x}+\frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲-x}}x=۰$$

$$\rightarrow\sqrt{۱۲-x}=\frac{x}{۲\sqrt{۱۲-x}}\rightarrow ۲(۱۲-x)=x\rightarrow ۲۴-۲x=x$$

$$\rightarrow ۳x=۲۴\rightarrow x=۸\rightarrow S_{Max}=۸\sqrt{۱۲-۸}=۸\times ۲=۱۶$$

۲۶۰ ۴ ۳ ۲ ۱ **روش اول:**

مطابق شکل، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۶ را نوشته و با اعمال شرط $y\geq ۰$ معادله را به معادلهٔ نیم‌دایره تبدیل می‌کنیم. طبق شکل x برابر با صفر طول مستطیل است.



$$x^۲+y^۲=۳۶\rightarrow y^۲=۳۶-x^۲\xrightarrow{y\geq ۰}y=\sqrt{۳۶-x^۲}\quad(۱)$$

مساحت مستطیل برابر است با:

$$S=۲xy\xrightarrow{(۱)}S(x)=۲x\cdot\sqrt{۳۶-x^۲}\ :\ \text{یک متغیره}$$

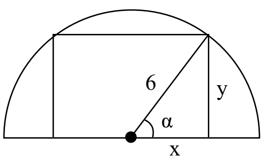
$$S'(x)=۰\Rightarrow ۲\sqrt{۳۶-x^۲}+\frac{۱(-۲x)}{۲\sqrt{۳۶-x^۲}}(۲x)=۰$$

$$\rightarrow ۲\sqrt{۳۶-x^۲}=\frac{۲x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}\rightarrow ۳۶-x^۲=x^۲\rightarrow ۲x^۲=۳۶$$

$$\rightarrow x^۲=۱۸\rightarrow x=۳\sqrt{۲}\ ,\ y=۳\sqrt{۲}\rightarrow S_{Max}=۲(۳\sqrt{۲})(۳\sqrt{۲})=۳۶$$

روش دوم:

مطابق شکل زیر، از نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α استفاده می‌کنیم:



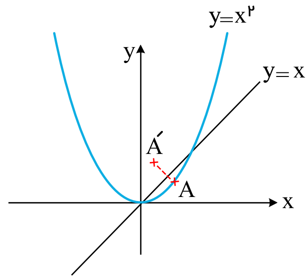
$$\sin\alpha=\frac{y}{۶}\rightarrow y=۶\sin\alpha\ ,\ \cos\alpha=\frac{x}{۶}\rightarrow x=۶\cos\alpha$$

$$S = 2xy = 2(6\cos\alpha)(6\sin\alpha) = 72\sin\alpha\cos\alpha = 72(\frac{1}{2}\sin 2\alpha) = 36\sin 2\alpha$$

این عبارت وقتی ماکزیمم است که $\sin 2\alpha = 1$ باشد، پس $S_{Max} = 36$ است.

۲۶۱ ۱ ۲ **۳** ۴

نقطهٔ A روی سهمی است، پس مختصات آن به‌صورت $A(\alpha, \alpha^2)$ خواهد بود. همچنین نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت به خط $y = x$ است، پس $A'(\alpha^2, \alpha)$ فاصله این دو نقطه از هم برابر است با:



$$|AA'| = \sqrt{(\alpha^2 - \alpha)^2 + (\alpha - \alpha^2)^2} = \sqrt{2\alpha^4 - 4\alpha^3 + 2\alpha^2} = d$$

$$\xrightarrow{d} d' = \frac{8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 4\alpha}{2\sqrt{2\alpha^4 - 4\alpha^3 + 2\alpha^2}} \xrightarrow{d'=0} 8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 4\alpha = 0$$

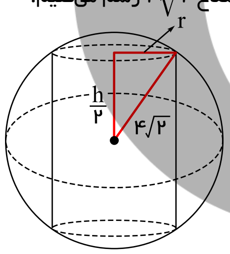
$$\Rightarrow 4\alpha(2\alpha^2 - 3\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{بین دو نقطه تقاطع}} \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = |AA'| = \sqrt{2(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۶۲ ۱ **۲** ۳ ۴

مطابق شکل روبه‌رو، استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع را محاط در کره‌ای به شعاع $4\sqrt{2}$ رسم می‌کنیم.

مساحت جانبی استوانه: $S_{\text{جانبی}} = 2\pi r \times h$



مساحت جانبی را برحسب h می‌نویسیم و نقاط بحرانی تابع $S(h)$ را به دست می‌آوریم. طبق فیثاغورس داریم:

$$\text{فیثاغورس} : (4\sqrt{2})^2 = r^2 + (\frac{h}{2})^2 \Rightarrow r^2 = 32 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow r = \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}}$$

پس:

$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi \times \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}} \times h$$

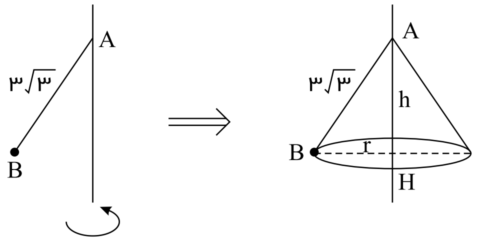
$$\Rightarrow S = 2\pi \times \sqrt{32h^2 - \frac{h^4}{4}} \Rightarrow S' = 2\pi \times \frac{64h - h^3}{2\sqrt{32h^2 - \frac{h^4}{4}}}$$

$$\xrightarrow{S'=0} 64h - h^3 = 0 \xrightarrow{h>0} \begin{cases} h = 0 \ \text{غ.ق.ق} \\ h = 8 \Rightarrow r = \sqrt{32 - \frac{8^2}{4}} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{max} = 2\pi \times 4 \times 8 = 64\pi$$

۲۶۳ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به شکل مقابل می‌خواهیم حجم مخروط بیشترین مقدار ممکن باشد. داریم:



$$r^2 + h^2 = (3\sqrt{3})^2$$
$$r^2 + h^2 = 27 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}h(27 - h^2) = \frac{\pi}{3}(27h - h^3)$$

مشتق v برحسب h را به‌دست می‌آوریم:

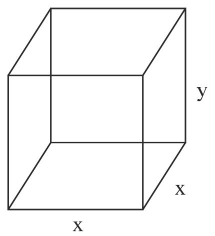
$$V' = \frac{\pi}{3}(27 - 3h^2) = 0 \Rightarrow 27 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3$$

h		3	
V'	+	0	−
V	↗		↘

طبق جدول فوق به‌ازای $h = 3$ مقدار v ماکزیمم است.

۲۶۴ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به شکل مقابل، مساحت کل مکعب در باز را بصورت تابعی برحسب x می‌نویسیم.



حجم : $V = x^2 y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x^2}\ (1)$

$$S = 4xy + x^2 \xrightarrow{(1)} S = 4x \times \frac{4}{x^2} + x^2 = x^2 + \frac{16}{x}$$

$$S' = 2x + \frac{0 - 16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$$

x		2	
S'	−	0	+
S	↘		↗

طبق جدول فوق، به ازای $x = 12$ مقدار S مینیمم است.

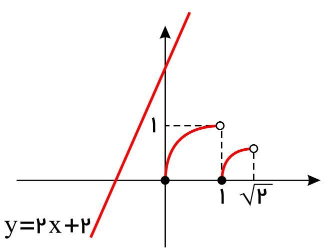
$$S_{\min} = 2^2 + \frac{16}{2} = 4 + 8 = 12$$

۲۶۵ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم:

$$y = \sqrt{x - [x^2]} \to x - [x^2] \geq 0 \to x \geq [x^2]$$

$$\xrightarrow{\text{بازه‌بندی}} \begin{cases} 0 \leq x < 1 \to x \geq 0 \checkmark \\ 1 \leq x < \sqrt{2} \to x \geq 1 \checkmark \end{cases} \to D_y = [0, \sqrt{2}]$$

مطابق شکل، کمترین فاصلهٔ نقاط تابع، مربوط به نمودار سمت چپ است. پس $[x^2] = 0$ و نقطه را به‌صورت $P(x, \sqrt{x})$ می‌گیریم، پس:



تابع فاصله: $h(x) = \frac{|2x - \sqrt{x} + 2|}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{مشتق}} h'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4}$

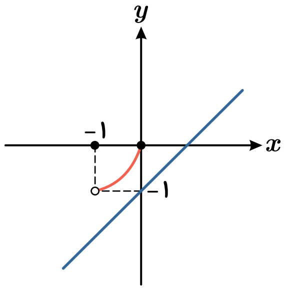
$$\Rightarrow \min(h) = \frac{\left|2(\frac{1}{16}) - \frac{1}{4} + 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{8\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

۲۶۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$-x - [x^2] \geq 0 \Rightarrow -x \geq [x^2] \to D_f = [-1, 0] \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x \in (-1, 0) \\ 0 & x = -1, 0 \end{cases}$$

$$A(x\,,-\sqrt{-x})\xrightarrow{x-y-۱=۰}AH=\frac{|x+\sqrt{-x}-۱|}{\sqrt{۱+۱}}\to AH'=\frac{\left|۱+\frac{-۱}{۲\sqrt{-x}}\right|}{\sqrt{۲}}=۰$$

$$۱=\frac{۱}{۲\sqrt{-x}}\to\sqrt{-x}=\frac{۱}{۲}\to x=-\frac{۱}{۴}\;;\;AH=\frac{\left|(-\frac{۱}{۴})+\sqrt{\frac{۱}{۴}}-۱\right|}{\sqrt{۲}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$$



۲۶۷ ۱ **۲** ۳ ۴ از تابع f، مشتق می‌گیریم. تابع f' را در دامنهٔ f یعنی $[۰,+\infty)$ تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=۲\sqrt{x}-\frac{۳}{۲}(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}\xrightarrow{x\geq ۰}f'(x)>۰$$

$D_f: x\geq ۰$ و تابع در $x=۱$ دارای مجانب قائم است، پس نمی‌تواند در کل بازهٔ $(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$ صعودی باشد و گزینهٔ ۱ نادرست است. در آخر اینکه با توجه به نامنفی بودن x، مشتق تابع همواره مثبت است.

x		0		1	
y′			+	‖	+
y			↗	‖	↗

مجانب قائم

پس تابع در بازه‌های $(۱,+\infty)$ و $(۰,۱)$ صعودی است، ولی در اجتماع آنها صعودی نیست.

۲۶۸ **۱** ۲ ۳ ۴ تابع بر $x=۲$ دارای مجانب قائم است. تابع f' را حساب کرده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$y'=\frac{۴x^۳(x^۳-۸)-۳x^۲(x^۴)}{(x^۳-۸)^۲}=\frac{۴x^۶-۳۲x^۳-۳x^۶}{(x^۳-۸)^۲}=\frac{x^۶-۳۲x^۳}{(x^۳-۸)^۲}\xrightarrow{y'=۰}x^۶-۳۲x^۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=\sqrt[۳]{۳۲}=۲\sqrt[۳]{۴}\end{cases}$$

x		0		2		$2\sqrt[3]{4}$	
y′	+	0	−	‖	−	0	+
y	↗		↘	‖	↘		↗

مجانب
قائم

تابع در بازه‌های $(۰,۲)$ و $(۲,۲\sqrt[۳]{۴})$ اکیداً نزولی است؛ بازهٔ بزرگ‌تر $(۰,۲)$ است که طول آن برابر با ۲ است.

۲۶۹ **۱** ۲ ۳ ۴

$$f(x)=\begin{cases}۳\sqrt[۳]{x}+x & x\geq ۰\\ ۳\sqrt[۳]{x}-x & x\leq ۰\end{cases}$$

وقتی $x\geq ۰$ تابع f مجموع دو تابع اکیداً صعودی است. پس خود نیز اکیداً صعودی است. به ازای $x<۰$ باید نامعادلهٔ $f'(x)\geq ۰$ را حل کنیم تا بازه‌ای را که تابع در آن صعودی است، بیابیم:

$$f'(x)=\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=\frac{۱-\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۲}}\geq ۰\Rightarrow ۱-\sqrt[۳]{x^۲}\geq ۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}\leq ۱\Rightarrow x^۲\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\xrightarrow{x<۰}-۱\leq x<۰$$

پس تابع روی بازهٔ $[-۱\,,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

توجه: تابع در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر اما پیوسته است؛ از آنجا که تابع در دو طرف این نقطه اکیداً صعودی است، یکنوایی تابع در این نقطه تغییر نمی‌کند، پس تابع روی $[-۱\,,+\infty)$ صعودی است.

۲۷۰ ۱ ۲ **۳** ۴ تابع روی $R-\{\pm\sqrt{۲}\}$ مشتق‌پذیر است. نامعادلهٔ $f'(x)\leq ۰$ را حل می‌کنیم تا بازه‌هایی را که در آنها تابع اکیداً نزولی است بیابیم:

$$f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۲-۲)-۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x^۵-۸x^۳+۶x}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۴-۴x^۲+۳)}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

x		$-\sqrt{۳}$		$-\sqrt{۲}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۲}$		$\sqrt{۳}$	
f(x)	−	0	+	‖	+	0	−	0	+	0	−	‖	−	0	+

چون $-۲<x<۲$، پس تابع در چهار بازهٔ $(-۲\,,-\sqrt{۳}]$، $[-۱\,,۰]$، $[۱\,,\sqrt{۲})$ و $(\sqrt{۲}\,,\sqrt{۳}]$ اکیداً نزولی است.

۲۷۱ ۱ **۲** ۳ ۴ توجه: شرط اینکه یک تابع هموگرافیک در بازهٔ مورد نظر نزولی باشد این است که:

۱) مجانب قائم (ریشهٔ مخرج) خارج آن بازه باشد.

۲) مشتق تابع در آن بازه، منفی باشد.

در ابتدا، بازهٔ $(۱\ ,\ +\infty)$ باید زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع باشد، یعنی مجانب قائم نمودار در این بازه نباشد:

$$\Rightarrow ۱-m\leq ۱\Rightarrow m\geq ۰\quad (۱)$$

از طرفی تابع باید نزولی باشد:

$$\Rightarrow y'=\frac{m(m-۱)-۲}{(x+m-۱)^۲}<۰\Rightarrow m^۲-m-۲=(m-۲)(m+۱)<۰$$
$$\Rightarrow -۱<m<۲\quad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۰\leq m<۲\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=۰,m=۱$$

۲۷۲ ① ② ③ **④** **روش اول:**

$x=۴$ ریشهٔ سادهٔ داخل قدر مطلق است (نقطهٔ گوشه) بنابراین در $x=۴$ مشتق وجود ندارد (بحرانی).

$$f(x)=\begin{cases}x(x-۴) & x\geq ۴\\ -x(x-۴) & x<۴\end{cases}\rightarrow f(x)=\begin{cases}x^۲-۴x & x\geq ۴\\ -x^۲+۴x & x<۴\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۴ & x>۴\\ -۲x+۴ & x<۴\end{cases}$$

اگر مشتق را مساوی صفر قرار دهیم $x=۲$ به دست می‌آید.

x	$-\infty$		۲		۴		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	وجود ندارد	$+$	
y		$\nearrow$	۴ *Max*	$\searrow$	۰ *Min*	$\nearrow$	

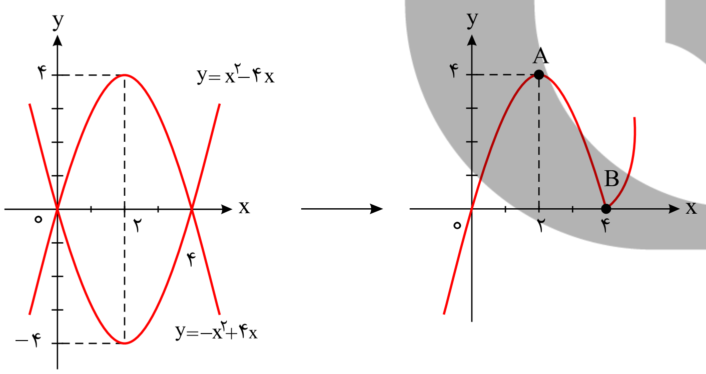
$$\begin{cases}A\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right.\\ B\left|\begin{matrix}۴\\۰\end{matrix}\right.\end{cases}\rightarrow AB=\sqrt{(۲-۴)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

روش دوم:

می‌توانیم نمودار تابع داده‌شده را رسم کنیم.

$x\geq ۴\rightarrow y=x^۲-۴x\rightarrow S\left|\begin{matrix}۲\\-۴\end{matrix}\right.$ و $x=۰,۴$: محل برخورد تابع با محور x ها

$x<۴\rightarrow y=-x^۲+۴x\rightarrow S\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right.$ و $x=۰,۴$: محل برخورد تابع با محور x ها



$$\begin{cases}A\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right.\\ B\left|\begin{matrix}۴\\۰\end{matrix}\right.\end{cases}\rightarrow AB=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

۲۷۳ ① ② **③** ④ ابتدا حد تابع در بی‌نهایت را حساب می‌کنیم تا مجانب افقی آن به دست آید. برای به دست آوردن نقطهٔ ماکسیمم نسبی، از تابع مشتق می‌گیریم و مشتق را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{۲x-x^۲}{(x+۱)^۲}\quad,\quad \text{مجانب افقی}: y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۲}{x^۲}=-۱$$

$$f'(x)=\frac{(۲-۲x)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(۲x-x^۲)}{(x+۱)^۴}=\frac{(x+۱)\Big((۲-۲x)(x+۱)-۲(۲x-x^۲)\Big)}{(x+۱)^۴}$$

$$f'(x)=\frac{۲x+۲-۲x^۲-۲x-۴x+۲x^۲}{(x+۱)^۳}=\frac{-۴x+۲}{(x+۱)^۳}=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱-\frac{۱}{۴}}{\frac{۹}{۴}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۹}{۴}} = \frac{۱}{۳}$$

x	$-\infty$	-۱		$\frac{۱}{۲}$	$-\infty$
$f'(x)$	$-$	ت.ن	$+$	۰	$-$
$f(x)$	$\searrow$	ت.ن	$\nearrow$	max	$\searrow$

$y = \frac{۱}{۳}$ عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است، پس فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تا خط $y = -۱$ به‌صورت زیر است.

$$|\frac{۱}{۳} - (-۱)| = \frac{۴}{۳}$$

۲۷۴ ۱ **۲** ۳ ۴ نکته: ریشه‌های سادهٔ داخل قدر مطلق به شرط آنکه عامل صفرشونده پشت آنها نباشد، زاویه‌دار (گوشه) هستند که مشتق‌پذیر نبود و جزء نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی به حساب می‌آیند. $x = ۲$ و $x = -۲$

این دو نقطه در واقع نقاط مرزی هستند که در تابع دو ضابطه‌ای یا همان قدر مطلق وجود دارند.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\overbrace{x^۲(x^۲-۴)}^{x^۴-۴x^۲}}{x^۲-۱} & x \geq ۲ \text{ یا } x \leq -۲ \\ \dfrac{\overbrace{-x^۲(x^۲-۴)}^{-(x^۴-۴x^۲)}}{x^۲-۱} & -۲ < x < ۲ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(۴x^۳-۸x)(x^۲-۱)-۲x(x^۴-۴x^۲)}{(x^۲-۱)^۲} & x > ۲ \text{ یا } x < -۲ \\ \dfrac{-[(۴x^۳-۸x)(x^۲-۱)-۲x(x^۴-۴x^۲)]}{(x^۲-۱)^۲} & -۲ < x < ۲ \end{cases}$$

ریشه‌های هر دو قسمت یکسان هستند پس یکی از ضابطه‌های f' را مساوی صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$۴x^۵ - ۴x^۳ - ۸x^۳ + ۸x - ۲x^۵ + ۸x^۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۵ - ۴x^۳ + ۸x = ۰ \Rightarrow ۲x(\underbrace{x^۴ - ۲x^۲ + ۴}_{\Delta<۰}) = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

این ریشه برای ضابطهٔ دوم f' قابل‌قبول است و نه ضابطهٔ اول؛ پس در کل سه اکسترمم نسبی داریم.

۲۷۵ ۱ ۲ **۳** ۴ برای پیدا کردن طول نقاط A و B، مشتق تابع f را به دست آورده و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ \xrightarrow[f'(x)=۰]{\div ۶} x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = ۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{در ضابطهٔ } f]{\text{جایگذاری}} \begin{cases} A(-۱, ۸) \\ B(۲, -۱۹) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{۸-(-۱۹)}{-۱-۲} = -۹ \Rightarrow$$ شیب خطی که از نقاط اکسترمم نسبی تابع عبور می‌کند.

نقاط مدّنظر باید دارای مشتق -۹ باشند تا شیب خط مماس بر آنها موازی پاره‌خط AB باشد.

$$۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = -۹ \Rightarrow ۶x^۲ - ۶x - ۳ = ۰ \xrightarrow{\Delta>۰}$$ ۲ جواب دارد.

یعنی ۲ نقطه یافت می‌شود.

۲۷۶ ۱ **۲** ۳ ۴ نقطه $A(۰, ۴)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ است، پس داریم:

$$f(۰) = ۴ \Rightarrow c = ۴ \Rightarrow f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + ۴$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow f'(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ + ۰ + b = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

$$f(x) = x^۳ + ax^۲ + ۴ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax = x(۳x + ۲a)$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ۳x + ۲a = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۲a}{۳} \end{cases}$$

$x = -\frac{۲a}{۳}$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است که در این نقطه مقدار تابع نیز صفر است.

$$f(-\frac{۲a}{۳}) = ۰ \Rightarrow (-\frac{۲a}{۳})^۳ + a(-\frac{۲a}{۳})^۲ + ۴ = ۰ \Rightarrow -\frac{۸a^۳}{۲۷} + \frac{۴a^۳}{۹} + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۴a^۳}{۲۷} = -۴ \Rightarrow a^۳ = -۲۷$$

$a=-۳ \Rightarrow$ طول نقطه مینیمم نسبی $x=-\frac{۲a}{۳}=\frac{-۲(-۳)}{۳}=۲$

۲۷۷ ۴ ۳ ۲ **۱** $x=۰$ و $x=-۲$ طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=x^۳+ax^۲-۲bx-۴$ هستند، پس $x=۰$ و $x=-۲$ ریشه‌های مشتق تابع هستند.

$$y'=۳x^۲+۲ax-۲b \Rightarrow \text{ریشه‌ها} \begin{cases} x=۰ \\ x=-۲ \end{cases}$$

جمع ریشه‌ها : $S=-۲+۰=-\frac{۲a}{۳} \Rightarrow -۶=-۲a \Rightarrow ۹=۳$

ضرب ریشه‌ها : $P=-۲\times ۰=\frac{-۲b}{۳} \Rightarrow b=۰$

$$y=x^۳+۳x^۲-۴ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-۴ \Rightarrow A(۰,-۴) \\ x=-۲ \Rightarrow =-۸+۱۲-۴=۰ \Rightarrow B(-۲,۰) \end{cases}$$

نقاط A و B نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند، پس فاصلهٔ A و B را می‌یابیم.

$$AB=\sqrt{(-۲-۰)^۲+(۰+۴)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

۲۷۸ ۴ ۳ **۲** ۱ نقطهٔ $A(۰,۰)$ اکسترمم نسبی تابع است. پس مشتق در $x=۰$ برابر صفر است.

$$y=ax^۳+bx^۲+cx+d \Rightarrow y'=۳ax^۲+۲bx+c \xrightarrow{x=۰} y'=۰+۰+c=۰ \Rightarrow c=۰$$

نقطهٔ $A(۰,۰)$ در تابع صدق می‌کند.

$$y=ax^۳+bx^۲+cx+d \xrightarrow[y=۰]{x=۰} ۰=۰+۰+۰+d \Rightarrow d=۰$$

$$y=ax^۳+bx^۲$$

نقطهٔ $B(۱,۱)$ نیز اکسترمم نسبی تابع است، بنابراین داریم:

$$y=ax^۳+bx^۲ \xrightarrow[y=۱]{x=۱} ۱=a+b \rightarrow a=۱-b \ (۱)$$

$$y'=۳ax^۲+۲bx \xrightarrow{x=۱} ۳a+۲b=۰ \xrightarrow{(۱)} ۳(۱-b)+۲b=۰ \Rightarrow ۳-۳b+۲b=۰ \Rightarrow b=۳ \xrightarrow{(۱)} a=۱-۳=-۲$$

$$a\cdot b=-۲\times ۳=-۶$$

۲۷۹ ۴ ۳ **۲** ۱ مجموع ریشه‌ها به‌صورت زیر است:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{m-۲}{m^۲-۱}$$

$$\Delta>۰ \rightarrow (m-۲)^۲-۴(m^۲-۱)(۵)>۰ \Rightarrow -۱۹m^۲-۴m+۲۴>۰ \Rightarrow ۱۹m^۲+۴m-۲۴<۰ \ (*)$$

$$S(m)=\frac{m-۲}{m^۲-۱} \Rightarrow S'(m)=\frac{(m^۲-۱)-۲m(m-۲)}{(m^۲-۱)^۲}=۰ \Rightarrow S'(m)=\frac{-m^۲+۴m-۱}{(m^۲-۱)^۲}=۰$$

m		۲−√۳		۲+√۳	
S′	−		+		−
	↘	min	↗	max	↘

ریشه‌های صورت $۲\pm\sqrt{۳}$ هستند و طبق آزمون مشتق اول، تابع S در $۲-\sqrt{۳}$ کمترین مقدار را می‌پذیرد، که به‌ازای آن، شرط $(*)$ نیز برقرار است.

۲۸۰ ۴ ۳ ۲ **۱** نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم:

$$f'(x)=۴x^۳-۱۲x=۴x(x^۲-۳)=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ \pm\sqrt{۳}$$

x		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	
f′(x)	−	۰	+	۰	−	۰	+
f (x)	↘	−۴ min	↗	max	↘	−۴ min	↗

نقاط $A(-\sqrt{۳}\ ,\ -۴)$ و $B(\sqrt{۳}\ ,\ -۴)$ نقاط مینیمم نسبی تابع‌اند و شیب خط AB برابر صفر است. حال نقاط عطف تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f''(x)=۱۲x^۲-۱۲=۰ \Rightarrow x=\pm۱$$

$x=\pm۱$ ریشه‌های سادهٔ $f''(x)=۰$ هستند؛ پس هردو، نقاط عطف تابع‌اند: $C(۱\ ,\ ۰)$ و $D(-۱\ ,\ ۰)$. شیب این پاره‌خط نیز صفر است و دو خط AB و CD موازی‌اند.

۲۸۱ **۴** ۳ ۲ ۱ در ناحیهٔ دوم مختصات داریم $x<۰$ و $y>۰$؛ حال مختصات نقطه عطف مورد نظر را می‌یابیم:

$$y=kx^۳+(k+۱)x^۲ \rightarrow x_I=\frac{-b}{۳a}=\frac{-(k+۱)}{۳k}<۰ \rightarrow (k<-۱)\cup(k>۰) \quad (I)$$

$$y_I=k\left(\frac{-(k+۱)^۳}{۲۷k^۳}\right)+\frac{(k+۱)^۳}{۹k^۲}=\frac{۲(k+۱)}{۲۷k^۲}>۰ \rightarrow k+۱>۰ \rightarrow (k>-۱) \quad (II)$$

$\xrightarrow{(I),(II)} k\in\varnothing$ (هیچ مقدار)

(۱) (۲) (۳) (۴) ۲۸۲

$$y=\frac{k}{۲}x^۳-(k+۲)x^۲\to y'=\frac{۳k}{۲}x^۲-۲(k+۲)x\to y''=۳kx-۲(k+۲)=۰\Rightarrow x=\frac{۲(k+۲)}{۳k}<۰$$

$k\in(-۲\,,۰)\quad(۱)$

$$y<۰\Rightarrow f(\frac{۲(k+۲)}{۳k})<۰\Rightarrow k(\frac{۲(k+۲)}{۳k})^۳-(k+۲)(\frac{۲(k+۲)}{۳k})^۲<۰\Rightarrow \overbrace{(\frac{۲(k+۲)}{۳k})^۲}^{+}\left(k(\frac{۲(k+۲)}{۳k})-(k+۲)\right)<۰\Rightarrow\left(k(\frac{۲(k+۲)}{۳k})-(k+۲)\right)<۰$$

$$\Rightarrow\frac{-(k+۲)}{۳}<۰\Rightarrow k+۲>۰\to k>-۲\quad(۲)\quad;\quad(۱)\cap(۲)=(-۲\,,۰)$$

فقط ۱ $-$ در بازهٔ نهایی عددی صحیح است.

(۱) (۲) (۳) (۴) ۲۸۳ با توجه به شکل، نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی تابع است، پس ریشهٔ مشتق است. همچنین تابع در $x=۱$ خط مماس افقی در نقطهٔ عطف دارد، پس $x=۱$ هم ریشهٔ مشتق اول و هم ریشهٔ مشتق دوم است.

$$f(x)=۳x^۴+ax^۳+bx^۲+cx$$
$$f''(x)=۳۶x^۲+۶ax+۲bf'(x)=۱۲x^۳+۳ax^۲+۲bx+c\quad,$$
$$f'(۰)=۰\Rightarrow c=۰$$
$$\Rightarrow ۳a+۲b=-۱۲\Rightarrow ۱۲+۳a+۲b=۰f'(۱)=۰$$
$$f''(۱)=۰\Rightarrow ۳۶+۶a+۲b=۰\Rightarrow ۳a+b=-۱۸$$
$$\Rightarrow\ a=-۸$$

(۱) (۲) (۳) (۴) ۲۸۴

$$f(x)=x^۴+ax^۳+bx^۲$$

$x=۰$ نقطهٔ عطف افقی تابع است، پس داریم:

$$f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲+۲bx\Rightarrow f'(۰)=۰$$
$$f''(x)=۱۲x^۲+۶ax+۲b\Rightarrow f''(۰)=۰+۲b=۰\Rightarrow b=۰$$

شیب خط مماس در $x=۳$ برابر صفر است، پس داریم:

$$f'(۳)=۰\Rightarrow ۴\times ۳^۳+۳a(۳)^۲+۰=۰\Rightarrow ۱۰۸+۲۷a=۰\Rightarrow a=-۴$$
$$f(x)=x^۴-۴x^۳\Rightarrow f(-۲)=(-۲)^۴-۴(-۲)^۳=۱۶+۳۲=۴۸$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۲	۴۲	۱	۸۳	۳	۱۲۴	۲
۲	۳	۴۳	۴	۸۴	۲	۱۲۵	۱
۳	۲	۴۴	۲	۸۵	۳	۱۲۶	۳
۴	۴	۴۵	۲	۸۶	۳	۱۲۷	۴
۵	۱	۴۶	۴	۸۷	۴	۱۲۸	۲
۶	۴	۴۷	۴	۸۸	۱	۱۲۹	۴
۷	۲	۴۸	۱	۸۹	۳	۱۳۰	۴
۸	۱	۴۹	۴	۹۰	۲	۱۳۱	۳
۹	۱	۵۰	۴	۹۱	۲	۱۳۲	۲
۱۰	۳	۵۱	۱	۹۲	۴	۱۳۳	۲
۱۱	۴	۵۲	۴	۹۳	۴	۱۳۴	۲
۱۲	۳	۵۳	۲	۹۴	۴	۱۳۵	۴
۱۳	۲	۵۴	۲	۹۵	۲	۱۳۶	۴
۱۴	۳	۵۵	۳	۹۶	۴	۱۳۷	۴
۱۵	۴	۵۶	۱	۹۷	۱	۱۳۸	۴
۱۶	۳	۵۷	۳	۹۸	۲	۱۳۹	۳
۱۷	۳	۵۸	۴	۹۹	۱	۱۴۰	۲
۱۸	۴	۵۹	۴	۱۰۰	۳	۱۴۱	۱
۱۹	۴	۶۰	۱	۱۰۱	۳	۱۴۲	۱
۲۰	۱	۶۱	۴	۱۰۲	۲	۱۴۳	۱
۲۱	۳	۶۲	۴	۱۰۳	۴	۱۴۴	۲
۲۲	۳	۶۳	۴	۱۰۴	۳	۱۴۵	۴
۲۳	۳	۶۴	۲	۱۰۵	۴	۱۴۶	۱
۲۴	۱	۶۵	۳	۱۰۶	۲	۱۴۷	۱
۲۵	۱	۶۶	۲	۱۰۷	۱	۱۴۸	۳
۲۶	۳	۶۷	۳	۱۰۸	۴	۱۴۹	۴
۲۷	۴	۶۸	۲	۱۰۹	۳	۱۵۰	۲
۲۸	۱	۶۹	۲	۱۱۰	۳	۱۵۱	۴
۲۹	۴	۷۰	۱	۱۱۱	۲	۱۵۲	۲
۳۰	۲	۷۱	۲	۱۱۲	۳	۱۵۳	۲
۳۱	۳	۷۲	۳	۱۱۳	۳	۱۵۴	۴
۳۲	۲	۷۳	۲	۱۱۴	۱	۱۵۵	۲
۳۳	۱	۷۴	۲	۱۱۵	۴	۱۵۶	۱
۳۴	۱	۷۵	۱	۱۱۶	۳	۱۵۷	۴
۳۵	۲	۷۶	۴	۱۱۷	۱	۱۵۸	۲
۳۶	۲	۷۷	۴	۱۱۸	۴	۱۵۹	۱
۳۷	۳	۷۸	۳	۱۱۹	۲	۱۶۰	۳
۳۸	۲	۷۹	۴	۱۲۰	۴	۱۶۱	۳
۳۹	۴	۸۰	۱	۱۲۱	۱	۱۶۲	۲
۴۰	۱	۸۱	۴	۱۲۲	۴	۱۶۳	۴
۴۱	۳	۸۲	۳	۱۲۳	۲	۱۶۴	۲

۱۶۵	۱	۱۹۵	۳	۲۲۵	۲	۲۵۵	۲
۱۶۶	۱	۱۹۶	۱	۲۲۶	۳	۲۵۶	۴
۱۶۷	۲	۱۹۷	۱	۲۲۷	۱	۲۵۷	۳
۱۶۸	۴	۱۹۸	۲	۲۲۸	۳	۲۵۸	۲
۱۶۹	۲	۱۹۹	۴	۲۲۹	۱	۲۵۹	۳
۱۷۰	۳	۲۰۰	۳	۲۳۰	۳	۲۶۰	۴
۱۷۱	۱	۲۰۱	۱	۲۳۱	۴	۲۶۱	۳
۱۷۲	۴	۲۰۲	۴	۲۳۲	۲	۲۶۲	۲
۱۷۳	۱	۲۰۳	۲	۲۳۳	۲	۲۶۳	۲
۱۷۴	۲	۲۰۴	۱	۲۳۴	۴	۲۶۴	۲
۱۷۵	۴	۲۰۵	۳	۲۳۵	۴	۲۶۵	۲
۱۷۶	۲	۲۰۶	۱	۲۳۶	۳	۲۶۶	۴
۱۷۷	۳	۲۰۷	۲	۲۳۷	۳	۲۶۷	۲
۱۷۸	۱	۲۰۸	۳	۲۳۸	۴	۲۶۸	۱
۱۷۹	۱	۲۰۹	۳	۲۳۹	۳	۲۶۹	۱
۱۸۰	۳	۲۱۰	۳	۲۴۰	۲	۲۷۰	۳
۱۸۱	۳	۲۱۱	۲	۲۴۱	۱	۲۷۱	۲
۱۸۲	۱	۲۱۲	۳	۲۴۲	۳	۲۷۲	۴
۱۸۳	۱	۲۱۳	۲	۲۴۳	۳	۲۷۳	۳
۱۸۴	۲	۲۱۴	۲	۲۴۴	۴	۲۷۴	۲
۱۸۵	۴	۲۱۵	۱	۲۴۵	۳	۲۷۵	۳
۱۸۶	۱	۲۱۶	۲	۲۴۶	۴	۲۷۶	۲
۱۸۷	۱	۲۱۷	۳	۲۴۷	۱	۲۷۷	۱
۱۸۸	۱	۲۱۸	۱	۲۴۸	۲	۲۷۸	۲
۱۸۹	۳	۲۱۹	۱	۲۴۹	۲	۲۷۹	۲
۱۹۰	۱	۲۲۰	۳	۲۵۰	۴	۲۸۰	۱
۱۹۱	۳	۲۲۱	۴	۲۵۱	۲	۲۸۱	۴
۱۹۲	۴	۲۲۲	۴	۲۵۲	۴	۲۸۲	۳
۱۹۳	۳	۲۲۳	۴	۲۵۳	۱	۲۸۳	۱
۱۹۴	۳	۲۲۴	۳	۲۵۴	۲	۲۸۴	۴