

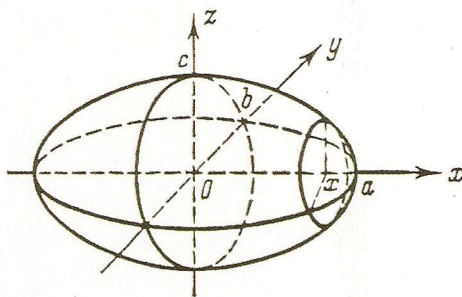
ریاضیات عمومی

جلد دوم

مؤلف:

ایساک مارون

شامل: ✓ خلاصه مباحث ✓ ۴۰۰ مسئله حل شده



ترجمه: دکتر فلیل پاریاب

هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

General Mathematics

2nd Volume

Author:

J.A. Maron

Translator:

Dr. Khalil Paryab

کتاب ماضر علاوه بر اینکه از منابع مهم ریاضیات عمومی
یک میباشد. با توجه به شهود و مل مسائل متعدد،
مهارتهای صمیم بکار بردن مفاهیم ریاضی را تقویت
می کند و رابطه تنگاتنگ علوم ریاضی و مهندسی را
نشان میدهد.

انتشارات پاریاب

ریاضیات عمومی

جلد دوم

تألیف ایساك مارون

ترجمه : خلیل پاریاب

عضو هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

فهرست

صفحه	شش	عنوان
		مقدمه
۱		فصل چهارم : روشهای بنیادی انتگرالگیری
۱-۴		انتگرالگیری و روش تعمیم
۲-۴		انتگرالگیری بکمک تغییر متغیر
۳-۴		انتگرالگیری به روش جزء بجزء
۴-۴		دستورهای کاهش
		فصل پنجم : دسته‌های اساسی از توابع انتگرالپذیر
۱-۵		انتگرالگیری از توابع گویا
		روش استروگرادسکی
۲-۵		انتگرالگیری از بعضی از عبارات اصم
۳-۵		تغییر متغیرهای اویلر
۴-۵		سایر روشهای انتگرالگیری از عبارات اصم
۵-۵		انتگرالگیری از دو جمله‌ای دیفرانسیلی
۶-۵		انتگرالگیری از توابع مثلثاتی و هذلولوی
		انتگرالگیری از توابع هذلولوی
۷-۵		محاسبه بعضی از انتگرالها بکمک تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی
۸-۵		انتگرالگیری از سایر توابع غیر جبری
۹-۵		روشهای انتگرالگیری
		(لیست دستورهای اساسی انتگرالگیری)
		جدول مختصر انتگرالها
		فصل ششم : انتگرال معین
۱-۶		توضیح مطلب
		مجموع انتگرال بالا ب مجموع انتگرال پایین
۲-۶		محاسبه انتگرالهای معین با استفاده از دستور نیوتن-لایبنیتز
۳-۶		تخمین زدن (برآورد) یک انتگرال
		انتگرال معین به عنوان تابعی از حدودش

۶-۴ . تغییر متغیر در انتگرال معین	۱۳۰
۶-۵ . تلخیص انتگرال بر اساس خاصیت تقارن انتگرال	۱۴۵
۶-۶ . انتگرالگیری بر روش جزء بجزء-دستورهای کاهش	۱۵۲
۶-۷ . محاسبه مقدار تقریبی انتگرال معین	۱۶۰
۶-۸ . تمرینهای اضافی	۱۶۷
فصل هفتم : کاربردهای انتگرالهای معین	۱۷۳
۷-۱ . محاسبه حد مجموع بکمک انتگرال معین	۱۷۳
۷-۲ . محاسبه مقادیر متوسط توابع	۱۷۶
۷-۳ . محاسبه مساحت در مختصات قائم	۱۸۱
۷-۴ . محاسبه مساحت ناحیه محدود به منحنیائی که معادلات آنها به صورت پارامتری هستند	۱۹۳
۷-۵ . محاسبه مساحت در مختصات قطبی	۱۹۸
۷-۶ . محاسبه حجم یک جسم	۲۰۵
۷-۷ . محاسبه طول قوس یک منحنی مسطح در مختصات قائم	۲۱۶
۷-۸ . محاسبه طول قوس یک منحنی که معادله اش به صورت پارامتری است	۲۲۰
۷-۹ . طول قوس یک منحنی در مختصات قطبی	۲۲۵
۷-۱۰ . محاسبه مساحت سطوح دوار	۲۲۸
۷-۱۱ . کاربرد هندسی انتگرال معین	۲۳۶
۷-۱۲ . محاسبه فشار، کار و سایر کمیت‌های فیزیکی بوسیله انتگرال معین	۲۴۵
۷-۱۳ . محاسبه گشتاور استاتیک و گشتاورمانده محاسبه مختصات مرکز ثقل	۲۵۱
۷-۱۴ . چند مسئله اضافی	۲۶۴
فصل هشتم : انتگرالهای غیر عادی (یا توسعی)	۲۷۱
۸-۱ . انتگرال غیر عادی با حدود بینهایت	۲۷۱
۸-۲ . انتگرالهای غیر عادی توابع بیکران	۲۸۲
۸-۳ . کاربردهای فیزیکی و هندسی انتگرالهای غیر عادی	۲۹۳
۸-۴ . چند مسئله اضافی	۳۰۰
فصل نهم : سریهای نامتناهی	۳۰۷
۹-۱ . همگرایی و واگرایی سریهای نامتناهی	۳۰۷
مطالب بنیادی درباره سریهای نامتناهی	۳۰۸
سریهای خاص	۳۰۸
آزمونهای سریهای عددی برای همگرایی و واگرایی	۳۰۹

۳۱۳	چند قضیه درباره همگرایی مطلق سریها
۳۳۱	۲-۹ دنباله تابعی و سری تابعی - همگرایی یکنواخت
۳۳۳	چند آزمون ویژه برای سریهای همگرای یکنواخت
۳۳۴	چند قضیه درباره سریهای یکنواخت
۳۳۵	سریهای توانی
۳۳۶	چند قضیه درباره سریهای توانی
۳۳۸	چند سری توانی مهم
۳۴۹	مسائل مربوط به سری توان

جلد اول کتاب «ریاضیات عمومی» در اواخر سال ۶۵ به چاپ رسید و با استقبال بی نظیری مواجه شد به طوری که در کمتر از دو ماه تمام نسخ آن به اتمام رسید. بر آن شدم جلد دوم را هر چه سریعتر آماده چاپ سازم.

از طرفی به خاطر این که این مجموعه شامل تمام مطالب و سرفصلهای درس ریاضیات عمومی ۱ باشد لازم دیدم که مبحث سریها و اعداد مختلط را به کتاب اضافه نمایم. برای ایجاد رابطه منطقی بین سایر مباحث کتاب و این دو مبحث، تصمیم گرفتم مبحث سریها را در یک فصل اضافه نمایم. همچنین برای بالا بردن کیفیت این کتاب حدود ۵۰۰ مسئله سودمند دیگر نیز در لابلای مطالب جلد دوم گنجانده شده است.

این کتاب با انتگرالهای نامعین شروع می شود و سپس به انتگرالهای معین و کاربردهای آن می رسد و بالاخره مبحث انتگرالهای غیر عادی مطرح می گردد و آنگاه به بحث درباره سریهای نامتناهی منتهی می گردد.

همانند جلد اول هر فصلی با خلاصه مباحث شروع شده و سپس حل چند مسئله متنوع آمده و آنگاه مسائل مشابه برای حل داده شده است.

این کتاب غیر از مبحث سریها (که آنهم رابطه تنگاتنگی با انتگرالها دارد)، تماماً انتگرالها را مورد بحث قرار می دهد که می توان گفت اغلب روشهای جامع انتگرالگیری را در بردارد و انتگرال معین با آن همه کاربردهای متنوع مورد بحث قرار می گیرد.

خواننده خود می داند که انتگرالها در ریاضیات رُئ اساسی را بازی می کنند و در تمام مسائل مهندسی نقش تعیین کننده دارند. موفقیت یک دانشجوی مهندسی یا علوم در ریاضیات در گرو مهارت و تبحر او در روشهای انتگرالگیری دارد. به اعتقاد اینجانب، این کتاب می تواند این مهارت را در خواننده ایجاد نماید و راه را برای موفقیت او در سایر مباحث ریاضی هموار سازد.

در خاتمه از همسرم به خاطر تشریک مساعی صمیمانه اش در تنظیم فرمولها سپاسگزارم و از کارکنان قسمت «کامپ ست» انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران نیز به خاطر حروچینی فارسی کمال تشکر را دارم. از خوانندگان عزیز انتظار دارد هر نظر اصلاحی که داشته باشند اطلاع دهند تا در چاپهای بعدی در نظر گرفته شود.

خلیل پاریاب

گروه ریاضیات کاربردی و کامپیوتر

دانشگاه علم و صنعت ایران

اردیبهشت ۱۳۶۶

فصل چهارم

روشهای بنیادی انتگرالگیری

۱-۴ انتگرالگیری و روش تعمیم

در انتگرالگیری مستقیم، از جدول انتگرالها که شامل دستورهای اساسی انتگرالگیری است استفاده می کنیم:

- (1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$
- (2) $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C;$
- (3) $\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C; \quad \int e^u du = e^u + C;$
- (4) $\int \cos u du = \sin u + C; \quad \int \sin u du = -\cos u + C;$
- (5) $\int \cosh u du = \sinh u + C; \quad \int \sinh u du = \cosh u + C;$
- (6) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C; \quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C;$
- (7) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{u}{a} + C_1 \quad (a > 0);$
- (8) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C_1 \quad (a > 0);$
- (9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C;$
- (10) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$

در این دستورها u یا متغیر مستقل است و یا تابعی مشتقپذیر از متغیر مستقل دیگری است.

اگر

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

آنگاه

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

خاصیت خطی بودن انتگرالها به صورت زیر تعمیم پیدا می کند:

$$\int \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx \quad \left(\sum_{i=1}^n |a_i| > 0 \right).$$

۱-۱-۴ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I = \int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} dx.$$

حل

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{3/2} + 5x^{1/2} - x^{-1/2}) dx = \\ &= \int x^{3/2} dx + 5 \int x^{1/2} dx - \int x^{-1/2} dx = \\ &= \frac{2x^{5/2}}{5} + C_1 + \frac{5 \cdot 2}{3} x^{3/2} + C_2 - 2x^{1/2} + C_3 = \\ &= 2\sqrt{x} \left(\frac{x^2}{5} + \frac{5x}{3} - 1 \right) + C. \end{aligned}$$

تذکر. لازم نیست که در محاسبه هر انتگرال یک مقدار ثابت به جواب آن اضافه کنیم (همان طوری که در مثال بالا دیدیم) چون مجموع چند مقدار ثابت، یک مقدار ثابت است. لذا فقط یک مقدار ثابت بعد از حل آخرین انتگرال به جواب اضافه می کنیم.

۲-۱-۴

$$I = \int \frac{6x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x - 1} dx.$$

جواب:

$$I = x^3 + x^2 + 0.5 \ln |2x - 1| + C.$$

۳-۱-۴

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

حل. انتگران را به صورت زیر می نویسیم

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C.$$

پس

۴-۱-۴

$$I = \int \tan^2 x \, dx.$$

حل. چون $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ، بنابراین

$$I = \int \tan^2 x \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C.$$

۴-۱-۵

$$I = \int (x^2 + 5)^3 \, dx.$$

حل. انتگران را با استفاده از دستور دو جمله‌ای، بسط می‌دهیم

$$I = \int (x^6 + 15x^4 + 75x^2 + 125) \, dx = \frac{x^7}{7} + \frac{15x^5}{5} + \frac{75x^3}{3} + 125x + C.$$

۴-۱-۶

$$I = \int (3x + 5)^{17} \, dx.$$

حل. چون $u = 3x + 5$ تابعی خطی است، پس معقول نیست که از بسط دو

جمله‌ای استفاده کنیم و آن را به قوه ۱۷ برسانیم. با توجه به جدول انتگرالها داریم:

$$\int u^{17} \, du = \frac{u^{18}}{18} + C,$$

از آنجا

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+5)^{18}}{18} + C.$$

۴-۱-۷

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}.$$

جواب:

$$I = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

۴-۱-۸

$$I = \int \cos(\pi x + 1) \, dx.$$

حل. با توجه به فرمول (۴) از جدول انتگرالها، داریم

$$\int \cos u \, du = \sin u + C,$$

پس

$$I = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x + 1) + C.$$

۴-۱-۹

$$I = \int \cos 4x \cos 7x dx.$$

حل. توصیه می شود در حل چنین انتگرالهایی از دستورهایی مثلثاتی استفاده گردد.

$$\cos 4x \cos 7x = \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos 11x)$$

بنابراین

$$I = \frac{1}{2} \int \cos 3x dx + \frac{1}{2} \int \cos 11x dx = \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{22} \sin 11x + C.$$

تذکره. در حل چنین انتگرالهایی از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده می کنیم

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m-n)x + \sin (m+n)x];$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x];$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x + \cos (m+n)x].$$

۴-۱-۱۰

$$I = \int \cos x \cos 2x \cos 5x dx.$$

حل. داریم

$$\begin{aligned} (\cos x \cos 2x) \cos 5x &= \frac{1}{2} (\cos x + \cos 3x) \cos 5x = \\ &= \frac{1}{4} [\cos 4x + \cos 6x] + \frac{1}{4} (\cos 2x + \cos 8x). \end{aligned}$$

از آنجا

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \left[\int \cos 2x dx + \int \cos 4x dx + \int \cos 6x dx + \int \cos 8x dx \right] = \\ &= \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{32} \sin 8x + C. \end{aligned}$$

۴-۱-۱۱

$$I = \int \sin^2 3x dx.$$

حل. چون

$$\sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2},$$

بنابراین

$$I = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + C.$$

۴-۱-۱۲

$$I = \int \cosh^2 (8x + 5) dx.$$

حل. چون

$$\cosh^2 u = \frac{\cosh 2u + 1}{2},$$

پس

$$I = \frac{1}{2} \int [1 + \cosh (16x + 10)] dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{32} \sinh (16x + 10) + C.$$

۴-۱-۱۳

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

حل.

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = \arctan (x+2) + C.$$

۴-۱-۱۴

$$I = \int \frac{dx}{4x^2 + 25}.$$

$$I = \frac{1}{10} \arctan \frac{2x}{5} + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}. \quad \text{۴-۱-۱۵}$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad \text{جواب:}$$

۴-۱-۱۶

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

حل.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{4/9-x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C.$$

۴-۱-۱۷

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}.$$

حل.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{3} + C.$$

۴-۱-۱۸

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}.$$

$$I = \ln |x+3 + \sqrt{x^2 + 6x + 1}| + C. \quad \text{جواب:}$$

۴-۱-۱۹

$$I = \int \frac{dx}{4-x^2-4x}.$$

حل.

$$I = \int \frac{dx}{4-x^2-4x} = \int \frac{dx}{8-(x+2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2\sqrt{2}+x+2}{2\sqrt{2}-(x+2)} \right| + C.$$

۴-۱-۲۰

$$I = \int \frac{dx}{10x^2-7}.$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{70}} \ln \left| \frac{\sqrt{10x}-\sqrt{7}}{\sqrt{10x}+\sqrt{7}} \right| + C. \quad \text{جواب:}$$

۴-۱-۲۱ انتگرالهای زیر را حساب کنید

$$(a) \int \frac{dx}{x^2-6x+13}; \quad (b) \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$(c) \int \frac{3-2\cot^2 x}{\cos^2 x} dx; \quad (d) \int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$$

جواب:

$$(a) \frac{1}{2} \arctan \frac{x-3}{2} + C; \quad (b) \frac{3}{4} (x-4) \sqrt[3]{x} + C; \quad (c) 3 \tan x +$$

$$+ 2 \cot x + C; \quad (d) -\frac{2}{x} + \arctan x + C.$$

۴-۱-۲۲ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \int \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx; \quad (b) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$$

$$(c) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; \quad (d) \int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx.$$

جواب:

$$(a) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \arcsin x + C; \quad (b) \sin x - \cos x + C;$$

$$(c) -\frac{2}{\ln 5} 5^{-x} + \frac{1}{5 \ln 2} 2^{-x} + C; \quad (d) -0.2 \cos 5x - x \sin 5\alpha + C.$$

۴-۱-۲۳ انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید:

$$1. \int 5a^2 x^2 dx.$$

$$2. \int (6x^2 + 8x + 3) dx.$$

$$3. \int x(x+a)(x+b) dx.$$

$$4. \int (a+bx^2)^2 dx.$$

$$5. \int \sqrt{2px} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$$

$$7. \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx.$$

$$\text{جواب: } \frac{5}{7} a^2 x^3$$

$$2x^3 + 4x^2 + 3x. \quad //$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{(a+b)x^3}{3} + \frac{abx^2}{2}. \quad //$$

$$a^2x + \frac{abx^3}{2} + \frac{b^2x^5}{5}. \quad //$$

$$\frac{2x}{3} \sqrt{2px}. \quad //$$

$$\frac{n-1}{n} \frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}. \quad //$$

$$\sqrt[n]{nx}. \quad //$$

8. $\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^2 dx.$ جواب: $a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}.$
9. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx.$ " $\frac{2x^2 \sqrt{x}}{5} + x.$
10. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$ " $\frac{3x^4 \sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2 \sqrt[3]{x}}{7} - 6 \sqrt[3]{x}.$
11. $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx.$ " $\frac{2x^{2m} \sqrt{x}}{4m+1} - \frac{4x^{m+n} \sqrt{x}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{2n} \sqrt{x}}{4n+1}.$
12. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx.$ " $2a \sqrt{ax} - 4ax + 4x \sqrt{ax} - 2x^2 + \frac{2x^3}{5 \sqrt{ax}}.$
13. $\int \frac{dx}{x^2+7}.$ " $\frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}}.$
14. $\int \frac{dx}{x^2-10}.$ " $\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}} \right|.$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$ " $\ln(x + \sqrt{4+x^2}).$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}.$ " $\arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}}.$
17. $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx.$ " $\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x + \sqrt{x^2+2}).$
18. a) $\int \tan^2 x dx;$ " a) $\tan x - x.$
- b) $\int \tanh^2 x dx.$ " b) $x - \tanh x.$
19. a) $\int \cot^2 x dx;$ " a) $-\cot x - x;$
- b) $\int \coth^2 x dx.$ " b) $x - \coth x.$
20. $\int 3^x e^x dx.$ " $\frac{(3e)^x}{\ln 3 + 1}.$

راهنمایی - فرض کنید $\tan^2 x = \sec^2 x - 1;$

جواب: b) $x - \tanh x.$

راهنمایی - فرض کنید $\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x}$

جواب:

۲-۴ انتگرالگیری بکمک تغییر متغیر

در حل انتگرالها با روش تغییر متغیر، به جای x تابع پیوسته و مشتق پذیر $\varphi(t)$ را قرار می دهیم، یعنی

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,$$

بعد از حل، براساس تابع معکوس، بجای t نسبت به x قرار می دهیم،
یعنی

$$t = \varphi^{-1}(x)$$

از فرمول فوق به صورت زیر هم، می توان استفاده کرد:

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int f(x) dx,$$

که در آن $x = \varphi(t)$

$$I = \int x \sqrt{x-5} dx. \quad 4-2-1$$

حل. تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$\sqrt{x-5} = t.$$

از آنجا

$$x-5 = t^2, \quad x = t^2 + 5, \quad dx = 2t dt.$$

انتگرال به صورت زیر در می آید

$$I = \int (t^2 + 5) t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 + 5t^2) dt = 2 \frac{t^5}{5} + \frac{10t^3}{3} + C.$$

به جای t نسبت به x ، مقدار می گذاریم

$$I = \frac{2(x-5)^{5/2}}{5} + \frac{10(x-5)^{3/2}}{3} + C.$$

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x} \quad 4-2-2$$

حل. با توجه به تغییر متغیر $t = 1 + e^x$ داریم:

$$e^x = t - 1, \quad x = \ln(t - 1), \quad dx = dt/(t - 1)$$

این مقادیر را در انتگرال قرار می دهیم

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{dt}{t(t-1)}$$

چون

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t},$$

ناوبر این

$$I = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| - \ln|t| + C.$$

با توجه به رابطه بین t و x داریم:

$$I = \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

توجه. این انتگرال را می توان به صورت زیر، با ضرب صورت و مخرج به e^{-x} حل کرد:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx &= - \int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = - \ln(e^{-x}+1) + C = \\ &= - \ln \frac{e^x+1}{e^x} = x - \ln(e^x+1) + C. \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}} dx. \quad \text{۴-۲-۳}$$

$$I = \frac{1}{12} \sqrt{(2x-5)^3} + \frac{5}{2} \sqrt{2x-5} - \frac{37}{4 \sqrt{2x-5}} + C. \quad \text{: جواب}$$

$$I = \int \frac{(x^2-1) dx}{(x^4+3x^2+1) \arctan \frac{x^2+1}{x}}. \quad \text{۴-۲-۴}$$

حل. انتگرال را به صورت زیر تغییر شکل می دهیم:

$$I = \int \frac{(1-1/x^2) dx}{[(x+1/x)^2+1] \arctan(x+1/x)}.$$

و با توجه به تغییر متغیر $t = x + \frac{1}{x}$ داریم

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$$

از آنجا

$$I = \int \frac{dt}{(t^2+1) \arctan t}$$

دوباره تغییر متغیر $\arctan t = u$ را بکار می بریم، بنابراین

$$\frac{dt}{t^2+1} = du$$

و

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

جواب را نخست نسبت به t و پس از آن نسبت به x می نویسیم:

$$I = \ln |\arctan t| + C = \ln \left| \arctan \left(x + \frac{1}{x} \right) \right| + C.$$

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx \quad \text{۴-۲-۵}$$

حل . به صورت زیر عمل می کنیم :

$$x = \frac{1}{t}; \quad dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

پس

$$I = -\int \frac{\sqrt{a^2 - 1/t^2}}{(1/t^4) t^2} dt = -\int t \sqrt{a^2 t^2 - 1} dt.$$

دوباره از تغییر متغیر استفاده می کنیم :

$$\sqrt{a^2 t^2 - 1} = z. \quad \text{و} \quad 2a^2 t dt = 2z dz$$

و

$$I = -\frac{1}{a^2} \int z^2 dz = -\frac{1}{3a^2} z^3 + C.$$

و بالاخره

$$I = -\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3a^2 x^3} + C.$$

۴-۲-۶

$$I = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$$

حل .

$$I = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

با توجه به تغییر متغیر

$$\frac{a}{b} \tan x = t; \quad dt = \frac{a}{b} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

داریم

$$I = \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab} \arctan t + C.$$

حال جواب را نسبت به x می نویسیم :

$$I = \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{a}{b} \tan x \right) + C.$$

۴-۲-۷

$$I = \int \sqrt[3]{1+3 \sin x} \cos x dx.$$

حل . تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم :

$$1+3 \sin x = t. \quad 3 \cos x dx = dt$$

از آنجا

$$I = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{t} dt = \frac{1}{3} \int t^{1/3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} t^{4/3} + C = \frac{(1+3 \sin x)^{4/3}}{4} + C.$$

۴-۲-۸

$$I = -2 \sqrt{\cos x} + C. \quad \text{جواب:} \quad I = \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$I = \int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}} \quad \text{۴-۲-۹}$$

حل. به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\arccos x = t; \quad -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt.$$

پس

$$I = - \int \frac{dt}{t^5} = - \int t^{-5} dt = \frac{1}{4} t^{-4} + C = \frac{1}{4 \arccos^4 x} + C.$$

$$I = \frac{1}{2} (x^3 + 3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C. \quad \text{جواب: } I = \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} dx \quad \text{۴-۲-۱۰}$$

$$I = \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx \quad \text{۴-۲-۱۱}$$

حل. با توجه به تغییر متغیر $t = 1 + \sin^2 x$ داریم:

$$2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx = dt.$$

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln (1 + \sin^2 x) + C.$$

$$I = \int \frac{1 + \ln x}{3 + x \ln x} dx \quad \text{۴-۲-۱۲}$$

حل. فرض می‌کنیم

$$3 + x \ln x = t,$$

از آنجا داریم:

$$(1 + \ln x) dx = dt$$

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |3 + x \ln x| + C.$$

۴-۲-۱۳. انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید:

$$(a) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx; \quad (b) \int \frac{dx}{x \ln x};$$

$$(c) \int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^4}}; \quad (d) \int \frac{x^{2n-1}}{x^{2n} + a^2} dx;$$

$$(e) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad (f) \int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x} \right) \frac{dx}{x}.$$

جواب

$$(a) 0.75 \sqrt[3]{(1 + \ln x)^4} + C; \quad (b) \ln |\ln x| + C; \quad (c) \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C;$$

$$(d) \frac{1}{na} \arctan \frac{x^n}{a} + C; \quad (e) -2 \cos \sqrt{x} + C; \quad (f) \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln |\ln x| + C.$$

۱۴-۲-۴. انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید :

$$(a) \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx; (b) \int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1+\ln x}};$$

$$(c) \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx; (d) \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

جواب

$$(a) -\frac{3}{140} (35-40x+14x^2) (1-x)^{\frac{4}{3}} + C;$$

$$(b) \frac{2}{3} (\ln x - 5) \sqrt{1+\ln x} + C;$$

$$(c) \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x \right) \sqrt{\sin^3 x} + C;$$

$$(d) -\frac{1}{15} (8+4x^2+3x^4) \sqrt{1-x^2} + C.$$

۱۵-۲-۴ انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید :

$$1. \int \frac{a dx}{a-x}. \quad \text{جواب: } a \ln \left| \frac{c}{a-x} \right|$$

حل -

$$\int \frac{a}{a-x} dx = -a \int \frac{d(a-x)}{a-x} = -a \ln |a-x| + a \ln c = a \ln \left| \frac{c}{a-x} \right|.$$

$$2. \int \frac{2x+3}{2x+1} dx. \quad \text{جواب: } x + \ln |2x+1|.$$

حل -

$$\frac{2x+3}{2x+1} = 1 + \frac{2}{2x+1}.$$

از آنجا

$$\int \frac{2x+3}{2x+1} dx = \int dx + \int \frac{2 dx}{2x+1} = x + \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x + \ln |2x+1|.$$

$$3. \int \frac{1-3x}{3+2x} dx. \quad \text{جواب: } -\frac{3}{2} x + \frac{11}{4} \ln |3+2x|.$$

$$4. \int \frac{x dx}{a+bx}. \quad // \quad \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln |a+bx|.$$

$$5. \int \frac{ax+b}{ax+\beta} dx. \quad // \quad \frac{a}{a} x + \frac{ba-a\beta}{a^2} \ln |ax+\beta|.$$

$$6. \int \frac{x^2+1}{x-1} dx. \quad // \quad \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln |x-1|.$$

$$7. \int \frac{x^2+5x+7}{x+3} dx. \quad // \quad \frac{x^2}{2} + 2x + \ln |x+3|.$$

$$8. \int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx. \quad // \quad \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3 \ln |x-1|.$$

$$9. \int \left(a + \frac{b}{x-a}\right)^2 dx. \quad \text{جواب: } a^2x + 2ab \ln|x-a| - \frac{b^2}{x-a}.$$

$$10. \int \frac{x}{(x+1)^2} dx. \quad // \quad \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}.$$

راه‌نمایی:

$$\int \frac{x dx}{(x+1)^2} = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

$$11. \int \frac{b dy}{\sqrt{1-y}}. \quad \text{جواب: } -2b \sqrt{1-y}.$$

$$12. \int \sqrt{a-bx} dx. \quad // \quad -\frac{2}{3b} \sqrt{(a-bx)^3}.$$

$$13^*. \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx. \quad // \quad \sqrt{x^2+1}.$$

- حل

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}.$$

$$14. \int \frac{\sqrt{x+\ln x}}{x} dx. \quad \text{جواب: } 2\sqrt{x} + \frac{\ln^2 x}{2}.$$

$$15. \int \frac{dx}{3x^2+5}. \quad // \quad \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan x \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

$$16. \int \frac{dx}{7x^2-8}. \quad // \quad \frac{1}{4\sqrt{14}} \ln \left| \frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}} \right|.$$

$$17. \int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2} \quad (0 < b < a). \quad // \quad \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+b}+x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-x\sqrt{a-b}} \right|.$$

$$18. \int \frac{x^2}{x^2+2} dx. \quad // \quad x - \sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

$$19. \int \frac{x^3}{a^2-x^2} dx. \quad // \quad -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|a^2-x^2|\right).$$

$$20. \int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4} dx. \quad // \quad x - \frac{5}{2} \ln(x^2+4) + \arctan \frac{x}{2}.$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}. \quad // \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2}x + \sqrt{7+8x^2}).$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}. \quad // \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin x \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

$$23. \int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx. \quad // \quad \frac{1}{3} \ln|3x^2-2| - \frac{5}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right|.$$

$$24. \int \frac{3-2x}{5x^2+7} dx. \quad // \quad \frac{3}{\sqrt{35}} \arctan \sqrt{\frac{5}{7}}x - \frac{1}{5} \ln(5x^2+7).$$

$$25. \int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}} dx. \quad // \quad \frac{3}{5} \sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln(x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2+1}).$$

$$26. \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx. \quad \text{جواب: } \sqrt{x^2-4} + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}|.$$

$$27. \int \frac{x dx}{x^2-5}. \quad // \quad \frac{1}{2} \ln |x^2-5|.$$

$$28. \int \frac{x dx}{2x^2+3}. \quad // \quad \frac{1}{4} \ln (2x^2+3).$$

$$29. \int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2} dx. \quad // \quad \frac{1}{2a} \ln (a^2x^2+b^2) + \frac{1}{a} \arctan \frac{ax}{b}.$$

$$30. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad // \quad \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{a^2}.$$

$$31. \int \frac{x^2}{1+x^6} dx. \quad // \quad \frac{1}{3} \arctan x^3.$$

$$32. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}. \quad // \quad \frac{1}{3} \ln |x^3 + \sqrt{x^6-1}|.$$

$$33. \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx. \quad // \quad \frac{2}{3} \sqrt{(\arcsin x)^3}.$$

$$34. \int \frac{\arctan \frac{x}{2}}{4+x^2} dx. \quad // \quad \frac{\left(\arctan \frac{x}{2}\right)^2}{4}.$$

$$35. \int \frac{x - \sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2} dx. \quad // \quad \frac{1}{8} \ln (1+4x^2) - \frac{\sqrt{(\arctan 2x)^3}}{3}.$$

$$36. \int \sqrt{\frac{dx}{(1+x^2) \ln (x + \sqrt{1+x^2})}}. \quad // \quad 2 \sqrt{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}.$$

$$37. \int a e^{-mx} dx. \quad // \quad -\frac{a}{m} e^{-mx}.$$

$$38. \int 4^{2-3x} dx. \quad // \quad -\frac{1}{3 \ln 4} 4^{2-3x}.$$

$$39. \int (e^t - e^{-t}) dt. \quad // \quad e^t + e^{-t}.$$

$$40. \int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx. \quad // \quad \frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}}.$$

$$41. \int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx. \quad // \quad \frac{1}{\ln a - \ln b} \left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}\right) - 2x.$$

$$42. \int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}} dx. \quad // \quad \frac{2}{3 \ln a} \sqrt{a^{2x}} + \frac{2}{\ln a} \sqrt{a^x}.$$

$$43. \int e^{-(x^2+1)} x dx. \quad // \quad -\frac{1}{2e^{x^2+1}}.$$

$$44. \int x \cdot 7^{x^2} dx. \quad // \quad \frac{1}{2 \ln 7} 7^{x^2}.$$

$$45. \int \frac{e^x}{x^2} dx. \quad // \quad -e^{\frac{1}{x}}.$$

$$46. \int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

جواب $\frac{2}{\ln 5} 5^{\sqrt{x}}.$

$$47. \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx.$$

// $\ln |e^x - 1|.$

$$48. \int e^x \sqrt{a - be^x} dx.$$

// $-\frac{2}{3b} \sqrt{(a - be^x)^3}.$

$$49. \int \left(e^{\frac{x}{a}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{a}} dx.$$

// $\frac{3a}{4} (e^{\frac{x}{a}} + 1)^{\frac{4}{3}}.$

$$50. \int \frac{dx}{2^x + 3}.$$

// $\frac{x}{3} - \frac{1}{3 \ln 2} \ln(2^x + 3).$

راهنمایی:

$$\frac{1}{2^x + 3} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2^x}{2^x + 3}\right).$$

$$51. \int \frac{a^x dx}{1 + a^{2x}}.$$

جواب $\frac{1}{\ln a} \arctan(a^x).$

$$52. \int \frac{e^{-bx}}{1 - e^{-2bx}} dx.$$

// $-\frac{1}{2b} \ln \left| \frac{1 + e^{-bx}}{1 - e^{-bx}} \right|.$

$$53. \int \frac{e^t dt}{\sqrt{1 - e^{2t}}}.$$

// $\arcsin e^t.$

$$54. \int \sin(a + bx) dx.$$

// $-\frac{1}{b} \cos(a + bx).$

$$55. \int \cos \frac{x}{\sqrt{2}} dx.$$

// $\sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}.$

$$56. \int (\cos ax + \sin ax)^2 dx.$$

// $x - \frac{1}{2a} \cos 2ax.$

$$57. \int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

// $2 \sin \sqrt{x}.$

$$58. \int \sin(\lg x) \frac{dx}{x}.$$

// $-\ln 10 \times \cos(\log x).$

$$59. \int \sin^2 x dx.$$

// $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$

راهنمایی -

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x).$$

$$60. \int \cos^2 x dx.$$

جواب $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}.$

$$61. \int \sec^2(ax + b) dx.$$

// $\frac{1}{a} \tan(ax + b).$

$$62. \int \cot^2 ax dx.$$

// $-\frac{\cot ax}{a} - x.$

$$63. \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{a}}.$$

// $a \ln \left| \tan \frac{x}{2a} \right|.$

$$64. \int \frac{dx}{3 \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

// $\frac{1}{15} \ln \left| \tan \left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right|.$

65. $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}.$ جواب $\frac{1}{a} \ln \left| \tan \frac{ax+b}{2} \right|.$
66. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}.$ // $\frac{1}{2} \tan(x^2).$
67. $\int x \sin(1-x^2) dx.$ // $\frac{1}{2} \cos(1-x^2).$
68. $\int \left(\frac{1}{\sin x \sqrt{2}} - 1 \right)^2 dx.$ // $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cot x \sqrt{2} - \sqrt{2} \ln \left| \tan \frac{x \sqrt{2}}{2} \right|.$
69. $\int \tan x dx.$ // $-\ln |\cos x|.$
70. $\int \cot x dx.$ // $\ln |\sin x|.$
71. $\int \cot \frac{x}{a-b} dx.$ // $(a-b) \times \ln \left| \sin \frac{x}{a-b} \right|.$
72. $\int \frac{dx}{\tan \frac{x}{5}}.$ // $5 \ln \left| \sin \frac{x}{5} \right|.$
73. $\int \tan \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$ // $-2 \ln |\cos \sqrt{x}|.$
74. $\int x \cot(x^2+1) dx.$ // $\frac{1}{2} \ln |\sin(x^2+1)|.$
75. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$ // $\ln |\tan x|.$
76. $\int \cos \frac{x}{a} \sin \frac{x}{a} dx.$ // $\frac{a}{2} \sin^2 \frac{x}{a}.$
77. $\int \sin^3 6x \cos 6x dx.$ // $\frac{\sin^4 6x}{24}.$
78. $\int \frac{\cos ax}{\sin^4 ax} dx.$ // $-\frac{1}{4a \sin^3 ax}.$
79. $\int \frac{\sin 3x}{3 + \cos 3x} dx.$ // $-\frac{1}{3} \ln(3 + \cos 3x).$
80. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx.$ // $-\frac{1}{2} \sqrt{\cos 2x}.$
81. $\int \sqrt{1+3 \cos^2 x} \sin 2x dx.$ // $-\frac{2}{9} \sqrt{(1+3 \cos^2 x)^3}.$
82. $\int \tan^3 \frac{x}{3} \sec^2 \frac{x}{3} dx.$ // $\frac{3}{4} \tan^4 \frac{x}{3}.$
83. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx.$ // $\frac{2}{3} \sqrt{\tan^3 x}.$
84. $\int \frac{\cot^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x} dx.$ // $-\frac{3 \cot^{\frac{5}{3}} x}{5}.$
85. $\int \frac{1 + \sin 3x}{\cos^2 3x} dx.$ // $\frac{1}{3} \left(\tan 3x + \frac{1}{\cos 3x} \right).$
86. $\int \frac{(\cos ax + \sin ax)^2}{\sin ax} dx.$ // $\frac{1}{a} \left(\ln \left| \tan \frac{ax}{2} \right| + 2 \sin ax \right).$
87. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b - a \cot 3x} dx.$ // $\frac{1}{3a} \ln |b - a \cot 3x|.$

$$88. \int (2 \sinh 5x - 3 \cosh 5x) dx.$$

$$89. \int \sinh^2 x dx.$$

$$90. \int \frac{dx}{\sinh x}.$$

$$91. \int \frac{dx}{\cosh x}.$$

$$92. \int \frac{dx}{\sinh x \cosh x}.$$

$$93. \int \tanh x dx.$$

$$94. \int \coth x dx.$$

$$95. \int x \sqrt[5]{5-x^2} dx.$$

$$96. \int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1} dx.$$

$$97. \int \frac{x^3}{x^5+5} dx.$$

$$98. \int x e^{-x^2} dx.$$

$$99. \int \frac{3 - \sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2} dx. \quad // \sqrt{\frac{3}{2}} \arctan \left(x \sqrt{\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln (x \sqrt{3} + \sqrt{2+3x^2}).$$

$$100. \int \frac{x^3-1}{x+1} dx.$$

$$101. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}.$$

$$102. \int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx.$$

$$103. \int \frac{\tan 3x - \cot 3x}{\sin 3x} dx.$$

$$104. \int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$105. \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 2}} dx.$$

$$106. \int \left(2 + \frac{x}{2x^2+1} \right) \frac{dx}{2x^2+1}.$$

$$107. \int a^{\sin x} \cos x dx.$$

$$108. \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx.$$

$$109. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$110. \int \tan^2 ax dx.$$

$$111. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$\text{جواب} \quad \frac{2}{5} \cosh 5x - \frac{3}{5} \sinh 5x.$$

$$// \quad -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2x.$$

$$// \quad \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right|.$$

$$// \quad 2 \arctan e^x.$$

$$// \quad \ln |\tanh x|.$$

$$// \quad \ln \cosh x.$$

$$// \quad \ln |\sinh x|.$$

$$// \quad -\frac{5}{12} \sqrt[5]{(5-x^2)^6}.$$

$$// \quad \frac{1}{4} \ln |x^4 - 4x + 1|.$$

$$// \quad \frac{1}{4 \sqrt[5]{5}} \times \arctan \frac{x^4}{\sqrt[5]{5}}.$$

$$// \quad -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$// \quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 2 \ln |x+1|.$$

$$// \quad -\frac{2}{\sqrt{e^x}}.$$

$$// \quad \ln |x + \cos x|.$$

$$// \quad \frac{1}{3} \left(\ln |\sec 3x + \tan 3x| + \frac{1}{\sin 3x} \right).$$

$$// \quad -\frac{1}{\ln x}.$$

$$// \quad \ln |\tan x + \sqrt{\tan^2 x - 2}|.$$

$$// \quad \sqrt{2} \arctan (x \sqrt{2}) - \frac{1}{4(2x^2+1)}.$$

$$// \quad \frac{a^{\sin x}}{\ln a}.$$

$$// \quad \sqrt[3]{\frac{(x^3+1)^2}{2}}.$$

$$// \quad \frac{1}{2} \arcsin (x^2).$$

$$// \quad \frac{1}{a} \tan ax - x.$$

$$// \quad \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2}.$$

$$112. \int \frac{\sec^2 x \, dx}{\sqrt{4 - \tan^2 x}}.$$

$$113. \int \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}}.$$

$$114. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx.$$

$$115. \int \tan \sqrt{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$116. \int \frac{x \, dx}{\sin x^2}.$$

$$117. \int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx.$$

$$118. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$119. \int \frac{\left(1 - \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sin \frac{x}{\sqrt{2}}} dx.$$

$$120. \int \frac{x^2}{x^2-2} dx.$$

$$121. \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx.$$

$$122. \int e^{\sin^2 x} \sin 2x \, dx.$$

$$123. \int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx.$$

$$124. \int \frac{dx}{e^x + 1}.$$

$$125. \int \frac{dx}{(a+b) + (a-b)x^2} \quad (0 < b < a).$$

$$126. \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}} dx.$$

$$127. \int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}.$$

$$128. \int \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0 \right) dt.$$

$$129. \int \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)}.$$

$$130. \int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$131. \int e^{-\tan x} \sec^2 x \, dx.$$

جواب $\arcsin \frac{\tan x}{2}.$

" $a \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2a} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$

" $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 + \ln x)^4}.$

" $-2 \ln |\cos \sqrt{x-1}|.$

" $\frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x^2}{2} \right|.$

" $e^{\arctan x} + \frac{\ln^2(1+x^2)}{4} + \arctan x.$

" $-\ln |\sin x + \cos x|.$

" $\sqrt{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2\sqrt{2}} \right| - 2x - \sqrt{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}.$

" $x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right|.$

" $\ln |x| + 2 \arctan x.$

" $e^{\sin^2 x}.$

" $\frac{5}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{4-3x^2}.$

" $x - \ln(1 + e^x).$

" $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan x \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$

" $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-2}).$

" $\frac{1}{a} \ln |\tan ax|.$

" $-\frac{T}{2\pi} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0 \right).$

" $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \ln x}{2 - \ln x} \right|.$

" $-\frac{\left(\arccos \frac{x}{2} \right)^2}{2}.$

" $-e^{-\tan x}.$

132. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2 - \sin^4 x}} dx.$ جواب $\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}} \right).$
133. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$ // $-2 \cot 2x.$
134. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$ // $\frac{(\arcsin x)^2}{2} - \sqrt{1 - x^2}.$
135. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}} dx.$ // $\ln (\sec x + \sqrt{\sec^2 x + 1}).$
136. $\int \frac{\cos 2x}{4 + \cos^2 2x} dx.$ // $\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + \sin 2x}{\sqrt{5} - \sin 2x} \right|.$
137. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$ // $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right).$
- راهنمایی :
- $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2}.$
138. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{1 + x^2}} dx.$ // $\frac{2}{3} \sqrt{[\ln(x + \sqrt{1 + x^2})]^3}.$
139. $\int x^2 \cos(x^3 + 3) dx.$ // $\frac{1}{3} \sinh(x^3 + 3).$
140. $\int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x} dx.$ // $\frac{1}{\ln 3} 3^{\tanh x}.$
141. $\int x(2x + 5)^{10} dx.$ // $\frac{1}{4} \left[\frac{(2x + 5)^{12}}{12} - \frac{5(2x + 5)^{11}}{11} \right].$
142. $\int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} dx.$ // $2 \left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2 \ln |1 + \sqrt{x}| \right).$
143. $\int \frac{dx}{x \sqrt{2x + 1}}.$ // $\ln \left| \frac{\sqrt{2x + 1} - 1}{\sqrt{2x + 1} + 1} \right|.$
144. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$ // $2 \arcsin \sqrt{e^x - 1}.$
145. $\int \frac{\ln 2x dx}{\ln 4x x}.$ // $\ln x - \ln 2 \ln |\ln x + 2 \ln 2|.$
146. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$ // $\frac{(\arcsin x)^3}{3}.$
147. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$ // $\frac{2}{3} (e^x - 2) \sqrt{e^x + 1}.$
148. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$ // $\frac{2}{5} (\cos^2 x - 5) \times \sqrt{\cos x}.$
149. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^2}}.$ // $\ln \left| \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \right|.$

۳-۴. انتگرالگیری به روش جزء بجزء

دستور

$$\int u dv = uv - \int v du$$

موسوم به انتگرالگیری به روش جزء بجزء است که در آن u و v توابعی مشتقپذیر از x هستند. وقتی از این روش استفاده می‌کنیم انتگران را به حاصلضرب دو عامل تقسیم می‌کنیم. یکی از عاملها یک تابع است و عامل دیگر دیفرانسیل تابع دیگری است. اگر انتگران، به صورت حاصلضرب یک تابع لگاریتمی، یا یک تابع معکوس مثلثاتی، در یک چند جمله‌ای باشد، در اینصورت معمولاً u را تابع لگاریتمی یا تابع معکوس مثلثاتی، انتخاب می‌کنند. ولی اگر انتگران حاصلضرب یک تابع لگاریتمی یا یک تابع نمایی در یک تابع جبری باشد، معمولاً تابع جبری را u فرض می‌کنند.

$$I = \int \arctan x \, dx \quad ۳-۴-۱$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$u = \arctan x, \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \quad v = x;$$

$$I = \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$I = \int \arcsin x \, dx \quad ۳-۴-۲ \quad \text{جواب: } x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$I = \int x \cos x \, dx \quad ۳-۴-۳ \quad \text{را حل کنید.}$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$u = x; \quad dv = \cos x \, dx,$$

از آنجا

$$du = dx; \quad v = \sin x,$$

$$I = \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

حال نشان می‌دهیم که هرگاه انتخاب u و dv نامناسب باشد، چه اشکالی پیش می‌آید؟

$$\text{در انتگرال } \int x \cos x \, dx \text{ فرض می‌کنیم:}$$

$$u = \cos x; \quad dv = x \, dx,$$

بنابراین

$$du = -\sin x \, dx; \quad v = \frac{1}{2} x^2.$$

در این حالت

$$I = \frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x \, dx.$$

پرواضح است که انتگرال حاصل از اولی مشکلتر است.

$$I = \int x^3 \ln x \, dx. \quad \text{۴-۳-۴}$$

حل. فرض می‌کنیم

$$u = \ln x; \quad dv = x^3 \, dx,$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{x}; \quad v = \frac{1}{4} x^4,$$

$$I = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

$$I = \int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} \, dx. \quad \text{۴-۳-۵}$$

حل. فرض می‌کنیم

$$u = x^2 - 2x + 5; \quad dv = e^{-x} \, dx,$$

و از آنجا

$$du = (2x - 2) \, dx; \quad v = -e^{-x};$$

$$I = \int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} \, dx = -e^{-x} (x^2 - 2x + 5) + 2 \int (x - 1) e^{-x} \, dx.$$

بار دیگر از روش جزء بجزء برای انتگرال حاصل استفاده می‌کنیم:

$$x - 1 = u; \quad dv = e^{-x} \, dx,$$

$$du = dx; \quad v = -e^{-x}.$$

از آنجا

$$I_1 = 2 \int (x - 1) e^{-x} \, dx = -2e^{-x} (x - 1) + 2 \int e^{-x} \, dx = -2xe^{-x} + C.$$

بنابراین

$$I = -e^{-x} (x^2 - 2x + 5) - 2xe^{-x} + C = -e^{-x} (x^2 + 5) + C.$$

تذکره. نتیجه‌ای که از انتگرالگیری، انتگرالهای به صورت $\int P(x) e^{ax} \, dx$ حاصل می‌شود این است که جواب انتگرال، تابعی به صورت $Q(x) e^{ax}$ است که در آن

$Q(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجه آن با درجه چند جمله‌ای $P(x)$ یکی است. در محاسبه انتگرالها با این روش، از روش ضرایب مجهول استفاده می‌شود. بدین معنی که $Q(x)$ را یک چند جمله‌ای هم درجه با چند جمله‌ای $P(x)$ با ضرایب مجهول فرض کرده و سپس از دو طرف مشتق می‌گیریم و نتیجه را با هم معادل قرار می‌دهیم به دستگاه معادلاتی می‌رسیم که از حل آن ضرایب مورد نظر را تعیین می‌کنیم. برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را حل می‌کنیم.

۳-۴-۶ روش ضرایب مجهول را بکار برده و انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int (3x^3 - 17)e^{2x} dx.$$

حل. فرض می‌کنیم

$$\int (3x^3 - 17)e^{2x} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)e^{2x} + C$$

از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$(3x^3 - 17)e^{2x} = 2(Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)e^{2x} + e^{2x}(3Ax^2 + 2Bx + D)$$

از دو طرف e^{2x} را حذف می‌کنیم، داریم:

$$3x^3 - 17 \equiv 2Ax^3 + (2B + 3A)x^2 + (2D + 2B)x + (2E + D)$$

ضرایب x های هم درجه را در دو طرف با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} 3 &= 2A; & 0 &= 2B + 3A; \\ 0 &= 2D + 2B; & -17 &= 2E + D. \end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات حاصل مقادیر زیر نتیجه می‌شوند:

$$A = \frac{3}{2}; \quad B = -\frac{9}{4}; \quad D = \frac{9}{4}; \quad E = -\frac{77}{8}.$$

پس

$$\int (3x^3 - 17)e^{2x} dx = \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{77}{8} \right) e^{2x} + C.$$

۳-۴-۷. انتگرال زیر را حساب نمائید:

$$I = \int (x^3 + 1) \cos x dx.$$

حل. فرض می‌کنیم

$$u = x^3 + 1; \quad dv = \cos x dx,$$

از آنجا

$$du = 3x^2 dx; \quad v = \sin x.$$

$$I = (x^3 + 1) \sin x - 3 \int x^2 \sin x dx = (x^3 + 1) \sin x - 3I_1,$$

که در آن

$$I_1 = \int x^2 \sin x dx.$$

از روش جزء بجزء استفاده می کنیم

$$I_1 = -x^2 \cos x + 2I_2,$$

که در آن

$$I_2 = \int x \cos x dx.$$

بار دیگر از روش جزء بجزء برای انتگرال حاصل استفاده می کنیم:

$$I_2 = x \sin x + \cos x + C.$$

بالاخره داریم:

$$\begin{aligned} I &= \int (x^3 + 1) \cos x dx = (x^3 + 1) \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C = \\ &= (x^3 - 6x + 1) \sin x + (3x^2 - 6) \cos x + C. \end{aligned}$$

تذکره. روش ضرایب مجهول برای محاسبه انتگرالهای

$$\int P(x) \sin ax dx, \quad \int P(x) \cos ax dx.$$

بکار می رود.

۸-۳-۴.

$$I = \int (x^2 + 3x + 5) \cos 2x dx.$$

حل

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x + 5) \cos 2x dx &= \\ &= (A_0 x^2 + A_1 x + A_2) \cos 2x + (B_0 x^2 + B_1 x + B_2) \sin 2x + C. \end{aligned}$$

از طرفین مشتق می گیریم

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x + 5) \cos 2x &= -2(A_0 x^2 + A_1 x + A_2) \sin 2x + \\ &+ (2A_0 x + A_1) \cos 2x + 2(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) \cos 2x + (2B_0 x + B_1) \sin 2x = \\ &= [2B_0 x^2 + (2B_1 + 2A_0)x + (A_1 + 2B_2)] \cos 2x + \\ &+ [-2A_0 x^2 + (2B_0 - 2A_1)x + (B_1 - 2A_2)] \sin 2x. \end{aligned}$$

ضرایب x های هم درجه در دو طرف را که در ضرایب $\sin 2x$ و $\cos 2x$ موجودند، معادل با

هم قرار می دهیم دستگاه معادلات

$$\begin{array}{lll} 2B_0 = 1; & 2(B_1 + A_0) = 3; & A_1 + 2B_2 = 5; \\ -2A_0 = 0; & 2(B_0 - A_1) = 0; & B_1 - 2A_2 = 0. \end{array}$$

حاصل می شود. از حل دستگاه معادلات حاصل مقادیر زیر نتیجه می شوند:

$$A_0 = 0; \quad B_0 = \frac{1}{2}; \quad A_1 = \frac{1}{2}; \quad B_1 = \frac{3}{2}; \quad A_2 = \frac{3}{4}; \quad B_2 = \frac{9}{4}.$$

پس

$$\int (x^3 + 3x + 5) \cos 2x dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} \right) \sin 2x + C.$$

$$I = \int (3x^2 + 6x + 5) \arctan x dx. \quad \text{۴-۳-۹}$$

حل. فرض می کنیم

$$u = \arctan x; \quad dv = (3x^2 + 6x + 5) dx,$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \quad v = x^3 + 3x^2 + 5x.$$

از آنجا

پس

$$I = (x^3 + 3x^2 + 5x) \arctan x - \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x}{1+x^2} dx.$$

برای حل انتگرال اخیر، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x}{1+x^2} dx = \int (x+3) dx + \int \frac{4x-3}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + 2 \int \frac{2x dx}{x^2+1} - 3 \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + 3x + 2 \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + C. \end{aligned}$$

مقدار I_1 را در جای خود قرار می دهیم

$$I = (x^3 + 3x^2 + 5x + 3) \arctan x - x^2/2 - 3x - 2 \ln(x^2 + 1) + C.$$

انتگرال زیر را حساب کنید: ۴-۳-۱۰

$$I = \int e^{5x} \cos 4x dx.$$

حل. فرض می کنیم

$$e^{5x} = u; \quad \cos 4x dx = dv,$$

از آنجا

$$5e^{5x} dx = du; \quad v = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

بنابراین

$$I = \frac{1}{4} e^{5x} \sin 4x - \frac{5}{4} \int e^{5x} \sin 4x dx.$$

دوباره روش جزء بجزء را بکار می‌بریم:

$$I_1 = \int e^{5x} \sin 4x dx = -\frac{1}{4} e^{5x} \cos 4x + \frac{5}{4} \int e^{5x} \cos 4x dx.$$

بنابراین

$$I = \frac{1}{4} e^{5x} \sin 4x - \frac{5}{4} \left(-\frac{1}{4} e^{5x} \cos 4x + \frac{5}{4} \int e^{5x} \cos 4x dx \right)$$

بالاخره

$$I = \frac{4}{41} e^{5x} \left(\sin 4x + \frac{5}{4} \cos 4x \right) + C.$$

. ۴-۳-۱۱

$$I = \int \cos(\ln x) dx.$$

حل. فرض می‌کنیم

$$u = \cos(\ln x); \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = -\sin(\ln x) \frac{dx}{x}; \quad v = x.$$

بنابراین

$$I = \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx.$$

از روش جزء بجزء استفاده می‌کنیم

$$u = \sin(\ln x); \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = \cos(\ln x) \frac{dx}{x}; \quad v = x.$$

پس

$$I_1 = \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx.$$

بنابراین

$$I = \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I.$$

بالاخره

$$I = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

$$I = \int x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx.$$

. ۴-۳-۱۲

حل. انتگران را به صورت زیر تغییر می دهیم:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln \frac{x+1}{x} = \ln(x+1) - \ln x.$$

پس

$$I = \int x \ln(x+1) dx - \int x \ln x dx = I_1 - I_2.$$

انتگرالهای I_1 و I_2 را به روش جزء بجزء حساب می کنیم

$$u = \ln(x+1); \quad dv = x dx,$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{1+x}; \quad v = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

پس

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x \ln(x+1) dx = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 1) dx}{1+x} = \\ &= \frac{x^2 - 1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int (x - 1) dx = \frac{x^2 - 1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

بطور مشابه انتگرال بعدی را حل می کنیم:

$$I_2 = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

بالاخره داریم:

$$I = \int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x+1) - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x}{2} + C.$$

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1} [\ln(x^2+1) - 2 \ln x]}{x^4} dx. \quad . \quad ۴-۳-۱۳$$

حل. نخست تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$1 + \frac{1}{x^2} = t.$$

بنابراین

$$dt = -\frac{2dx}{x^3} \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} dt.$$

پس

$$I = \int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \ln \frac{x^2+1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} \ln t dt.$$

انتگرال حاصل با روش جزء بجزء به راحتی حساب می شود. فرض می کنیم

$$u = \ln t; \quad dv = \sqrt{t} dt.$$

پس

$$du = \frac{dt}{t}; \quad v = \frac{2}{3} t \sqrt{t}.$$

از آنجا

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} \ln t \, dt &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} \ln t - \frac{2}{3} \int \sqrt{t} \, dt \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} \ln t - \frac{4}{9} t \sqrt{t} \right] + C. \end{aligned}$$

جواب را نسبت به x می نویسیم

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{3/2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{4}{9} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{3/2} \right] + C = \\ &= \frac{(x^2+1) \sqrt{x^2+1}}{9x^3} \left[2 - 3 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] + C. \end{aligned}$$

$$I = \int \sin x \ln \tan x \, dx. \quad \text{۴-۳-۱۴}$$

$$- \cos x \ln \tan x + \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int \ln (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) \, dx. \quad \text{۴-۳-۱۵}$$

حل. فرض می کنیم

$$u = \ln (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}); \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x \sqrt{1-x^2}} dx; \\ v &= x. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= x \ln (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} \int x \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x \sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x \ln (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \ln (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arcsin x + C. \end{aligned}$$

تذکر: در محاسبه بعضی از انتگرالها که مجبور به استفاده از روش جزء بجزء بدفعات متعدد هستیم، دستوری تحت عنوان «تعمیم دستور انتگرالگیری به روش جزء بجزء» یا «دستور انتگرالگیری مکرر به روش جزء بجزء» به صورت زیر

بدست می آید:

$$\int u(x) v(x) dx = u(x) v_1(x) - u'(x) v_2(x) + u''(x) v_3(x) - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)}(x) v_n(x) - (-1)^{n-1} \int u^{(n)}(x) v_n(x) dx,$$

که در آن

$$v_1(x) = \int v(x) dx; \quad v_2(x) = \int v_1(x) dx; \quad \dots; \quad v_n(x) = \int v_{n-1}(x) dx.$$

البته، در اینجا فرض بر این است که تمام مشتقات و انتگرالهایی که ظاهر می شوند، موجودند.

استفاده از فرمول تعمیم انتگرالگیری به روش جزء بجزء، وقتی مناسب است که انتگرال به صورت $\int P_n(x) \varphi(x) dx$ باشد که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله ای از درجه n است و عامل $\varphi(x)$ طوری است که بتوان از آن $n+1$ بار انتگرال متوالی گرفت. مثلاً:

$$\int P_n(x) e^{kx} dx = P_n(x) \frac{e^{kx}}{k} - P'_n(x) \frac{e^{kx}}{k^2} + \dots + \\ + (-1)^n P_n^{(n)}(x) \frac{e^{kx}}{k^{n+1}} + C = \\ = e^{kx} \left[\frac{P_n(x)}{k} - \frac{1}{k^2} P'_n(x) + \dots + \frac{(-1)^n}{k^{n+1}} P_n^{(n)}(x) \right] + C.$$

۱۶-۳-۴. با استفاده از دستور «تعمیم انتگرالگیری به روش جزء بجزء»

انتگرالهای زیر را حساب نمایید:

$$(a) \int (x^3 - 2x^2 + 3x - 1) \cos 2x dx,$$

$$(b) \int (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1) \sqrt{2x+6} dx.$$

حل: (a)

$$\int (x^3 - 2x^2 + 3x - 1) \cos 2x dx = (x^3 - 2x^2 + 3x - 1) \frac{\sin 2x}{2} - \\ - (3x^2 - 4x + 3) \left(-\frac{\cos 2x}{4} \right) + (6x - 4) \left(-\frac{\sin 2x}{8} \right) - 6 \frac{\cos 2x}{16} + C = \\ = \frac{\sin 2x}{4} (2x^3 - 4x^2 + 3x) + \frac{\cos 2x}{8} (6x^2 - 8x + 3) + C;$$

حل: (b)

$$\int (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1) \sqrt{2x+6} dx = \\ = (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1) \frac{(2x+6)^{3/2}}{3} - (6x^2 + 6x - 8) \frac{(2x+6)^{5/2}}{3 \cdot 5} + \\ + (12x + 6) \frac{(2x+6)^{7/2}}{3 \cdot 5 \cdot 7} - 12 \frac{(2x+6)^{9/2}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + C = \\ = \frac{\sqrt{2x+6}}{5 \cdot 7 \cdot 9} (2x + 6) (70x^3 - 45x^2 - 396x + 897) + C.$$

انتگرالهای زیر را حساب نمایید

$$x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C. \quad \text{جواب} \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx. \quad \text{۴-۳-۱۷}$$

$$\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \left[(\ln x)^2 - \frac{3}{2} \ln x + \frac{9}{8} \right] + C. \quad \text{جواب} \quad \int \sqrt[3]{x} (\ln x)^2 dx. \quad \text{۴-۳-۱۸}$$

$$2 \sqrt{1+x} \arcsin x + 4 \sqrt{1-x} + C. \quad \text{جواب} \quad \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}} \quad \text{۴-۳-۱۹}$$

$$-0.5 \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \cot x \right) + C. \quad \text{جواب} \quad \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}. \quad \text{۴-۳-۲۰}$$

$$\frac{3^x (\sin x + \cos x \ln 3)}{1 + (\ln 3)^2} + C. \quad \text{جواب} \quad \int 3^x \cos x dx. \quad \text{۴-۳-۲۱}$$

$$(x^3 - 2x^2 + 5) e^{3x} dx. \quad \text{جواب} \quad \int (x^3 - 2x^2 + 5) e^{3x} dx. \quad \text{۴-۳-۲۲}$$

$$\left(\frac{1}{3} x^3 - x^2 + \frac{2}{3} x + \frac{13}{9} \right) e^{3x} + C.$$

$$(1 + x^2)^2 \cos x dx. \quad \text{جواب} \quad \int (1 + x^2)^2 \cos x dx. \quad \text{۴-۳-۲۳}$$

$$(x^4 - 10x^2 + 21) \sin x + x(4x^2 - 20) \cos x + C.$$

$$(x^2 + 2x - 1) \sin 3x dx. \quad \text{جواب} \quad \int (x^2 + 2x - 1) \sin 3x dx. \quad \text{۴-۳-۲۴}$$

$$\frac{9x^2 + 18x - 11}{27} \cos 3x + \frac{2x + 2}{9} \sin 3x + C.$$

$$(x^2 - 2x + 3) \ln x dx. \quad \text{جواب} \quad \int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx. \quad \text{۴-۳-۲۵}$$

$$\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + C.$$

$$x^3 \arctan x dx. \quad \text{جواب} \quad \int x^3 \arctan x dx. \quad \text{۴-۳-۲۶}$$

$$\frac{x^4 - 1}{4} \arctan x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + C.$$

$$x^2 \arccos x dx. \quad \text{جواب} \quad \int x^2 \arccos x dx. \quad \text{۴-۳-۲۷}$$

$$\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\text{۴-۳-۲۸} \quad \text{با استفاده از دستور «انتگرالگیری مکرر به روش جزء بجزء»}$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \int (3x^2 + x - 2) \sin^2(3x + 1) dx; \quad (b) \int \frac{x^2 - 7x + 1}{\sqrt[3]{2x + 1}} dx.$$

جواب:

$$(a) -\frac{18x^2 + 6x - 13}{72} \sin(6x + 2) - \frac{6x + 1}{72} \cos(6x + 2) + \frac{1}{2} x^3 +$$

$$+ \frac{1}{4} x^2 - x + C; \quad (b) \frac{3}{4} (x^2 - 7x + 1) (2x + 1)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{40} (2x - 7) (2x + 1)^{\frac{5}{3}} +$$

$$+ \frac{27}{320} (2x + 1)^{\frac{8}{3}} + C.$$

۴-۳-۲۹. با استفاده از روش جزء بجزء انتگرالهای زیر را حساب کنید:

- | | | |
|---|------|--|
| 1. $\int \ln x \, dx.$ | جواب | $x \ln x - x.$ |
| 2. $\int \arctan x \, dx.$ | // | $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$ |
| 3. $\int \arcsin x \, dx.$ | // | $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$ |
| 4. $\int x \sin x \, dx.$ | // | $\sin x - x \cos x.$ |
| 5. $\int x \cos 3x \, dx.$ | // | $\frac{x \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9}.$ |
| 6. $\int \frac{x}{e^x} \, dx.$ | // | $-\frac{x+1}{e^x}.$ |
| 7. $\int x \cdot 2^{-x} \, dx.$ | // | $-\frac{x \ln 2 + 1}{2^x \ln^2 2}.$ |
| 8. $\int x^2 e^{3x} \, dx.$ | // | $\frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2).$ |
| 9. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} \, dx.$ | // | $-e^{-x} (x^2 + 5).$ |
| 10. $\int x^2 e^{-\frac{x}{3}} \, dx.$ | // | $-3e^{-\frac{x}{3}} (x^3 + 9x^2 + 54x + 162).$ |
| 11. $\int x \sin x \cos x \, dx.$ | // | $-\frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8}.$ |
| 12. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x \, dx.$ | // | $\frac{2x^2 + 10x + 11}{4} \sin 2x + \frac{2x + 5}{4} \cos 2x.$ |
| 13. $\int x^2 \ln x \, dx.$ | // | $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}.$ |
| 14. $\int \ln^2 x \, dx.$ | // | $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x.$ |
| 15. $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx.$ | // | $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}.$ |
| 16. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx.$ | // | $2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x}.$ |
| 17. $\int x \arctan x \, dx.$ | // | $\frac{x^2 + 1}{2} \arctan x - \frac{x}{2}.$ |
| 18. $\int x \arcsin x \, dx.$ | // | $\frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \times \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2}.$ |
| 19. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx.$ | // | $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$ |
| 20. $\int \frac{x \, dx}{\sin^2 x}.$ | // | $-x \cot x + \ln \sin x .$ |
| 21. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} \, dx.$ | // | $-\frac{x}{\sin x} + \ln \left \tan \frac{x}{2} \right .$ |
| 22. $\int e^x \sin x \, dx.$ | // | $\frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}.$ |
| 23. $\int 3^x \cos x \, dx.$ | // | $\frac{3^x (\sin x + \cos x \ln 3)}{1 + (\ln 3)^2}.$ |
| 24. $\int e^{ax} \sin bx \, dx.$ | // | $\frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}.$ |
| 25. $\int \sin(\ln x) \, dx.$ | // | $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$ |

روش های مناسب را بکار برده انتگرالهای زیر را حساب کنید

26. $\int x^2 e^{-x^2} dx$. جواب $-\frac{e^{-x^2}}{2} (x^2 + 1)$.
27. $\int e^{\sqrt{x}} dx$. // $2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1)$.
28. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$. // $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x$.
29. $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$. // $\frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} - x$.
30. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$. // $-\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}$.
31. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$. // $[\ln(\ln x) - 1] \cdot \ln x$.
32. $\int x^2 \arctan 3x dx$. // $\frac{x^3}{3} \arctan 3x - \frac{x^2}{18} + \frac{1}{162} \ln(9x^2 + 1)$.
33. $\int x (\arctan x)^2 dx$. // $\frac{1+x^2}{2} \times (\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.
34. $\int (\arcsin x)^2 dx$. // $x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \times \arcsin x - 2x$.
35. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$. // $-\frac{\arcsin x}{x} + \ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \right|$.
36. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$. // $-2 \sqrt{1-x} \times \arcsin \sqrt{x} + 2 \sqrt{x}$.
37. $\int x \tan^2 2x dx$. // $\frac{x \tan 2x}{2} + \frac{\ln |\cos 2x|}{4} - \frac{x^2}{2}$.
38. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$. // $\frac{e^{-x}}{2} \times \left(\frac{\cos 2x - 2 \sin 2x}{5} - 1 \right)$.
39. $\int \cos^2(\ln x) dx$. // $\frac{x}{2} + \frac{x \cos(2 \ln x) + 2x \sin(2 \ln x)}{10}$.
40. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$. // $-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x$.

حل - فرض کنید $u = x$ و $dv = \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$. داریم $du = dx$ و $v = -\frac{1}{2(x^2+1)}$

از آنجا

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \int \frac{dx}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

41. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$. جواب $\frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2} \right)$

42. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$. // $\frac{x}{2} \times \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$

حل - فرض می کنیم $u = \sqrt{a^2-x^2}$ و $dv = dx$ پس $du = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ و $v = x$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= x \sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x \sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$2 \int \sqrt{a^2-x^2} dx = x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$$

۴-۴ دستورهای کاهش

دستورهای کاهش به ما امکان می دهند که به انتگرال اندیس $n > 0$ را نسبت داده و آن را کاهش دهیم و انتگرالهایی مشابه با خودش، ولی با اندیس کمتر، به دست آوریم.

۴-۴-۱. روش جزء را بکار برده دستور کاهش هر یک از انتگرالهای زیر

را به دست آورید:

$$(a) I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}; \quad (b) I_{n,-m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx;$$

$$(c) I_n = \int (a^2 - x^2)^n dx.$$

حل. (a) از روش جزء جزء استفاده کرده و به طریق زیر عمل می کنیم:

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = -\frac{2n x dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = x.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}, \end{aligned}$$

از آنجا

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} I_n.$$

به وسیله این دستور، انتگرالگیری از I_{n+1} به انتگرالگیری از I_n منجر می شود و در نتیجه می توانیم کاملاً یک انتگرال را با اندیس یک عدد طبیعی، حساب نمائیم، چون

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

با فرض $n=1$ داریم

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + C;$$

با فرض $n=2$ حاصل می شود

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2 = \\ &= \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5} \arctan \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

(b) برای حل این انتگرال از روش جزء بجزء استفاده می شود، فرض می کنیم

$$u = \sin^{n-1} x; \quad dv = \frac{\sin x}{\cos^m x} dx,$$

از آنجا

$$du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx; \quad v = \frac{1}{(m-1) \cos^{m-1} x} \quad (m \neq 1).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I_{n, -m} &= \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1) \cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\sin^{n-2} x dx}{\cos^{m-2} x} = \\ &= \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1) \cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} I_{n-2, 2-m} \quad (m \neq 1). \end{aligned}$$

(c) روش جزء بجزء را بکار می بریم، فرض می کنیم:

$$u = (a^2 - x^2)^n; \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = -2nx(a^2 - x^2)^{n-1} dx; \quad v = x.$$

پس

$$\begin{aligned} I_n &= x(a^2 - x^2)^n + 2n \int x^2 (a^2 - x^2)^{n-1} dx = \\ &= x(a^2 - x^2)^n + 2n \int (x^2 - a^2 + a^2) (a^2 - x^2)^{n-1} dx = \\ &= x(a^2 - x^2)^n - 2n I_n + 2na^2 I_{n-1} \end{aligned}$$

و یا

$$(1 + 2n) I_n = x(a^2 - x^2)^n + 2na^2 I_{n-1}$$

و بالاخره

$$I_n = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}.$$

برای مثال، می دانیم که

$$I_{-1/2} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

و همچنین

$$\begin{aligned} I_{1/2} &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} (a^2 - x^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2} I_{-1/2} = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \end{aligned}$$

$$I_{3/2} = \int (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{x}{4} (a^2 - x^2)^{3/2} + \frac{3}{4} a^2 I_{1/2},$$

والی آخر.

۲-۴-۴ با استفاده از روش جزء بجزء، دستورهای کاهش زیر را ثابت کنید

$$(a) \quad I_n = \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n I_{n-1};$$

$$(b) I_n = \int x^\alpha (\ln x)^n dx = \frac{x^{\alpha+1} (\ln x)^n}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1} \quad (\alpha \neq -1);$$

$$(c) I_n = \int x^n e^x dx = x^n e^x - n I_{n-1};$$

$$(d) I_n = \int e^{\alpha x} \sin^n x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + n^2} \sin^{n-1} x (\alpha \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{\alpha^2 + n^2} I_{n-2}.$$

راهنمایی. (d) دستور تعمیم یافته روش جزء بجزء را بکار برده و آنگاه رابطه زیر را بدست آورید.

$$I_n = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} \sin^{n-1} x (\alpha \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{\alpha^2} I_{n-2} - \frac{n^2}{\alpha^2} I_n.$$

۴-۴-۳. فرمول کاهش انتگرال

$$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$$

را بدست آورده و سپس انتگرال

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

را حل کنید.

$$I_n = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \quad (n \geq 2); \quad \text{جواب -}$$

$$I_3 = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} I_1 = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

۴-۴-۴. برای هر کدام از انتگرالهای زیر یک دستور کاهش تعیین کنید:

$$(a) I_n = \int \tan^n x dx; \quad (b) I_n = \int \cot^n x dx;$$

$$(c) I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

جواب:

$$(a) I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}; \quad I_1 = -\ln |\cos x| + C; \quad I_0 = x + C;$$

$$(b) I_n = \frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - I_{n-2}; \quad I_1 = \ln |\sin x| + C; \quad I_0 = x + C; \quad (c) I_n = \frac{1}{n} x^{n-1} \sqrt{x^2 + a} - \frac{n-1}{n} \alpha I_{n-2}; \quad I_1 = \sqrt{x^2 + a} + C; \quad I_0 = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

فصل پنجم

دسته های اساسی از توابع انتگرالپذیر

۱-۵ انتگرالگیری از توابع گویا

اگر بتوانیم $Q(x)$ مخرج کسرواقعی $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را به صورت

$$Q(x) = (x-a)^k (x-b)^l \dots (x^2 + \alpha x + \beta)^r (x^2 + \gamma x + \mu)^s \dots,$$

بنویسیم که در آن دو جمله ایها و سه جمله ایها از یکدیگر متمایز هستند، و بعلاوه سه جمله ایها ریشه های حقیقی ندارند، در این صورت

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \dots \\ & \dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + \alpha x + \beta} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + \alpha x + \beta)^2} + \dots + \frac{M_r x + N_r}{(x^2 + \alpha x + \beta)^r} + \\ & + \frac{R_1 x + L_1}{x^2 + \gamma x + \mu} + \frac{R_2 x + L_2}{(x^2 + \gamma x + \mu)^2} + \dots + \frac{R_s x + L_s}{(x^2 + \gamma x + \mu)^s} + \dots \end{aligned}$$

که در آن

$$A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, R_1, L_1, R_2, L_2, \dots$$

ثابت های حقیقی اند که باید حساب شوند برای محاسبه این ضرایب، از طرف راست مخرج مشترک می گیریم و سپس دو طرف را معادل هم قرار می دهیم. با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم درجه در طرفین، دستگاه معادلاتی بدست می آید که از حل آن ضرایب مطلوب، حاصل می شوند این روش را «روش مقایسه ضرایب» گویند. چون اتحاد به ازای تمام مقادیر x برقرار است، لذا برای تعیین دستگاه معادلات می توان به

x مقادیر مناسب دلخواهی، به تعداد مجهولها داد. این روش را «روش مقادیر خاص» گویند. موفقیت در انتخاب روش مناسب به تجربه و حل مسائل متعدد، بستگی دارد.

اگر درجه چند جمله‌ای صورت از درجه چند جمله‌ای مخرج بیشتر یا با هم مساوی باشند، اول صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

۵-۱-۱

$$I = \int \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} dx.$$

را حساب کنید:

حل. چون انتگران کسر واقعی است و مخرج ریشه‌های حقیقی دارد، پس می‌توان آن را به صورت

$$\frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} + \frac{D}{x-1},$$

نوشت که در آن ضرایب A, B, D باید محاسبه شوند. از طرف راست مخرج مشترک می‌گیریم و با طرف چپ معادل قرار می‌دهیم:

$$15x^2 - 4x - 81 = A(x+4)(x-1) + B(x-3)(x-1) + D(x-3)(x+4). \quad (*)$$

ضرایب x های هم توان را در طرفین مساوی با هم قرار می‌دهیم:

$$A + B + D = 15; \quad 3A - 4B + D = -4; \quad -4A + 3B - 12D = -81.$$

از حل دستگاه معادلات حاصل داریم:

$$A = 3, \quad B = 5, \quad D = 7$$

پس

$$\begin{aligned} I &= 3 \int \frac{dx}{x-3} + 5 \int \frac{dx}{x+4} + 7 \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= 3 \ln|x-3| + 5 \ln|x+4| + 7 \ln|x-1| + C = \\ &= \ln|(x-3)^3 (x+4)^5 (x-1)^7| + C. \end{aligned}$$

توجه. این مثال را با «روش مقادیر خاص» حل می‌کنیم تا کاربرد این روش را ببینیم. چون اتحاد (*) به ازای هر x برقرار است، بنابراین در طرفین سه مقدار دلخواه (به تعداد مجهولها) به x می‌دهیم. برای سادگی محاسبات، بجای x ریشه‌های مخرج را قرار می‌دهیم تا بعضی از جملات حذف شوند. با قرار دادن $x = 1, x = -4, x = 3$ در رابطه (*) بترتیب $A = 3, B = 5, D = 7$ به دست می‌آیند.

$$I = \int \frac{x^4 dx}{(2+x)(x^2-1)} \quad \text{جواب: } ۵-۱-۲$$

$$\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{(x+1)^3} \right| + \frac{16}{3} \ln |x+2| + C.$$

$$I = \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx. \quad ۵-۱-۳$$

حل. چون درجه صورت از درجه مخرج بیشتر است لذا صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم، داریم:

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x+2}{x(x^2-x-2)}.$$

پس

$$I = \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int (x+1) dx - \int \frac{(x+2) dx}{x(x-2)(x+1)}.$$

انتگران را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{D}{x+1}.$$

بنابر این

$$x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Dx(x-2).$$

با قرار دادن $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-1$ (جوابهای مخرج) در طرفین اتحاد، داریم

$$A=-1; \quad B=\frac{2}{3}; \quad D=\frac{1}{3}$$

و بالاخره داریم:

$$I = \int (x+1) dx + \int \frac{dx}{x} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{2}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C.$$

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx. \quad ۵-۱-۴$$

حل. انتگران یک کسر واقعی است و ریشه های مخرج حقیقی هستند ولی بعضی از آنها ریشه های چند گانه می باشند

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2.$$

بنابر این کسرهای معادل آن به قرار زیرند:

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1},$$

از آنجا

$$2x^2 - 3x + 3 \equiv A(x-1)^2 + Bx + Dx(x-1) = (A+D)x^2 + (-2A-D+B)x + A. \quad (*)$$

با معادل قرار دادن طرفین، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$A + D = 2; \quad -2A - D + B = -3; \quad A = 3.$$

پس

$$A = 3; \quad B = 2; \quad D = -1.$$

بنابراین

$$I = 3 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x-1} = 3 \ln|x| - \frac{2}{x-1} - \ln|x-1| + C.$$

توجه. اگر در رابطه (*) فرض کنیم $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ (ریشه‌های مخرج) و

x_3 مقدار دلخواهی باشد، ضرایب خیلی راحت تر حساب می‌شوند. به ازای $x = 0$

داریم $3 = A$ و در $x = 1$ داریم $2 = B$ و به ازای $x = 2$ داریم

$$5 = A + 2B + 2D; \quad 5 = 3 + 4 + 2D$$

از آنجا $D = -1$

$$I = \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx \quad \text{۵-۱-۵} \quad \text{جواب: } 2 \ln|x-1| - \ln|x| - \frac{x}{(x-1)^2} + C.$$

$$I = \int \frac{x dx}{x^3 + 1} \quad \text{۵-۱-۶}$$

حل. چون

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

و عامل دوم به عوامل درجه اول قابل تجزیه نیست. تجزیه کسره صورت زیر است:

$$\frac{x}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2 - x + 1}.$$

بنابراین

$$x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + D)(x + 1) = (A+B)x^2 + (-A+B+D)x + (A+D).$$

از آنجا

$$A = -\frac{1}{3}; \quad B = \frac{1}{3}; \quad D = \frac{1}{3}$$

پس

$$I = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2 - x + 1} dx = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} I_1.$$

برای محاسبه

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx$$

مخرج را به صورت مجموع دو مربع کامل می نویسیم:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

فرض می کنیم

$$x - \frac{1}{2} = t$$

پس

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{t + \frac{1}{2} + 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + \sqrt{3} \arctan \frac{2t}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

جواب را نسبت به x می نویسیم:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

پس

$$I = \int \frac{x}{x^3+1} dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \quad \text{۵-۱-۷}$$

حل. مخرج دارای دودسته ریشه مختلط است، بنابراین

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4},$$

پس

$$1 = (Ax+B)(x^2+4) + (Dx+E)(x^2+1).$$

برای تعیین ضرایب، از روش مقادیر خاص استفاده می کنیم، چون ریشه های مخرج $(x = \pm i$ و $x = \pm 2i)$ هستند، به قرار زیر عمل می کنیم:

با فرض $x = i$ داریم:

$$3B + 3Ai = 1$$

که از آن $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$ و اگر $x = 2i$ داریم

$$-3E - 6Di = 1$$

از آنجا $D = 0$, $E = -\frac{1}{3}$ پس

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+4} = \\ = \frac{1}{3} \arctan x - \frac{1}{6} \arctan \frac{x}{2} + C.$$

۵-۱-۸ $I = \int \frac{(x+1) dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$ جواب :

$$\frac{2}{3\sqrt{7}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3} \arctan (x+2) + C$$

۵-۱-۹ $I = \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} dx$

حل . در اینجا مخرج دارای ریشه‌های مختلط چند گانه است . کسرهای معادل آن را به صورت زیر تعیین می کنیم :

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+3} + \frac{F}{x+1}$$

بعد از محاسبه داریم :

$$A=1; \quad B=-1; \quad D=0; \quad E=0; \quad F=1.$$

بنابراین

$$I = \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} dx = \\ = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx + \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + I_1 \\ \text{حال } I_1 = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx \text{ را حساب می کنیم :}$$

چون $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$. پس فرض می کنیم $x+1=t$ و آنگاه

$$I_1 = \int \frac{t-2}{(t^2+2)^2} dt = \int \frac{t}{(t^2+2)^2} dt - 2 \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2(t^2+2)} - 2I_2$$

انتگرال

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2}$$

را به وسیله دستور کاهش حل می کنیم (مسئله ۱-۴-۴ را ملاحظه کنید):

$$I_2 = \frac{1}{4} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{4} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

بنابراین

$$I_1 = -\frac{1}{2(t^2+2)} - \frac{t}{2(t^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

که این رابطه نسبت به x چنین است:

$$I_1 = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

بالاخره داریم:

$$I = \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} dx = \ln|x+1| - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید

۵-۱-۱۰ $5x + \ln x^2(x+2)^4 |x-2|^3 + C$: جواب $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx$

۵-۱-۱۱ $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$ جواب:

$$\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}} \right| + C.$$

۵-۱-۱۲ $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$ جواب:

$$-\frac{1}{x-2} - \arctan(x-2) + C$$

۵-۱-۱۳ $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$ جواب:

$$-\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

۵-۱-۱۴ $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)} dx$ جواب:

$$\frac{x+2}{2(x^2+1)} + 2 \arctan x + \ln \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

۵-۱-۱۵ انتگرالهای زیر را حساب نمایید:

۱. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

جواب

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2}$$

۲. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$

»

$$\frac{1}{2} \times \ln \left| \frac{x}{x+2} \right|$$

۳. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$

»

$$\frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \frac{6x-1}{\sqrt{11}}$$

۴. $\int \frac{x dx}{x^2-7x+13}$

»

$$\frac{1}{2} \ln(x^2-7x+13) + \frac{7}{\sqrt{3}} \times \arctan \frac{2x-7}{\sqrt{3}}$$

5. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx.$
 6. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4} dx.$
 7. $\int \frac{x^2 dx}{x^2-6x+10}.$
 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$
 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$
 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$
 11. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx.$
 12. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx.$
 13. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}} dx.$
 14. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}.$
 15. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x-1}}.$
 16. $\int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2-2}}.$
 17. $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+2x}}.$
 18. $\int \sqrt{x^2+2x+5} dx.$
 19. $\int \sqrt{x-x^2} dx.$
 20. $\int \sqrt{2-x-x^2} dx.$
 21. $\int \frac{x dx}{x^4-4x^2+3}.$
 22. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6 \sin x+12} dx.$
 23. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}.$
 24. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x+4 \cos x+1}}.$
 25. $\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1-4 \ln x-\ln^2 x}}.$
 26. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$
 27. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx.$
- جواب $\frac{3}{2} \ln(x^2-4x+5) + 4 \arctan(x-2).$
- // $x - \frac{5}{2} \ln(x^2+3x+4) + \frac{9}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x+3}{\sqrt{7}}.$
- // $x + 3 \ln(x^2-6x+10) + 8 \arctan(x-3).$
- // $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5}.$
- // $\arcsin(2x-1).$
- // $\ln \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q} \right|.$
- // $3 \sqrt{x^2-4x+5}.$
- // $-2 \sqrt{1-x-x^2} - 9 \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}}.$
- // $\frac{1}{5} \sqrt{5x^2-2x+1} + \frac{1}{5 \sqrt{5}} \ln \left(x \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5x^2-2x+1} \right).$
- // $\ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right|.$
- // $-\arcsin \frac{2-x}{x \sqrt{5}}.$
- // $\arcsin \frac{2-x}{(1-x) \sqrt{2}} (x > \sqrt{2}).$
- // $-\arcsin \frac{1}{x+1}.$
- // $\frac{x+1}{2} \sqrt{x^2+2x+5} + 2 \ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+5}).$
- // $\frac{2x-1}{4} \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8} \arcsin(2x-1).$
- // $\frac{2x+1}{4} \sqrt{2-x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x+1}{3}.$
- // $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2-3}{x^2-1} \right|.$
- // $-\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{3-\sin x}{\sqrt{3}}.$
- // $\ln \left(e^x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+e^x+e^{2x}} \right)$
- // $-\ln |\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}|.$
- // $-\sqrt{1-4 \ln x - \ln^2 x} - 2 \arcsin \frac{2 + \ln x}{\sqrt{5}}.$
- // $\frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right|.$
- // $x + 3 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2|.$

$$28. \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

جواب. $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+2)^4} \right|.$

$$29. \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$$

$$\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right|.$$

$$30. \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx.$$

$$5x + \ln \left| \frac{x^{\frac{1}{2}}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}} \right|.$$

$$31. \int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$$

$$\frac{1}{1+x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|.$$

$$32. \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx.$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9} \right|.$$

$$33. \int \frac{x^3-6x^2+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8} dx.$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{11}{(x-2)^2} - \frac{8}{x-2}.$$

$$34. \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2} dx.$$

$$-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}.$$

$$35. \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx.$$

$$-\frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

$$36. \int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2} dx.$$

$$\frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + \frac{30}{343} \ln \left| \frac{x-5}{x+2} \right|.$$

$$37. \int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} dx.$$

$$x + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right|.$$

$$38. \int \frac{x^4}{x^4-1} dx.$$

$$x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x.$$

$$39. \int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}.$$

جواب

$$\frac{1}{52} \ln |x-3| - \frac{1}{20} \ln |x-1| + \frac{1}{65} \ln (x^2+4x+5) + \frac{7}{130} \times \arctan (x+2).$$

$$40. \int \frac{dx}{x^2+1}.$$

$$\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$41. \int \frac{dx}{x^4+1}.$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \times \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

$$42. \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$$

$$\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}.$$

$$43. \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

$$\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\arctan x}{2}.$$

$$44. \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx.$$

$$\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \arctan (x+1).$$

$$45. \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}.$$

$$\ln |x+1| + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{5}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln (x^2+x+1).$$

$$46. \int \frac{x^2+1}{(x^2-4x+5)^2} dx. \text{ جواب } \frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)} + \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+5) + \frac{15}{2} \arctan(x-2).$$

روش استروگرادسکی^۱

اگر $Q(x)$ ریشه‌های چندگانه داشته باشد و مشتق آن را با $Q'(x)$ نشان دهیم، آنگاه

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)} dx$$

که در آن $Q_1(x)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین $Q(x)$ و $Q'(x)$ است و

$$Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x)$$

$X(x)$ و $Y(x)$ چند جمله‌ایهایی با ضرایب مجهول هستند که درجه‌های آنها بترتیب یک واحد کمتر از درجه $Q_1(x)$ و $Q_2(x)$ می‌باشند.

مثال. انتگرال زیر را حل کنید

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$$

حل.

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^2-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^2-1} dx.$$

از دو طرف مشتق می‌گیریم، داریم:

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^2-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^2-1)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^2-1} \quad \text{یا}$$

$$1 = (2Ax+B)(x^2-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) + (Dx^2+Ex+F)(x^2-1).$$

از متحد قرار دادن دو طرف، معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$D=0; \quad E-A=0; \quad F-2B=0; \quad D+3C=0; \quad E+2A=0; \quad B+F=-1$$

از حل دستگاه معادلات حاصل داریم:

$$A=0; \quad B=-\frac{1}{3}; \quad C=0; \quad D=0; \quad E=0; \quad F=-\frac{2}{3}$$

در نتیجه

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{3} \frac{x}{x^2-1} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2-1}$$

برای حل انتگرال اخیر، کسر $\frac{1}{x^2-1}$ را به مجموع کسره‌های جزئی تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

از آنجا

$$1 = L(x^2+x+1) + Mx(x-1) + N(x-1).$$

با قرار دادن $x=1$ حاصل می‌شود $L = \frac{1}{3}$.

با متحد قرار دادن دو طرف و استفاده از نتیجه فوق داریم:

$$L + M = 0; \quad L - N = 1,$$

$$M = -\frac{1}{3}; \quad N = -\frac{2}{3}.$$

یا

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = -\frac{x}{3(x^2-1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

و

۱۶-۱-۵ به کمک روش استروگرادسکی انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$1. \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}. \quad \text{جواب} \quad \frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2} \ln |x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{4} \arctan x.$$

$$2. \int \frac{dx}{(x^4-1)^2}. \quad // \quad -\frac{3}{8} \arctan x - \frac{x}{4(x^4-1)} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$$

$$3. \int \frac{dx}{(x^2+1)^4}. \quad // \quad \frac{15x^4+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3} + \frac{15}{48} \arctan x.$$

$$4. \int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2} dx. \quad // \quad x - \frac{x-1}{x^2-2x+2} + 2 \ln(x^2-2x+2) + 3 \arctan(x-1).$$

$$6. \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{10}}. \quad // \quad -\frac{1}{9(x-1)^9} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{7(x-1)^7}.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^5+x^4}. \quad // \quad -\frac{1}{5x^4} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \arctan x.$$

۵-۲ انتگرالگیری از بعضی از عبارات اصم

انتگرال از چنین عبارات اصمی را می‌توان با تغییر متغیرهای مناسب، به انتگرال از عبارت گویا تبدیل کرد. این روش را «گویایی کردن» گویند.

I. اگر انتگران به صورت $R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_k}{q_k}}\right)$ باشد، می‌توان تغییر متغیر

$x = t^m$ را بکاربرد که m کوچکترین مضرب مشترک بین $q_1, q_2, \dots, q_k$ است.

II. اگر انتگران به صورت توانهایی کسری از $\frac{ax+b}{cx+d}$ باشد از تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ استفاده می‌کنیم که m مثل بالا انتخاب می‌شود.

$$I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx. \quad 5-2-1$$

حل. کوچکترین مضرب مشترک بین ۳ و ۶ عدد ۶ است، پس تغییر متغیر زیر را در نظر بگیریم:

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt,$$

بنابر این

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{(t^6 + t^4 + t) t^5}{t^6 (1 + t^2)} dt = 6 \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1 + t^2} dt = \\ &= 6 \int t^3 dt + 6 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{3}{2} t^4 + 6 \arctan t + C. \end{aligned}$$

عبارت اخیر نسبت به x به صورت زیر می‌باشد:

$$I = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + 6 \arctan \sqrt[6]{x} + C.$$

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^2}} dx. \quad 5-2-2$$

$$\text{جواب } 4 \sqrt[4]{x} + 6 \sqrt[6]{x} + 24 \sqrt[12]{x} + 24 \ln \left| \sqrt[12]{x} - 1 \right| + C$$

$$I = \int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}} dx}{(2x-3)^{\frac{1}{3}} + 1} \quad 5-2-3$$

حل. انتگران تابعی اصم از $\sqrt[6]{2x-3}$ است پس فرض می کنیم $2x-3=t^6$ از آنجا

$$dx = 3t^5 dt; \quad (2x-3)^{\frac{1}{2}} = t^3; \quad (2x-3)^{\frac{1}{3}} = t^2$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3t^8}{t^2+1} dt = 3 \int (t^6 - t^4 + t^2 - 1) dt + 3 \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= 3 \frac{t^7}{7} - 3 \frac{t^5}{5} + 3 \frac{t^3}{3} - 3t + 3 \arctan t + C. \end{aligned}$$

که نسبت به x به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} I &= 3 \left[\frac{1}{7} (2x-3)^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5} (2x-3)^{\frac{5}{6}} \frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{1}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - (2x-3)^{\frac{1}{6}} + \arctan (2x-3)^{\frac{1}{6}} \right] + C. \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{dx}{x \left(2 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \right)}. \quad ۵-۲-۴$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \ln \left| \frac{\sqrt[3]{(t+2)^4}}{\sqrt[3]{t-1} \cdot \sqrt{t^2+t+1}} \right| + C, \quad \text{جواب:} \\ & \cdot t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \quad \text{که در آن} \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx \quad ۵-۲-۵$$

حل. چون انتگران تابعی از x و عبارت اصم $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ است، پس تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} = t; \quad \frac{2-x}{2+x} = t^3,$$

بنابراین

$$x = \frac{2-2t^3}{1+t^3}; \quad 2-x = \frac{4t^3}{1+t^3}; \quad dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2} dt.$$

پس

$$I = - \int \frac{2(1+t^3)^2 t \cdot 12t^2}{16t^6 (1+t^3)^2} dt = - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4t^2} + C.$$

و یا

$$I = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x} \right)^2} + C.$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5}}. \quad ۵-۲-۶$$

حل. چون

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5} = (x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}},$$

تابعی از x و $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$ است، بنابراین از تغییر متغیر

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}} = t; \quad \frac{x+2}{x-1} = t^4,$$

استفاده می‌کنیم از آنجا

$$x = \frac{t^4+2}{t^4-1}; \quad x-1 = \frac{3}{t^4-1}; \quad x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1};$$

$$dx = \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2} dt.$$

بنابراین

$$I = - \int \frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3 dt}{3 \cdot 3t^4(t^4-1)^2} = - \frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C.$$

و یا

$$I = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C.$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + C. \quad \text{جواب:} \quad \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} \quad ۵-۲-۷$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + C. \quad \text{جواب:} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}. \quad ۵-۲-۸$$

$$\int (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \quad ۵-۲-۹ \quad \text{جواب:}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}x\right) \sqrt{1-x^2} - \frac{3}{2} \arcsin x + C.$$

۵-۲-۱۰. انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$1. \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx. \quad \text{جواب} \quad 2 \sqrt{x-1} \left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3(x-1)^2}{5} + x \right].$$

$$2. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{ax+b}}. \quad \text{''} \quad \frac{3}{10a^2} \times \left[2 \sqrt[3]{(ax+b)^5} - 5b \sqrt[3]{(ax+b)^2} \right].$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}. \quad \text{''} \quad 2 \arcsin \sqrt{x+1}.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}. \quad \text{''} \quad 6 \sqrt[6]{x} - 3 \sqrt[3]{x} + 2 \sqrt{x} - 6 \ln(1 + \sqrt[6]{x}).$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx. \quad \text{''} \quad \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} +$$

$$+ 2 \sqrt{x} - 3 \sqrt[3]{x} - 6 \sqrt[6]{x} - 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x}| + 6 \arcsin \sqrt[6]{x}.$$

جواب

$$6. \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx.$$

$$\ln \left| \frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}.$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx. \quad \text{جواب} \quad 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} \times \arctan \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

$$8. \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}. \quad // \quad -2 \arctan \sqrt{1-x}.$$

$$9. \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx. \quad // \quad \frac{\sqrt{x^2-1}}{2} (x-2) + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}|.$$

$$10. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx. \quad // \quad \frac{1}{3} \ln \frac{z^2+z+1}{(z-1)^4} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2z+1}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{z^3-1},$$

که در آن $z = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$

$$11. \int \frac{x+3}{x^2 \sqrt{2x+3}} dx. \quad // \quad -\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$$

۳-۵ تغییر متغیرهای اویلر

انتگرالهای به صورت $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ به کمک «تغییر متغیرهای

اویلر» حل می شوند:

$$(1) \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a} \quad a > 0 \quad \text{اگر}$$

$$(2) \sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c} \quad c > 0 \quad \text{اگر}$$

$$(3) \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$$

$$\text{اگر } ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

که در آن α ریشه حقیقی سه جمله ای ax^2+bx+c است.

$$I = \int \frac{ax}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} \quad ۳-۵-۱$$

حل. چون $a=1 > 0$ پس

$$\sqrt{x^2+2x+2} = t - x.$$

طرفین را به توان ۲ می رسانیم و جملات مساوی را از طرفین حذف می کنیم:

$$2x + 2tx = t^2 - 2,$$

از آنجا

$$x = \frac{t^2 - 2}{2(1+t)}; \quad dx = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(1+t)^2} dt;$$

$$1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1 + t - \frac{t^2 - 2}{2(1+t)} = \frac{t^2 + 4t + 4}{2(1+t)}.$$

با توجه به مقادیر فوق داریم:

$$I = \int \frac{2(1+t)(t^2 + 2t + 2)}{(t^2 + 4t + 4)2(1+t)^2} dt = \int \frac{(t^2 + 2t + 2) dt}{(1+t)(t+2)^2}.$$

کسرهای معادل انتگران را تعیین می‌کنیم

$$\frac{t^2 + 2t + 2}{(t+1)(t+2)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} + \frac{D}{(t+2)^2}$$

با استفاده از روش ضرایب مجهول، داریم $A=1$, $B=0$, $D=-2$. بنابراین

$$\int \frac{t^2 + 2t + 2}{(t+1)(t+2)^2} dt = \int \frac{dt}{t+1} - 2 \int \frac{dt}{(t+2)^2} = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C.$$

و یا

$$I = \ln(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + \frac{2}{x+2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + C.$$

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} \quad ۵-۳-۲$$

حل. چون $\tilde{c} = 1 > 0$ ، می‌توان تغییر متغیر اوپلر را بکاربرد:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = tx - 1$$

از آنجا

$$(2t-1)x = (t^2-1)x^2; \quad x = \frac{2t-1}{t^2-1};$$

$$dx = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2} dt; \quad x + \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t}{t-1}.$$

بنابراین

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{-2t^2 + 2t - 2}{t(t-1)(t+1)^2} dt,$$

$$\frac{-2t^2 + 2t - 2}{t(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{D}{(t+1)^2} + \frac{E}{t+1}.$$

با روش ضرایب مجهول داریم:

$$A=2; \quad B=-\frac{1}{2}; \quad D=-3; \quad E=-\frac{3}{2}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t-1} - 3 \int \frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= 2 \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |t-1| + \frac{3}{t+1} - \frac{3}{2} \ln |t+1| + C, \end{aligned}$$

که در آن

$$t = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}$$

$$I = \int \frac{dx}{(1+x) \sqrt{1+x-x^2}}. \quad ۵-۳-۳$$

$$-2 \arctan \left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{x} \right) + C. \quad \text{جواب}$$

$$I = \int \frac{x dx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3} \quad ۵-۳-۴$$

حل. چون $a < 0$ و $c < 0$ پس نمی توان از تغییر متغیرهای اوایلر استفاده کرد. ولی سه جمله ای $7x-10-x^2$ دارای ریشه های حقیقی $\alpha=2$, $\beta=5$ است. بنابراین از تغییر متغیر سوم اوایلر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{7x-10-x^2} = \sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2)t$$

از آنجا

$$5-x = (x-2)t^2$$

$$x = \frac{5+2t^2}{1+t^2}; \quad dx = -\frac{6t dt}{(1+t^2)^2};$$

$$(x-2)t = \left(\frac{5+2t^2}{1+t^2} - 2 \right) t = \frac{3t}{1+t^2}.$$

بنابراین

$$I = -\frac{6}{27} \int \frac{5+2t^2}{t^2} dt = -\frac{2}{9} \int \left(\frac{5}{t^2} + 2 \right) dt = -\frac{2}{9} \left(-\frac{5}{t} + 2t \right) + C,$$

که در آن

$$t = \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$$

۵-۳-۵ انتگرالها زیر را با تغییر متغیرهای اوایلر حل کنید.

$$\begin{aligned} & 1 \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 + 2x + 4}}. \quad \text{جواب} \quad 2 \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x| - \\ & - \frac{3}{2(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1)} - \frac{3}{2} \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1| + C. \end{aligned}$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$. جواب $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + 2 \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. // $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + C$.
4. $\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}} dx$. // $\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{15} + C$.
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$ // $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| + C$.
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$ // $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + C$.
7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ // $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{2}} + C$.
8. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx$. // $\sqrt{x^2+2x} + \ln |x+1+\sqrt{x^2+2x}| + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$ // $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + C$.
10. $\int \sqrt{2x-x^2} dx$. // $\frac{1}{2} [(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)] + C$.
11. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$ // $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln |x+\sqrt{x^2-1}| + C$.
12. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$ // $\ln \left| \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}} \right| + C$.
13. $\int \frac{(x+1)}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}} dx$ // $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C$.
14. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx$ // $\ln \left| \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2} \right| + C$.
15. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2} dx$. // $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}} + \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x}| + C$.

۵-۴ سایر روشهای انتگرالگیری از عبارات اصم

چون در اغلب مواقع، تغییر متغیرهای اویلر باعث زحمت و کندی محاسبه می‌شوند، لذا اگر روش دیگر و ساده‌تری برای محاسبه انتگرال پیدا نکردیم از تغییر متغیرهای اویلر استفاده می‌کنیم. برای محاسبه انتگرالهای

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

روشهای ساده تری بکار برده می رود.

I. انتگرال

$$I = \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

را با تغییر متغیر $x + \frac{b}{2a} = t$ به صورت زیر می نویسیم:

$$I = M_1 \int \frac{t dt}{\sqrt{at^2 + K}} + N_1 \int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + K}},$$

که در آن M_1, N_1, K ضرایب جدید هستند. انتگرال اولی به یک انتگرال از تابع نمائی تبدیل می شود و انتگرال دومی، اگر $a > 0$ ، به انتگرال از تابع لگاریتمی و اگر $a < 0, K > 0$ ، به صورت $\arcsin$ در می آید.

II. انتگرال

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

که $P_m(x)$ یک چند جمله ای از درجه m است با فرمول کاهش زیر قابل محاسبه است.

$$\int \frac{P_m(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = P_{m-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (1)$$

که $P_{m-1}(x)$ یک چند جمله ای از درجه $m-1$ بوده و K یک عدد ثابت است. برای تعیین ضرایب $P_{m-1}(x)$ و عدد ثابت K ، از روش ضرایب مجهول استفاده می کنیم.

III. انتگرال

$$\int \frac{dx}{(x-a_1)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

با تغییر متغیر

$$x - a_1 = \frac{1}{t}.$$

به انتگرال حالت قبل تبدیل می شود.

IV. جهت آشنایی با تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی، به بخش (۷-۵)

مراجعه کنید.

$$I = \int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}. \quad ۵-۴-۱$$

حل. با استفاده از تغییر متغیر $2x+1=t$ داریم:

$$x = \frac{t-1}{2}, \quad dx = \frac{1}{2} dt$$

بنابراین

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{(t+5) dt}{\sqrt{t^2-4}} = \frac{1}{4} \sqrt{t^2-4} + \frac{5}{4} \ln |t + \sqrt{t^2-4}| + C.$$

و یا

$$I = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2+4x-3} + \frac{5}{4} \ln |2x+1 + \sqrt{4x^2+4x-3}| + C.$$

$$I = \int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx. \quad ۵-۴-۲$$

$$5 \sqrt{x^2+2x+5} - \ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+5}) + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx. \quad ۵-۴-۳$$

حل. در اینجا $P_m(x) = x^3 - x - 1$ ، پس

$$P_{m-1}(x) = Ax^2 + Bx + D.$$

انتگرال به صورت زیر بدست می‌آید:

$$I = (Ax^2 + Bx + D) \sqrt{x^2+2x+2} + K \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

با مشتقگیری از طرفین، داریم:

$$\begin{aligned} I' &= \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \\ &= (2Ax+B) \sqrt{x^2+2x+2} + (Ax^2+Bx+D) \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \\ &\quad + \frac{K}{\sqrt{x^2+2x+2}}. \end{aligned}$$

بعد از مخرج مشترک گرفتن، صورت کسرهای دو طرف را معادل قرار می‌دهیم:

$$x^3-x-1 = (2Ax+B)(x^2+2x+2) + (Ax^2+Bx+D)(x+1) + K.$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم درجه با هم، دستگاه معادلات زیر حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} 2A + A &= 1, & B + 4A + B + A &= 0; \\ 2B + 4A + D + B &= -1; & 2B + D + K &= -1. \end{aligned}$$

از حل این دستگاه داریم:

$$A = \frac{1}{3}; \quad B = -\frac{5}{6}; \quad D = \frac{1}{6}; \quad K = \frac{1}{2}.$$

پس

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}},$$

که در آن

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \ln(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + C.$$

$$I = \int \sqrt{4x^2 - 4x + 3} dx. \quad ۵-۴-۴$$

حل. انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$I = \int \frac{4x^2 - 4x + 3}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}} dx = (Ax + B)\sqrt{4x^2 - 4x + 3} + K \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}.$$

با استفاده از روش ضرایب مجهول داریم:

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \sqrt{4x^2 - 4x + 3} + \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2 + 2}} = \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \sqrt{4x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{2} \ln(2x-1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 3}) + C. \end{aligned}$$

$$\frac{3x^2 + x - 1}{3} \sqrt{3x^2 - 2x + 1} + C: \text{جواب} \int \frac{9x^3 - 3x^2 + 2}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} dx. \quad ۵-۴-۵$$

$$\int \sqrt{x^2 + x + 1} dx. \quad ۵-۴-۶$$

$$\frac{2x+1}{4} \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{8} \ln|2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int \frac{(x+4) dx}{(x-1)(x+2)^2 \sqrt{x^2 + x + 1}} \quad ۵-۴-۷$$

حل. انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int \frac{(x+4) dx}{(x-1)(x+2)^2 \sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

کسرهای معادل $\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^3}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}$$

ضرایب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A = \frac{5}{9}; \quad B = -\frac{2}{3}; \quad D = -\frac{5}{9}.$$

پس،

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{5}{9(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)^2} - \frac{5}{9(x+2)} \right] \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \\ &= \frac{5}{9} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}} - \\ &\quad - \frac{5}{9} \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}. \end{aligned}$$

انتگرال اول با تغییر متغیر $x-1 = \frac{1}{t}$ و انتگرالهای دوم و سوم با تغییر متغیر $x+2 = \frac{1}{t}$ حل می‌شوند که حل مشروح آن به دانشجو محول می‌شود.

۸-۴-۵ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$1. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx.$$

$$\frac{1}{3} (x^2 - 14x + 11) \sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| + C. \quad \text{جواب:}$$

$$2. \int \frac{3x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{\sqrt{2x^2 + 5x + 7}} dx.$$

$$\frac{1}{64} (32x^2 - 20x - 373) \sqrt{2x^2 + 5x + 7} + \frac{3297}{128 \sqrt{2}} \ln |4x + 5 + 2\sqrt{4x^2 + 10x + 14}| + C. \quad \text{جواب}$$

$$3. \int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2 + 2x}}.$$

$$\frac{3x+5}{8(x+1)^2} \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{(x+1)} + C. \quad \text{جواب:}$$

$$4. \int \frac{x dx}{(x^2 - 3x + 2) \sqrt{x^2 - 4x + 3}} \quad \text{جواب} \quad - \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x-1} - 2 \arcsin \frac{1}{x-2} + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2 + 3x + 2}}. \quad // \quad - \frac{2}{15} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \frac{8x^2 + 12x + 7}{(x+1)^2} + C.$$

$$6. \int \frac{(x^2 - 1) dx}{x \sqrt{1 + 3x^2 + x^4}}. \quad // \quad \ln \left| \frac{x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}{x} \right| + C.$$

راهنمایی: از تغییر متغیر $x^2 = t$ استفاده کنید.

7. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}} dx.$
جواب: $\frac{1}{5} \sqrt{5x^2-2x+1} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \ln \left(x\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5x^2-2x+1} \right).$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$ جواب $\ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \right|.$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}.$ // $-\arcsin \frac{2-x}{x\sqrt{5}}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$ // $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5}.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$ // $\arcsin(2x-1).$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$ // $\ln \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q} \right|.$
13. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx.$ // $3\sqrt{x^2-4x+5}.$
14. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx.$ // $-2\sqrt{1-x-x^2} - 9 \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}}.$
15. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$ // $\arcsin \frac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}} (x > \sqrt{2}).$
16. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}.$ // $-\arcsin \frac{1}{x+1}.$
17. $\int \sqrt{x^2+2x+5} dx.$ // $\frac{x+1}{2} \sqrt{x^2+2x+5} + 2 \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}).$
18. $\int \sqrt{x-x^2} dx.$ // $\frac{2x-1}{4} \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8} \arcsin(2x-1).$
19. $\int \sqrt{2-x-x^2} dx.$ // $\frac{2x+1}{4} \sqrt{2-x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x+1}{3}.$
20. $\int \frac{x dx}{x^4-4x^2+3}.$ // $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2-3}{x^2-1} \right|.$
21. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6 \sin x + 12} dx.$ // $-\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3-\sin x}{\sqrt{3}}.$
22. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$ // $\ln \left(e^x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+e^x+e^{2x}} \right).$
23. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}.$ // $-\ln |\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}|.$
24. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}}.$ // $\frac{2x+3}{8} \sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{16} \ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}).$
25. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ // $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15} \sqrt{1-x^2}.$
26. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx.$ // $\left(\frac{5}{16}x - \frac{5}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \right) \times \sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16} \ln(x+\sqrt{1+x^2}).$
27. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}}.$ // $\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{3}{8x^2} \right) \sqrt{x^2-1} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{x}.$

$$28 \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x}} \cdot \text{جواب} \quad \frac{1}{2(x+1)^2} \sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{x+1}.$$

$$29 \int \frac{x^2+x+1}{x \sqrt{x^2-x+1}} dx.$$

$$\text{جواب:} \quad \frac{2x-1}{4} \sqrt{x^2-x+1} + \frac{19}{8} \ln \times (2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}).$$

۵-۵ انتگرالگیری از دو جمله‌ای دیفرانسیلی

انتگرال $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ که در آن m, n, p اعداد گویا هستند فقط در سه حالت زیر با انتگرال توابع مقدماتی بیان می‌شود:

حالت I. p عددی صحیح است. اگر $p > 0$ ، پراتنرا به وسیله دو-جمله‌ای نیوتن بسط می‌دهیم، ولی اگر $p < 0$ ، در اینصورت فرض می‌کنیم $x = t^k$ که k مخرج مشترک m و n است.

حالت II. $\frac{m+1}{n}$ عددی صحیح است. فرض می‌کنیم $a+bx^n = t^a$ که α مخرج کسر p است.

حالت III. $\frac{m+1}{n} + p$ عددی صحیح است فرض می‌کنیم $a+bx^n = t^\alpha x^n$ که α مخرج کسر p است.

$$I = \int \sqrt[3]{x} (2 + \sqrt{x})^2 dx \quad 5-5-1$$

حل. انتگرال را به صورت

$$I = \int x^{\frac{1}{3}} \left(2 + x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx.$$

می‌نویسیم چون $p=2$ ، پس حالت اول است.

$$\begin{aligned} I &= \int x^{\frac{1}{3}} \left(x + 4x^{\frac{1}{2}} + 4\right) dx = \int \left(x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{5}{6}} + 4x^{\frac{1}{3}}\right) dx = \\ &= \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + \frac{24}{11} x^{\frac{11}{6}} + 3x^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$3 \arcsin \sqrt[3]{x} + C. \quad \text{جواب:} \quad I = \int x^{-\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1} dx. \quad 5-5-2$$

$$I = \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx. \quad 5-5-3$$

$$\text{حل.} \quad I = \int x^{-\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

$$m = -\frac{2}{3}; \quad n = \frac{1}{3}; \quad p = \frac{1}{2}; \quad \frac{m+1}{n} = \frac{\left(-\frac{2}{3}+1\right)}{\frac{1}{3}} = 1$$

پس حالت دوم است و از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$1+x^{\frac{1}{3}} = t^2; \quad \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = 2t dt.$$

بنابراین

$$I = 6 \int t^2 dt = 2t^3 + C = 2 \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$I = \int x^{\frac{1}{3}} \left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} dx. \quad ۵-۵-۴$$

$$\frac{2}{3} \left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}} - \frac{12}{5} \left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}} + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int x^6 \left(1+x^2\right)^{\frac{2}{3}} dx. \quad ۵-۵-۵$$

$$\frac{3}{22} (1+x^2)^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{10} (1+x^2)^{\frac{5}{3}} + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int x^{-11} \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}} dx. \quad ۵-۵-۶$$

حل. در این انتگرال

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-11+1}{4} = -\frac{5}{2} \quad \text{و} \quad p = -\frac{1}{2}$$

چون

$$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -3$$

پس حالت سوم است. فرض می کنیم $1+x^4 = x^4 t^2$ ، بنابراین

$$x = \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}; \quad dx = -\frac{t dt}{2(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}.$$

با توجه به مطالب فوق داریم:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \int (t^2-1)^{\frac{11}{4}} \left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{t dt}{(t^2-1)^{\frac{5}{4}}} = \\ &= -\frac{1}{2} \int (t^2-1)^2 dt = -\frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + C. \end{aligned}$$

و یا

$$I = -\frac{1}{10x^{10}} \sqrt{(1+x^4)^5} + \frac{1}{3x^8} \sqrt{(1+x^4)^3} - \frac{1}{2x^2} \sqrt{1+x^4} + C.$$

۷-۵-۵ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$1 \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx. \quad \text{جواب} \quad \frac{12}{7} \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3 \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C.$$

$$2 \int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^4}. \quad 3 \ln \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + C.$$

$$3. \int x^3 (1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx. \quad \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}} (3x^2-2)}{15} + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}. \quad \frac{\sqrt{1+x^2} (2x^2-1)}{3x^3} + C.$$

$$5 \int \sqrt[3]{x} \sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x^4}} dx. \quad \frac{21}{32} \sqrt[7]{(1+\sqrt[3]{x^4})^8} + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}. \quad \frac{5}{4} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} - \frac{5}{9} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{9}{5}} + C.$$

$$7. \int x^3 (1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx. \quad \frac{1}{2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}. \quad \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1} - \frac{1}{2} \arctan \sqrt[4]{x^{-4}+1}.$$

$$9 \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^3}}. \quad \frac{1}{10} \ln \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \arctan \frac{2z+1}{\sqrt{3}},$$

که در آن $z = \sqrt[3]{1+x^3}$

$$10 \int \frac{dx}{x^3 (2+x^3)^{\frac{5}{3}}}. \quad -\frac{1}{8} \frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

$$11 \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}. \quad -2 \sqrt[3]{(x^{-\frac{3}{4}}+1)^2}.$$

۵-۶ انتگرالگیری از توابع مثلثاتی و هذلولوی

I. انتگرال به صورت

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx,$$

که در آن m و n اعداد گویا هستند قابل تبدیل به انتگرال دو جمله دیفرانسیلی می باشد

$$I = \int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt, \quad t = \sin x$$

و بنابر این فقط در سه حالت زیر به انتگرال از توابع مقدماتی تبدیل می شود:

(۱) n فرد (یا $\frac{n-1}{2}$ عددی صحیح است)،

(۲) m فرد (یا $\frac{m+1}{2}$ عددی صحیح است)،

(۳) $m+n$ زوج (یا $\frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2}$ عددی صحیح است).

اگر n یک عدد فرد باشد، تغییر متغیر $\sin x = t$ را بکار می بریم.

اگر m یک عدد فرد باشد، از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می کنیم.

اگر $m+n$ زوج باشد، تغییر متغیر $\tan x = t$ (یا $\cot x = t$) را بکار

می بریم.

در حالت خاص، این تغییر متغیر برای انتگرالهای

$$\int \cot^n x dx \quad \text{یا} \quad \int \tan^n x dx$$

وقتی مناسب است که n یک عدد صحیح و مثبت باشد. ولی این تغییر متغیر

وقتی m و n هر دو مثبت باشند، مناسب نیست. اگر m و n اعداد زوج نامنفی

باشند، تغییر متغیر مثلثاتی مناسب تر است،

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

و یا

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^2 x}} dx. \quad ۵-۶-۱$$

حل. در اینجا $m=3$ عددی فرد است. فرض می کنیم

$$\cos x = t,$$

از آنجا

$$I = -\int (1-t^2) t^{-\frac{2}{3}} dt = -3t^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{7} t^{\frac{7}{3}} + C = \\ = 3 \sqrt[3]{\cos x} \left(\frac{1}{7} \cos^3 x - 1 \right) + C.$$

$$\frac{1}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{5 \sin^5 x} + C. \quad \text{جواب: } I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx. \quad ۵-۶-۲$$

$$I = \int \sin^4 x \cos^6 x dx. \quad ۵-۶-۳$$

حل. در اینجا m و n اعداد زوج و مثبت هستند. توان را کاهش می‌دهیم:

$$I = \frac{1}{16} \int (2 \sin x \cos x)^4 \cos^2 x dx = \frac{1}{32} \int \sin^4 2x (1 + \cos 2x) dx = I_1 + I_2.$$

انتگرال دوم را با تغییر متغیر زیر حل می‌کنیم:

$$\sin 2x = t, \quad \cos 2x dx = \frac{1}{2} dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{32} \int \sin^4 2x \cos 2x dx = \frac{1}{64} \int t^4 dt = \frac{t^5}{320} + C = \frac{1}{320} \sin^5 2x + C.$$

برای محاسبه انتگرال اول، دوباره روش تقلیل توان را بکار می‌گیریم:

$$I_1 = \frac{1}{32} \int \sin^4 2x dx = \frac{1}{128} \int (1 - \cos 4x)^2 dx = \\ = \frac{1}{128} \left(x - \frac{1}{2} \sin 4x \right) + \frac{1}{256} \int (1 + \cos 8x) dx = \\ = \frac{3}{256} x - \frac{1}{256} \sin 4x + \frac{1}{2048} \sin 8x + C.$$

و بالاخره

$$I = \frac{3}{256} x - \frac{1}{256} \sin 4x + \frac{1}{2048} \sin 8x + \frac{1}{320} \sin^5 2x + C.$$

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx \quad ۵-۶-۴$$

حل. در اینجا m و n هر دو زوج هستند، ولی یکی از آنها منفی است. پس

فرض کنیم:

$$\tan x = t; \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2; \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$$

بنابر این

$$I = \int t^2 (1 + t^2) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C.$$

$$I = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx. \quad ۵-۶-۵$$

حل. در اینجا می توان فرض کرد $\cot x = t$ ، ولی راحت تر آن است که به صورت زیر عمل کنیم:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 + \sin^2 x \right) dx = \\ &= -\cot x - 2x + \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \\ &= -\left(\cot x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

$$\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C. \quad I = \int \frac{dx}{\cos^4 x} \quad ۵-۶-۶ \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x \cos x}}. \quad ۵-۶-۷$$

حل. در این انتگرال هر دو توان منفی است و $-\frac{11}{3} - \frac{1}{3} = -4$ یعنی مجموعشان زوج است، بنابراین فرض می کنیم:

$$\tan x = t; \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt[3]{\tan^{11} x}} = \int \frac{1+t^2}{\sqrt[3]{t^{11}}} dt = \\ &= \int \left(t^{-\frac{11}{3}} + t^{-\frac{5}{3}} \right) dt = -\frac{3}{8} t^{-\frac{8}{3}} - \frac{3}{2} t^{-\frac{2}{3}} + C = \\ &= -\frac{3(1+4 \tan^2 x)}{8 \tan^2 x \sqrt[3]{\tan^2 x}} + C. \end{aligned}$$

۵-۶-۸ انتگرال توابع $\tan x$ و $\cot x$ را حساب کنید.

حل.

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C;$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$I = \int \tan^2 x dx \quad ۵-۶-۹$$

حل. فرض کنیم

$$\tan x = t, \quad x = \arctan t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

داریم:

$$\begin{aligned}
 I &= \int t^7 \frac{dt}{1+t^2} = \int \left(t^5 - t^3 + t - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \\
 &= \frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \\
 &= \frac{1}{6} \tan^6 x - \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.
 \end{aligned}$$

$$(a) I = \int \cot^6 x dx; \quad (b) I = \int \tan^3 x dx. \quad ۵-۶-۱۰$$

جواب:

$$\begin{aligned}
 (a) & -\cot x + \frac{1}{3} \cot^3 x - \frac{1}{5} \cot^5 x - x + C; \\
 (b) & \frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{1}{2} \ln(1+\tan^2 x) + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.
 \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx \quad ۵-۶-۱۱$$

حل. در اینجا توان $\sin x$ زوج است، لذا فرض می‌کنیم

$$\cos x = t, \quad -\sin x dx = dt$$

و در نتیجه

$$I = \int \frac{\cos^4 x \sin x}{\sin^4 x} dx = - \int \frac{t^4}{(1-t^2)^3} dt.$$

برای محاسبه، ساده‌تر است که از روش جزء بجزء وبا استفاده از روش کلی انتگرالگیری کسرهای گویا، عمل بکنیم (به مسئله (b) 4.4.1 مراجعه کنید):

$$u = t^3; \quad dv = \frac{t dt}{(1-t^2)^3}$$

پس

$$du = 3t^2 dt; \quad v = \frac{1}{2(1-t^2)}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{t^3}{2(1-t^2)} + \frac{3}{2} \int \frac{t^2 dt}{1-t^2} = \\
 &= -\frac{t^3}{2(1-t^2)} + \frac{3}{2} \int \frac{t^2-1+1}{1-t^2} dt = \\
 &= -\frac{t^3}{2(1-t^2)} - \frac{3}{2} t + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \\
 &= -\frac{\cos^3 x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \cos x + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$-\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C. \quad \text{جواب } I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx \quad ۵-۶-۱۲$$

II انتگرال $\int R(\sin x, \cos x) dx$ که R تابعی گویا از $\sin x$ و $\cos x$ است و با تغییر متغیر

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad (-\pi < x < \pi).$$

به انتگرال کسره‌ای گویا تبدیل می‌شود. این تغییر متغیر را «تغییر متغیر عمومی» گویند. در این حالت

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2 \arctan t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

بعضی مواقع به جای تغییر متغیر $\tan \frac{x}{2} = t$ ، تغییر متغیر $\cot \frac{x}{2} = t$ ($0 < x < 2\pi$)، خیلی مفید است.

اغلب محاسبات، با تغییر متغیر عمومی $\tan \frac{x}{2} = t$ و پرزحمت است.

از حالات زیر می‌توان برای تشخیص تغییر متغیر ساده‌تر استفاده کرد:

(الف) اگر تساویهای

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

یا

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

برقرار باشند، توصیه می‌شود که در حالت اول از تغییر متغیر $\cos x = t$ و در حالت دوم از تغییر متغیر $\sin x = t$ استفاده شود.

(ب) اگر تساوی

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

برقرار باشد، بهتر است تغییر متغیر $\tan x = t$ یا $\cot x = t$ را بکار ببریم.

مثلاً با تغییر متغیر اخیر به انتگرال $\int R(\tan x) dx$ می‌رسیم.

$$I = \int \frac{dx}{\sin x (2 + \cos x - 2 \sin x)} \quad ۵-۶-۱۳$$

حل. فرض می‌کنیم

$$\tan \frac{x}{2} = t$$

پس داریم:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2} \right)} = \int \frac{(1+t^2) dt}{t(t^2-4t+3)}.$$

کسرهای معادل را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{D}{t-1}.$$

ضرایب به قرار زیر تعیین می‌شوند:

$$A = \frac{1}{3}; \quad B = \frac{5}{3}; \quad D = -1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t-3} - \int \frac{dt}{t-1} = \\ &= \frac{1}{3} \ln |t| + \frac{5}{3} \ln |t-3| - \ln |t-1| + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 3 \right| - \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 1 \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{جواب: } I = \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x} \cdot 5-6-14$$

$$\frac{2}{\sqrt{15}} \arctan \left(\frac{1 + 2 \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{15}} \right) + C.$$

$$I = \int \frac{dx}{\sin x (2 \cos^2 x - 1)} \cdot 5-6-15$$

حل هرگاه در عبارت $\frac{1}{\sin x (2 \cos^2 x - 1)}$ ، $\sin x$ را به $-\sin x$

تبدیل کنیم، علامت کسر تغییر می‌کند. پس بهتر است از تغییر متغیر

$$t = \cos x; \quad dt = -\sin x \, dx$$

استفاده شود.

$$I = - \int \frac{dt}{(1-t^2)(2t^2-1)}$$

چون

$$\frac{1}{(1-t^2)(1-2t^2)} = \frac{(2-2t^2)-(1-2t^2)}{(1-t^2)(1-2t^2)} = \frac{2}{1-2t^2} - \frac{1}{1-t^2},$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{dt}{1-2t^2} - \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2} \cos x}{1-\sqrt{2} \cos x} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2} \cos x}{1-\sqrt{2} \cos x} \right| + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad ۵-۶-۱۶$$

حل. هرگاه $\sin x$ و $\cos x$ را به قرینه خودشان تبدیل کنیم، علامت عبارت تغییر نمی کند، پس تغییر متغیر زیر مناسب است

$$t = \tan x; \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

بنابراین

$$I = \int \frac{\tan^2 x \cdot \cos^4 x}{(\tan x + 1) \cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{t^2 dt}{(t+1)(t^2+1)^2}$$

کسرهای معادل را تعیین کرده

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+D}{t^2+1} + \frac{Et+F}{(t^2+1)^2}$$

ضرایب را حساب می کنیم

$$A = \frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4}; \quad D = \frac{1}{4}; \quad E = \frac{1}{2}; \quad F = -\frac{1}{2}.$$

پس

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{4} \int \frac{t-1}{t^2+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{(t^2+1)^2} dt; \\ I &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1+t}{1+t^2} + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C. \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{2 \tan x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx \quad ۵-۶-۱۷$$

حل. صورت و مخرج را به $\cos^2 x$ تقسیم می کنیم و از تغییر متغیر

$$\tan x = t; \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2 \tan x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx = \int \frac{(2 \tan x + 3) \frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2} = \\
 &= \int \frac{2t + 3}{t^2 + 2} dt = \ln(t^2 + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \\
 &= \ln(\tan^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C.
 \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx \quad ۵-۶-۱۸$$

حل. البته، این انتگرال بکمک تغییر متغیر عمومی $\tan \frac{x}{2} = t$ حل می‌شود، ولی اگر انتگرال را به صورت زیر تغییر دهیم، محاسبه ساده‌تر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin x}{1 + \sin x} &= \frac{\sin x (1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{\sin x (1 - \sin x)}{\cos^2 x} = \\
 &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \tan^2 x.
 \end{aligned}$$

از آنجا

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \int \sec^2 x dx + \int dx = \frac{1}{\cos x} - \tan x + x + C.$$

$$I = \int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} dx \quad ۵-۶-۱۹$$

حل. در اینجا می‌توان انتگرال را با تغییر متغیر $\tan x = t$ حل کرد، ولی اگر انتگرال را به صورت زیر تغییر دهیم، محاسبه راحت‌تر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \\
 &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \tan^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + 2 \tan x - \cot x = \\
 &= \frac{1}{3} \tan^3 x + 2 \tan x - \cot x + C.
 \end{aligned}$$

III انتگرالگیری از توابع هذلولوی

انتگرالگیری از توابع هذلولوی، همانند انتگرالگیری از توابع مثلثاتی است. باید در محاسبات، دستورهای اساسی زیر را بخاطر داشته باشیم:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1; \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2} (\cosh 2x - 1);$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2} (\cosh 2x + 1); \quad \sinh x \cosh x = \frac{1}{2} \sinh 2x.$$

$$\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}; \quad \text{اگر } \tanh \frac{x}{2} = t$$

$$x = 2 \operatorname{Artanh} t = \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \quad (-1 < t < 1); \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}$$

$$I = \int \cosh^2 x \, dx \quad ۵-۶-۲۰$$

حل

$$I = \int \frac{1}{2} (\cosh 2x + 1) \, dx = \frac{1}{4} \sinh 2x + \frac{1}{2} x + C.$$

$$I = \int \cosh^3 x \, dx \quad ۵-۶-۲۱$$

حل. چون توان $\cosh x$ فرد است، لذا فرض می‌کنیم

$$\sinh x = t; \quad \cosh x \, dx = dt.$$

از آنجا

$$\begin{aligned} I &= \int \cosh^2 x \cosh x \, dx = \int (1+t^2) \, dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \\ &= \sinh x + \frac{1}{3} \sinh^3 x + C. \end{aligned}$$

۵-۶-۲۲ انتگرالهای زیر را حساب کنید

$$1 \quad \int \sinh^2 x \cosh^2 x \, dx; \quad \text{جواب} \quad -\frac{x}{8} + \frac{\sinh 4x}{32} + C;$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{\sinh x + 2 \cosh x}. \quad // \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tanh \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

$$3. \quad \int \cos^2 x \, dx. \quad // \quad \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x.$$

$$4. \quad \int \sin^3 x \, dx. \quad // \quad -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x.$$

$$5. \quad \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx. \quad // \quad \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}.$$

$$6. \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} \, dx. \quad // \quad \frac{1}{4} \cos^3 \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cos^5 \frac{x}{2}.$$

$$7. \quad \int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} \, dx. \quad // \quad \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2 \sin^2 x} - 2 \ln |\sin x|.$$

$$8. \quad \int \sin^4 x \, dx. \quad // \quad \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}.$$

9. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$ جواب $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}.$
10. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$ // $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}$
11. $\int \cos^3 3x dx.$ // $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{64}\sin 12x + \frac{1}{144}\sin^3 6x.$
12. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$ // $-\cot x - \frac{\cot^3 x}{3}.$
13. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ // $\tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x.$
14. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx.$ // $-\frac{\cot^3 x}{3} - \frac{\cot^5 x}{5}.$
15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$ // $\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} - 2 \cot 2x.$
16. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^2 x}.$ // $\frac{1}{2}\tan^2 x + 3 \ln |\tan x| - \frac{3}{2\tan^2 x} - \frac{1}{4\tan^4 x}.$
17. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}.$ // $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 2 \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$
18. $\int \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin x \cos x} dx.$ // $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left[\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right].$
19. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$ // $-\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$
20. $\int \sec^5 4x dx.$ // $\frac{\sin 4x}{16 \cos^4 4x} + \frac{3 \sin 4x}{32 \cos^2 4x} + \frac{3}{32} \ln \left| \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$
21. $\int \tan^2 5x dx.$ // $\frac{1}{5} \tan 5x - x.$
22. $\int \cot^3 x dx.$ // $-\frac{\cot^2 x}{2} - \ln |\sin x|.$
23. $\int \cot^4 x dx.$ // $-\frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x.$
24. $\int \left(\tan^2 \frac{x}{3} + \tan^4 \frac{x}{4} \right) dx.$ // $\frac{3}{2} \tan^2 \frac{x}{3} + \tan^3 \frac{x}{3} - 3 \tan \frac{x}{3} + 3 \ln \left| \cos \frac{x}{3} \right| + x.$
25. $\int x \sin^2 x^2 dx.$ // $\frac{x^2}{4} - \frac{\sin 2x^2}{8}.$
26. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx.$ // $-\frac{\cot^3 x}{3}.$
27. $\int \sin^4 x \sqrt[3]{\cos x} dx.$ // $-\frac{3}{4} \sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{16} \sqrt[3]{\cos^{16} x}.$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$ // $2 \sqrt{\tan x}.$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}.$ // $\frac{1}{2 \sqrt{2}} \times \ln \frac{z^2 + z \sqrt{2} + 1}{z^2 - z \sqrt{2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{z \sqrt{2}}{z^2 - 1},$
که در آن $z = \sqrt{\tan x}.$
30. $\int \sin 3x \cos 5x dx.$ // $-\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4}.$
31. $\int \sin 10x \sin 15x dx.$ // $-\frac{\sin 25x}{50} + \frac{\sin 5x}{10}.$
32. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx.$ // $\frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6}.$

33. $\int \sin \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3} dx.$ جواب $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \cos x.$
34. $\int \cos(ax+b) \cos(ax-b) dx.$ // $\frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{x \cos 2b}{2}.$
35. $\int \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt.$ // $\frac{t \cos \varphi}{2} - \frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{4\omega}.$
36. $\int \cos x \cos^3 3x dx.$ // $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 7x}{28}.$
37. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$ // $\frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{x16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x.$
38. $\int \frac{dx}{3+5 \cos x}.$ // $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 2}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right|$
39. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$ // $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|.$
40. $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx.$ // $x - \tan \frac{x}{2}.$
41. $\int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx.$ // $-x + \tan x + \sec x.$
42. $\int \frac{dx}{8-4 \sin x + 7 \cos x}.$ // $\ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 5}{\tan \frac{x}{2} - 3} \right|$
43. $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}.$ // $\arctan \left(1 + \tan \frac{x}{2} \right).$
44. $\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx.$ // $\frac{12}{13} x - \frac{5}{13} \ln |2 \sin x + 3 \cos x|.$

حل. فرض می کنیم

$$3 \sin x + 2 \cos x = \alpha (2 \sin x + 3 \cos x) + \beta (2 \sin x + 3 \cos x)'$$

از آنجا،

$$2\alpha - 3\beta = 3, \quad 3\alpha + 2\beta = 2$$

نتیجه می شود:

$$\alpha = \frac{12}{13}, \quad \beta = -\frac{5}{13}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx &= \frac{12}{13} \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x} - \frac{5}{13} \times \int \frac{(2 \sin x + 3 \cos x)'}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \\ &= \frac{12}{13} x - \frac{5}{13} \ln |2 \sin x + 3 \cos x|. \end{aligned}$$

45. $\int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx.$ جواب $-\ln |\cos x - \sin x|.$
46. $\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}.$ // $\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\tan x}{2} \right).$
47. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}.$ // $\frac{1}{\sqrt{15}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3} \tan x}{\sqrt{5}} \right).$

$$\begin{aligned}
 48. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x} & \quad \text{جواب} \quad \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2 \tan x + 3 - \sqrt{13}}{2 \tan x + 3 + \sqrt{13}} \right| \\
 49. \int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x} & \quad // \quad \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\tan x - 5}{\tan x} \right| \\
 50. \int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2} dx & \quad // \quad -\frac{1}{2(1 - \cos x)^2} \\
 51. \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx & \quad // \quad \ln(1 + \sin^2 x) \\
 52. \int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx & \quad // \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \\
 53. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5} dx & \quad // \quad \frac{1}{4} \ln \frac{5 - \sin x}{1 - \sin x}
 \end{aligned}$$

جواب :

$$54. \int \frac{dx}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan x \times \frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} - 1}{2 \sqrt{2}}$$

راهنمایی :

$$\frac{1}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)} = \frac{1}{2 - \sin x} - \frac{1}{3 - \sin x}$$

$$55. \int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx \quad \text{جواب} \quad -x + 2 \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} + 1} \right|$$

راهنمایی :

$$\frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} = -1 + \frac{2}{1 + \sin x - \cos x}$$

$$\begin{aligned}
 56. \int \sinh^3 x dx & \quad \text{جواب} \quad \frac{\cosh^3 x}{3} - \cosh x \\
 57. \int \cosh^4 x dx & \quad // \quad \frac{3x}{8} + \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{\sinh 4x}{32} \\
 58. \int \sinh^3 x \cosh x dx & \quad // \quad \frac{\sinh^4 x}{4} \\
 59. \int \sinh^2 x \cosh^2 x dx & \quad // \quad -\frac{x}{8} + \frac{\sinh 4x}{32} \\
 60. \int \frac{dx}{\sinh x \cosh^2 x} & \quad // \quad \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\cosh x} \\
 61. \int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} & \quad // \quad -2 \coth 2x \\
 62. \int \tanh^3 x dx & \quad // \quad \ln(\cosh x) - \frac{\tanh^2 x}{2} \\
 63. \int \coth^4 x dx & \quad // \quad x - \coth x - \frac{\coth^3 x}{3} \\
 64. \int \frac{dx}{\sinh^2 x + \cosh^2 x} & \quad // \quad \arctan(\tanh x)
 \end{aligned}$$

جواب: $65. \int \frac{dx}{2 \sinh x + 3 \cosh x}.$

یا $\frac{2}{\sqrt{5}} \arctan(e^x \sqrt{5})$ و $\frac{2}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{3 \tanh \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{5}}\right)$

جواب: $66. \int \frac{dx}{\tanh x - 1}.$ راهنمایی: $-\frac{\sinh^2 x}{2} - \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2}.$

$\frac{-1}{\sinh x - \cosh x} \equiv (\sinh x + \cosh x).$

جواب: $67. \int \frac{\sinh x \, dx}{\sqrt{\cosh 2x}}.$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \cosh x + \sqrt{\cosh 2x}).$

۷-۵ محاسبه بعضی از انتگرالها بکمک تغییر متغیرهای

مثلثاتی و هذلولوی

در انتگرالگیری از توابع گویای وابسته به x و $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ، می توان آنها را بیکی از انتگرالهای زیر تبدیل کرد:

I. $\int R(t, \sqrt{p^2 t^2 + q^2}) dt;$

II. $\int R(t, \sqrt{p^2 t^2 - q^2}) dt;$

III. $\int R(t, \sqrt{q^2 - p^2 t^2}) dt,$

که در آن

$$t = x + \frac{b}{2a}; \quad ax^2 + bx + c = \pm p^2 t^2 \pm q^2$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر می توان انتگرالهای I تا III را به عبارات گویایی از سینوس و کسینوس (مثلثاتی یا هذلولوی) تبدیل کرد:

I. $t = \frac{q}{p} \tan z$ یا $t = \frac{q}{p} \sinh z.$

II. $t = \frac{q}{p} \sec z$ یا $t = \frac{q}{p} \cosh z.$

III. $t = \frac{q}{p} \sin z$ یا $t = \frac{q}{p} \tanh z.$

۷-۵-۱ $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$

حل. داریم:

$$5 + 2x + x^2 = 4 + (x + 1)^2.$$

فرض می‌کنیم $x + 1 = t$ ؛ پس

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}} = \int \frac{dt}{(4+t^2)^3}$$

انتگرالی از نوع I حاصل می‌شود که برای محاسبه آن از تغییر متغیر

$$t = 2 \tan z; dt = \frac{2dz}{\cos^2 z}; \sqrt{4+t^2} = 2\sqrt{1+\tan^2 z} = \frac{2}{\cos z}$$

استفاده می‌کنیم، داریم:

$$I = \frac{1}{4} \int \cos z dz =$$

$$= \frac{1}{4} \sin z + C = \frac{1}{4} \frac{\tan z}{\sqrt{1+\tan^2 z}} + C = \frac{1}{4} \frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}} + C = \frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}} + C.$$

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x+2}} \quad ۵-۷-۲$$

حل. چون $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ فرض می‌کنیم $x+1 = t$ ؛ پس

$$I = \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2+1}}$$

دوباره به انتگرالی از نوع I می‌رسیم. تغییر متغیر $t = \sinh z$ را در نظر می‌گیریم. پس

$$dt = \cosh z dz; \sqrt{t^2+1} = \sqrt{1+\sinh^2 z} = \cosh z.$$

بنابراین

$$I = \int \frac{\cosh z dz}{\sinh^2 z \cosh z} = \int \frac{dz}{\sinh^2 z} = -\coth z + C = -\frac{\sqrt{1+\sinh^2 z}}{\sinh z} + C = -\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} + C = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C.$$

$$I = \int x^2 \sqrt{x^2-1} dx \quad ۵-۷-۳$$

$$-\frac{1}{8} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{8} x(2x^2-1) \sqrt{x^2-1} + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx \quad ۵-۷-۴$$

$$\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int \sqrt{(x^2-1)^3} dx. \quad ۵-۷-۵$$

حل. از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$x = \cosh t; \quad dx = \sinh t \, dt.$$

بنابر این

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{(\cosh^2 t - 1)^3} \sinh t \, dt = \int \sinh^4 t \, dt = \\ &= \int \left(\frac{\cosh 2t - 1}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \cosh^2 2t \, dt - \frac{1}{2} \int \cosh 2t \, dt + \frac{1}{4} \int dt = \\ &= \frac{1}{8} \int (\cosh 4t + 1) dt - \frac{1}{4} \sinh 2t + \frac{1}{4} t = \\ &= \frac{1}{32} \sinh 4t - \frac{1}{4} \sinh 2t + \frac{3}{8} t + C. \end{aligned}$$

و یا

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{Arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}); \\ \sinh 2t &= 2 \sinh t \cosh t = 2x \sqrt{x^2-1}; \\ \sinh 4t &= 2 \sinh 2t \cosh 2t = 4x \sqrt{x^2-1} (2x^2-1). \end{aligned}$$

بنابر این

$$I = \frac{1}{8} x (2x^2-1) \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-1} + \frac{3}{8} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

$$I = \int \frac{dx}{(1+\sqrt{x}) \sqrt{x-x^2}} \quad ۵-۷-۶$$

حل. تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$x = \sin^2 t; \quad dx = 2 \sin t \cos t \, dt$$

و داریم

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 \sin t \cos t \, dt}{(1+\sin t) \sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t}} = \int \frac{2 \, dt}{1+\sin t} = \\ &= 2 \int \frac{1-\sin t}{\cos^2 t} dt = 2 \tan t - \frac{2}{\cos t} + C = \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{2}{\sqrt{1-x}} + C = \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{1-x}} + C.$$

۷-۵-۷ انتگرالهای زیر را حساب کنید

1. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx.$ جواب: $I = \arcsin \frac{x+1}{2} + C.$
2. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}.$ " $I = \frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}} + C.$
3. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx.$ " $\frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{2}.$
4. $\int \sqrt{2+x^2} dx.$ " $\frac{x}{2} \sqrt{2+x^2} + \ln(x + \sqrt{2+x^2}).$
5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx.$ " $\frac{x}{2} \sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2} \ln(x + \sqrt{9+x^2}).$
6. $\int \sqrt{x^2-2x+2} dx.$ " $\frac{x-1}{2} \sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2} \ln(x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}).$
7. $\int \sqrt{x^2-4} dx.$ " $\frac{x}{2} \sqrt{x^2-4} - 2 \ln|x + \sqrt{x^2-4}|.$
8. $\int \sqrt{x^2+x} dx.$ " $\frac{2x+1}{4} \sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8} \ln|2x+1 + 2\sqrt{x^2+x}|.$
9. $\int \sqrt{x^2-6x-7} dx.$ " $\frac{x-3}{2} \sqrt{x^2-6x-7} - 8 \ln|x-3 + \sqrt{x^2-6x-7}|.$

جواب:

10. $\int (x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} dx.$
 $\frac{1}{64} (2x+1) (8x^2+8x+17) \sqrt{x^2+x+1} + \frac{27}{128} \ln(2x+1 + 2\sqrt{x^2+x+1}).$
11. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$ جواب: $2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}.$
12. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}.$ " $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}.$
13. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$ " $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$ " $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}} \right|.$

۵-۸ انتگرالگیری از سایر توابع غیر جبری

$$I = \int \frac{\ln x}{x^2} dx. \quad ۵-۸-۱$$

حل. با استفاده از روش جزء بجزء داریم:

$$u = \ln x; \quad dv = \frac{dx}{x^2};$$

$$du = \frac{dx}{x}; \quad v = -\frac{1}{x};$$

$$I = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

$$I = \int \frac{\ln x \, dx}{\sqrt{1-x}} \quad ۵-۸-۲$$

$$I = 4\sqrt{1-x} + 2\ln(2-x-2\sqrt{1-x}) - 2(1+\sqrt{1-x})\ln x + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int \frac{e^x dx}{(1+e^{2x})^2} \quad ۵-۸-۳$$

حل. فرض می‌کنیم $e^x = t$; $e^x dx = dt$ داریم:

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

دستور کاهش را بکار می‌بریم (مسئله ۱-۴-۴ را ببینید):

$$I = I_2 = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2};$$

$$I = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan t + C = \frac{e^x}{2(1+e^{2x})} + \frac{1}{2} \arctan e^x + C.$$

$$I = \int e^{-x} \ln(e^x + 1) dx \quad ۵-۸-۴$$

حل. با استفاده از روش جزء بجزء داریم:

$$u = \ln(e^x + 1); \quad dv = e^{-x} dx;$$

$$du = \frac{e^x}{1+e^x} dx; \quad v = -e^{-x};$$

$$\begin{aligned} I &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{dx}{1+e^x} = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{e^x+1-e^x}{1+e^x} dx = \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

$$I = e^{\alpha t} \frac{\alpha \cos t + \sin t}{\alpha^2 + 1} + C \quad \text{جواب: } I = \int \frac{e^{\alpha \arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad ۵-۸-۵$$

$$t = \arctan x$$

$$I = \int \frac{x \arctan x dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad ۵-۸-۶$$

حل. بروش جزء بجزء عمل می‌کنیم، داریم:

$$u = \arctan x; \quad dv = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \quad v = \sqrt{1+x^2};$$

$$I = \sqrt{1+x^2} \arctan x - \int \sqrt{1+x^2} \frac{dx}{1+x^2} = \\ = \sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

۵-۸-۷ انتگرالهای زیر را حساب کنید.

- | | | |
|---|-------|---|
| 1. $\int (x^2+1)^3 e^{2x} dx.$ | جواب | $\frac{e^{2x}}{2} \times \left(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + \frac{7}{2} \right).$ |
| 2. $\int x^3 \cos^3 3x dx.$ | // | $\frac{1}{6} \left(x^3 + \frac{x^2}{2} \sin 6x + \frac{x}{6} \cos 6x - \frac{1}{36} \sin 6x \right)$ |
| 3. $\int x \sin x \cos 2x dx.$ | // | $-\frac{x \cos 3x}{6} + \frac{\sin 3x}{18} + \frac{x \cos x}{2} - \frac{\sin x}{2}.$ |
| 4. $\int e^{2x} \sin^2 x dx.$ | // | $\frac{e^{2x}}{8} (2 - \sin 2x - \cos 2x).$ |
| 5. $\int e^x \sin x \sin 3x dx.$ | // | $\frac{e^x}{2} \left(\frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{5} - \frac{4 \sin 4x + \cos 4x}{17} \right).$ |
| 6. $\int x e^x \cos x dx.$ | // | $\frac{e^x}{2} [x(\sin x + \cos x) - \sin x].$ |
| 7. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$ | // | $-\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \ln e^x - 1 + \frac{1}{6} \ln (e^x + 2).$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}.$ | // | $x - \ln(2 + e^x + 2 \sqrt{e^{2x} + e^x + 1}).$ |
| 9. $\int x^3 \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$ | // | $\frac{1}{3} \left[x^3 \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2) + x^2 \right].$ |
| 10. $\int \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2}) dx.$ | جواب: | |

$$x \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2}) - 2 \sqrt{1+x^2} \times \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + 2x.$$

11. $\int x \arccos (5x-2) dx.$ جواب:

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{9}{100} \right) \arccos (5x-2) - \frac{5x+6}{100} \times \sqrt{20x-25x^2-3}.$$

12. $\int \sin x \sinh x dx.$ جواب $\frac{\sin x \cosh x - \cos x \sinh x}{2}.$
13. $\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 9}.$ // $\frac{1}{\sqrt{14}} \arctan \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}.$
14. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx.$ // $\ln \sqrt{x^2-2x+2} - 4 \arctan (x-1).$
15. $\int \frac{x^2}{x^2+x+\frac{1}{2}} dx.$ // $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \arctan (2x+1).$
16. $\int \frac{dx}{x(x^2+5)}.$ // $\frac{1}{5} \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}}.$
17. $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}.$ // $2 \ln \left| \frac{x+3}{x+2} \right| - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}.$
18. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}.$ // $\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \right| - \frac{1}{x+1} \right).$
19. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}.$ // $\frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$
20. $\int \frac{dx}{x^4-2x^2+1}.$ // $\frac{1}{4} \left(\frac{2x}{1-x^2} + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right).$
21. $\int \frac{x dx}{(x^2-x+1)^3}.$ // $\frac{1}{6} \frac{x-2}{(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$
22. $\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2} dx.$ // $\frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}.$
23. $\int \frac{(\sqrt{x+1})^2}{x^3} dx.$ // $-\frac{1}{x} - \frac{4}{3x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2}.$
24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$ // $\ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right).$
25. $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} dx.$ // $\sqrt{2x} - \frac{3}{5} \sqrt[5]{(2x)^3}.$
26. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x})^2}.$ // $-\frac{3}{\sqrt[3]{x+1}}.$
27. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}} dx.$ // $\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}.$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x}}.$ // $-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2 - 4 \ln(1+\sqrt[4]{5-x}).$
29. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx.$ // $\ln |x + \sqrt{x^2-1}| - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$
30. $\int \frac{x dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}.$ // $-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$
31. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}.$ // $\frac{1}{2} \times \arcsin \frac{x^2+1}{\sqrt{2}}.$
32. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx.$ // $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$

$$33. \int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}} \quad \text{جواب} \quad \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x} \right| - \frac{1}{8\sqrt{3}} \times \arcsin \frac{2(x+1)}{x+4} \\ \text{راهنمایی} - \\ \frac{1}{x^2+4x} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} \right).$$

$$34. \int \sqrt{x^2-9} dx. \quad \text{جواب} \quad \frac{x}{2} \sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-9}|.$$

$$35. \int \sqrt{x-4x^2} dx. \quad // \quad \frac{1}{16} (8x-1) \sqrt{x-4x^2} + \frac{1}{64} \arcsin (8x-1).$$

$$36. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}. \quad // \quad \ln \left| \frac{x}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}} \right|$$

$$37. \int x \sqrt{x^2+2x+2} dx. \quad \text{جواب}$$

$$\frac{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}{3} - \frac{(x+1)}{2} \sqrt{x^2+2x+2} - \frac{1}{2} \ln (x+1 + \sqrt{x^2+2x+2}).$$

$$38. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}}. \quad \text{جواب} \quad \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}.$$

$$39. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}. \quad // \quad \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} \right|.$$

$$40. \int \frac{dx}{3\sqrt{1+x^3}}. \quad // \quad -\frac{1}{3} \ln |z-1| + \frac{1}{6} \ln (z^2+z+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{2z+1}{\sqrt{3}},$$

$$z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} \quad \text{که در آن}$$

$$41. \int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}} dx. \quad // \quad \frac{5}{2} \times \ln (x^2 + \sqrt{1+x^4}).$$

$$42. \int \cos^4 x dx. \quad // \quad \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}.$$

$$43. \int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x}. \quad // \quad \ln |\tan x| - \cot^2 x - \frac{1}{4} \cot^4 x.$$

$$44. \int \frac{1 + \sqrt{\cot x}}{\sin^2 x} dx. \quad // \quad -\cot x - \frac{2\sqrt{(\cot x)^3}}{3}.$$

$$45. \int \frac{\sin^3 x}{5\sqrt{\cos^3 x}} dx. \quad // \quad \frac{5}{12} (\cos^2 x - 6) \sqrt[5]{\cos^2 x}.$$

$$46. \int \operatorname{cosec}^5 5x dx. \quad // \quad -\frac{\cos 5x}{20 \sin^4 5x} - \frac{3 \cos 5x}{40 \sin^2 5x} + \frac{3}{40} \ln \left| \tan \frac{5x}{2} \right|.$$

$$47. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x} dx. \quad // \quad \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5}.$$

$$48. \int \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) dx. // \quad \frac{1}{4} \sin 2x.$$

$$49. \int \tan^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) dx. \quad // \quad \tan^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \ln \left| \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

$$50. \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x - 5}. \quad // \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \arcsin \frac{4 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}}.$$

$$51. \int \frac{dx}{2 + 3 \cos^2 x}. \quad // \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \arcsin \left(\frac{2 \tan x}{\sqrt{10}} \right).$$

52. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}$. جواب $\arctan (2 \tan x + 1)$.
53. $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$. " $\frac{1}{2} \ln |\tan x + \sec x| - \frac{1}{2} \operatorname{cosec} x$.
54. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}$. جواب : $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right)$.
55. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4 \tan x + 1}} dx$. جواب $\ln |\tan x + 2 + \sqrt{\tan^2 x + 4 \tan x + 1}|$.
56. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2 + \sin^2 ax}} dx$. " $\frac{1}{a} \times \ln (\sin ax + \sqrt{a^2 + \sin^2 ax})$.
57. $\int \frac{x dx}{\cos^2 3x}$. " $\frac{1}{3} x \tan 3x + \frac{1}{9} \ln |\cos 3x|$.
58. $\int x \sin^2 x dx$. " $\frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$.
59. $\int x^2 e^{x^3} dx$. " $\frac{e^{2x}}{4} (2x - 1)$.
60. $\int x e^{2x} dx$. " $\frac{1}{3} e^{x^3}$.
61. $\int x^3 \ln \sqrt{1-x} dx$. " $\frac{x^3}{3} \cdot \ln \sqrt{1-x} - \frac{1}{6} \ln |x-1| - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6}$.
62. $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$. " $\sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln (x + \sqrt{1+x^2})$.
63. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx$. " $\frac{1}{3} \sin \frac{3x}{2} - \frac{1}{10} \sin \frac{5x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$.
64. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$. " $-\frac{1}{1 + \tan x}$.
65. $\int \frac{dx}{(\tan x + 1) \sin^2 x}$. " $\ln |1 + \cot x| - \cot x$.
66. $\int \sinh x \cosh x dx$. " $\frac{\sinh^2 x}{2}$.
67. $\int \frac{\sinh \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx$. " $-2 \cosh \sqrt{1-x}$.
68. $\int \frac{\sinh x \cosh x}{\sinh^2 x + \cosh^2 x} dx$. " $\frac{1}{5} \ln \cosh 2x$.
69. $\int \frac{x}{\sinh^2 x} dx$. " $-x \coth x + \ln |\sinh x|$.
70. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}$. " $\frac{1}{2e^x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln |e^x - 2|$.
71. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx$. " $\frac{1}{2} \arctan \frac{e^x - 3}{2}$.
72. $\int \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^{\frac{1}{4}}} dx$. " $\frac{4}{7} \sqrt[4]{(e^x + 1)^3} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{(e^x + 1)^3}$.
73. $\int \frac{2^x}{1-4^x} dx$. " $\frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}$.

$$74. \int (x^2 - 1) 10^{-2x} dx. \quad \text{جواب} \quad -\frac{10^{-2x}}{2 \ln 10} \times \left(x^2 - 1 + \frac{x}{\ln 10} + \frac{1}{2 \ln^2 10} \right).$$

$$75. \int \sqrt{e^x + 1} dx. \quad // \quad 2 \sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}.$$

$$76. \int \frac{\arctan x}{x^2} dx. \quad // \quad \ln \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| - \frac{\arctan x}{x}.$$

$$77. \int x^3 \arcsin \frac{1}{x} dx. \quad // \quad \frac{1}{4} \left(x^4 \arcsin \frac{1}{x} + \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

$$78. \int \cos(\ln x) dx. \quad // \quad \frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x).$$

$$79. \int (x^2 - 3x) \sin 5x dx. \quad \text{جواب:}$$

$$\frac{1}{5} \left(-x^2 \cos 5x + \frac{2}{5} x \sin 5x + 3x \cos 5x + \frac{2}{25} \cos 5x - \frac{3}{5} \sin 5x \right).$$

$$80. \int x \arctan(2x+3) dx. \quad \text{جواب:}$$

$$\frac{1}{2} \left[(x^2 - 2) \arctan(2x+3) + \frac{3}{4} \ln(2x^2 + 6x + 5) - \frac{x}{2} \right].$$

$$81. \int \arcsin \sqrt{x} dx. \quad \text{جواب:} \quad \frac{1}{2} \sqrt{x-x^2} + \left(x - \frac{1}{2} \right) \arcsin \sqrt{x}.$$

$$82. \int |x| dx. \quad // \quad \frac{x|x|}{2}.$$

$$83. \int \frac{\cos x dx}{a^2 + \sin^2 x}. \quad // \quad \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{\sin x}{a} \right) + C.$$

$$84. \int \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}. \quad // \quad \arcsin(\ln x) + C.$$

$$85. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}. \quad // \quad 3 \sqrt[3]{\sin x} + C.$$

$$86. \int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad // \quad -\frac{1}{2} (\arccos x)^2 + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$87. \int \frac{x - \arctan x}{1+x^2} dx. \quad // \quad \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C.$$

$$88. \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx. \quad // \quad \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} + C.$$

$$89. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx. \quad // \quad \frac{4}{3} \sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C.$$

$$90. \int \sqrt{1+3 \cos^2 x} \sin 2x dx. \quad // \quad -\frac{2}{9} \sqrt{(1+3 \cos^2 x)^3} + C.$$

۵-۹ روشهای انتگرالگیری (لیست دستورهای اساسی انتگرالگیری)

شماره	انتگرال	روش انتگرالگیری
۱	$\int F[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$	با تغییر متغیر $\varphi(x) = t$
۲	$\int f(x) \varphi'(x) dx$	انتگرالگیری با روش جزء بجزء $\int f(x) \varphi'(x) dx = f(x) \varphi(x) - \int \varphi(x) f'(x) dx.$ مثلاً، این روش برای انتگرالهایی به صورت $\int p(x) f(x) dx$ بکار می رود که در آن $p(x)$ یک چند جمله ای و $f(x)$ تابعی است به یکی از حالات زیر: $e^{ax}; \cos ax; \sin ax; \ln x;$ $\arctan x; \arcsin x, \text{ etc.}$ و همچنین این روش برای محاسبه انتگرالهایی بکار می رود که انتگران، حاصلضرب یک تابع نمایی در یک تابع سینوسی یا کسینوسی باشد.
۳	$\int f(x) \varphi^{(n)}(x) dx$	با استفاده متوالی از روش جزء بجزء به انتگرالی از تابع $f(x) \varphi(x)$ تبدیل می شود، یعنی $\int f(x) \varphi^{(n)}(x) dx = f(x) \varphi^{(n-1)}(x) -$ $- f'(x) \varphi^{(n-2)}(x) + f''(x) \varphi^{(n-3)}(x) - \dots$ $\dots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x) \varphi(x) +$ $+ (-1)^n \int f^{(n)}(x) \varphi(x) dx$

شماره	انتگرال	روش انتگرالگیری
۴	$\int e^{ax} p_n(x) dx,$ که $p_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n است.	با انتگرالگیری متوالی بر روش جزء بجزء داریم (شماره ۳ را ببینید). $\int e^{ax} p_n(x) dx = e^{ax} \left[\frac{p_n(x)}{a} - \frac{p'_n(x)}{a^2} + \frac{p''_n(x)}{a^3} - \dots + (-1)^n \frac{p_n^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] + C$
۵	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx,$ $p^2-4q < 0$	با تغییر متغیر $x + \frac{p}{2} = t$ حل می‌شود.
۶	$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$	دستور کاهش زیر را به کار ببرید: $I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$
۷	$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$ که $\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک کسر واقعی است و $Q(x) = (x-x_1)^t (x-x_2)^m \dots (x^2+px+q)^k \dots$	انتگران را به صورت زیر به کسرهای معادل تبدیل کنید $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_t}{(x-x_1)^t} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_m}{(x-x_2)^m} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k} + \dots$
۸	$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx,$ که R یک تابع گویا نسبت به متغیرهایش است.	اگر k مخرج مشترک کسرهای $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ باشد، تغییر متغیر $x = t^k$، انتگرال را به انتگرال کسرهای گویا تبدیل می‌کند.

شماره	انتگرال	روش انتگرالگیری
۹	$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{n}} \right] dx,$ که R یک تابع گویاست	انتگرال با تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ به یک انتگرال کسر گویا تبدیل می‌شود.
۱۰	$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	انتگرال با تغییر متغیر $x + \frac{b}{2a} = t$ به مجموع انتگرال‌های زیر تبدیل می‌شود: $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = M_1 \int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}} + N_1 \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}.$ انتگرال اول، یک انتگرال از یک تابع نمائی است و دومی، بکمک دستورهای اساسی انتگرال‌ها، حساب می‌شود.
۱۱	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx,$ که R تابعی از x و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ است.	این نوع انتگرال بکمک «تغییر متغیرهای اولیه» به انتگرال کسر گویا تبدیل می‌شود. $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x \sqrt{a} \quad (a > 0),$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c} \quad (c > 0),$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1) \quad (4ac - b^2 < 0).$ که x_1 ریشه سه جمله‌ای ax^2+bx+c است. این انتگرال را می‌توان با تغییر متغیرهای مثلثاتی زیر نیز حساب کرد. $x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \sin t \\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cos t \end{cases} \quad \begin{matrix} (a < 0, \\ 4ac - b^2 < 0) \end{matrix}$

روش انتگرالگیری	انتگرال	شماره
$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \sec t \\ \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \operatorname{cosec} t \end{cases} \quad \begin{matrix} (a > 0, \\ 4ac - b^2 < 0) \end{matrix}$ $x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tan t \\ \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cot t \end{cases} \quad \begin{matrix} (a > 0, \\ 4ac - b^2 > 0) \end{matrix}$		
اتحاد زیر را می‌نویسیم: $\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} +$ $+ k \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$ که $Q_{n-1}(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n-1$ است. از طرفین مشتق می‌گیریم و سپس دو طرف را به $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ضرب می‌کنیم اتحاد زیر حاصل می‌شود: $P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2 + bx + c) +$ $+ \frac{1}{2} Q_{n-1}(x)(2ax + b) + k,$ که نتیجه این اتحاد، یک دستگاه $n+1$ معادله است که از حل آن ضرایب چند جمله‌ای $Q_{n-1}(x)$ و عدد ثابت k به دست می‌آید. و انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ با روشی که در شماره ۱۰ دیدیم حل می‌شود ($M=0$; $N=1$)	۱۲ $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$ که $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n است.	

شماره	انتگرال	روش انتگرالگیری
۱۳	$\int \frac{dx}{(x-x_1)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$	با تغییر متغیر $x-x_1=\frac{1}{t}$ به انتگرال شماره ۱۲ تبدیل می شود.
۱۴	$\int x^m (a+bx^n)^p dx$ m, n, p اعداد گویا هستند (یک انتگرال دو جمله ای دیفرانسیلی).	این انتگرال فقط در سه حالت زیر به انتگرال توابع مقدماتی تبدیل می شود: (۱) p عددی صحیح باشد، (۲) $\frac{m+1}{n}$ عددی صحیح باشد، (۳) $\frac{m+1}{n}+p$ عددی صحیح باشد حالت اول الف. p عددی صحیح و مثبت است. مقدار $(a+bx^n)^p$ را با دستور دو جمله ای نیوتن حساب می کنیم و آنگاه انتگرال حساب می شود. ب. p عددی صحیح و منفی است. اگر k مخرج مشترک m و n باشد، تغییر متغیر $x=tx^k$ را بکار می بریم، انتگرال تبدیل به یک انتگرال کسر گویا می شود. حالت دوم $\frac{m+1}{n}$ یک عدد صحیح است. هرگاه k مخرج کسر p باشد، تغییر متغیر $a+bx^n=tx^k$ را بکار می بریم. حالت سوم $\frac{m+1}{n}+p$ عددی صحیح است. در این صورت اگر

شماره	انتگرال	روش انتگرالگیری
		k مخرج کسر p باشد، از تغییر متغیر $a + bx^n = x^n t^k$ استفاده می‌کنیم.
۱۵	$\int R(\sin x, \cos x) dx$	تغییر متغیر عمومی $\tan \frac{x}{2} = t$ را بکار ببرید. اگر $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ آنگاه از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده کنید اگر $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ آنگاه تغییر متغیر $\sin x = t$ را بکار ببرید اگر $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ آنگاه از تغییر متغیر $\tan x = t$ استفاده کنید
۱۶	$\int R(\sinh x, \cosh x) dx$	با توجه به $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}; \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}; dx = \frac{2dt}{1-t^2}$ از تغییر متغیر $\tanh \frac{x}{2} = t$ استفاده کنید.
۱۷	$\int \sin ax \sin bx dx$ $\int \sin ax \cos bx dx$ $\int \cos ax \cos bx dx$	با استفاده از فرمولهای زیر، حاصلضرب توابع مثلثاتی را به مجموع یا تفاضل تبدیل کنید: $\sin ax \sin bx =$ $= \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$

شماره	انتگرال	روش انتگرالگیری
		$\cos ax \cos bx =$ $= \frac{1}{2} [\cos (a-b) x + \cos (a+b) x]$ $\sin ax \cos bx =$ $= \frac{1}{2} [\sin (a-b) x + \sin (a+b) x]$
۱۸	$\int \sin^m x \cos^n x dx$ m و n اعداد صحیح هستند	هرگاه m عددی طبیعی و فرد باشد، تغییر متغیر $\cos x = t$ را بکار ببرید. هرگاه n عددی طبیعی و فرد باشد تغییر متغیر $\sin x = t$ بکار می رود. هرگاه $m+n$ عددی منفی و زوج باشد، تغییر متغیر $\tan x = t$ بکار می رود. هرگاه m و n اعداد زوج نا منفی باشند از دستورهای زیر استفاده می شود: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
۱۹	$\int \sin^p x \cos^q x dx$ $(0 < x < \pi/2)$, p و q اعداد گویا هستند.	انتگرال با تغییر متغیر $\sin x = t$ به انتگرال دو جمله ای دیفرانسیلی تبدیل می شود: $\int \sin^p x \cos^q x dx = \int t^p (1-t^2)^{q-1} dt$ (شماره ۱۴ ملاحظه شود).
۲۰	$\int R(e^{ax}) dx$	انتگرال با تغییر متغیر $e^{ax} = t$ به یک انتگرال کسر گویا تبدیل می شود.

جدول مختصر انتگرالها

$$١. \int u dv = uv - \int v du$$

$$٢. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0$$

$$٣. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$٤. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$٥. \int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$$

$$٦. \int (ax + b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C$$

$$٧. \int x(ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a^2} \left[\frac{ax + b}{n+2} - \frac{b}{n+1} \right] + C, \quad n \neq -1, -2$$

$$٨. \int x(ax + b)^{-1} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b| + C$$

$$٩. \int x(ax + b)^{-2} dx = \frac{1}{a^2} \left[\ln |ax + b| + \frac{b}{ax + b} \right] + C$$

$$١٠. \int \frac{dx}{x(ax + b)} = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{x}{ax + b} \right| + C$$

$$١١. \int (\sqrt{ax + b})^n dx = \frac{2}{a} \frac{(\sqrt{ax + b})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$$

$$١٢. \int \frac{\sqrt{ax + b}}{x} dx = 2\sqrt{ax + b} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{ax + b}}$$

$$١٣. (أ) \int \frac{dx}{x\sqrt{ax + b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax + b}{-b}} + C, \quad \text{اگر } b < 0$$

$$(ب) \int \frac{dx}{x\sqrt{ax + b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax + b} + \sqrt{b}} \right| + C; \quad \text{اگر } b > 0$$

$$۱۴. \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

$$۱۵. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

$$۱۶. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$۱۷. \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^2} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$۱۸. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$$

$$۱۹. \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{a^2-x^2}$$

$$۲۰. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C = \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + C$$

$$۲۱. \int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$۲۲. \int x^2 \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{x(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2}}{5} - \frac{a^5}{5} \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$۲۳. \int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2+x^2} - a \sinh^{-1} \left| \frac{a}{x} \right| + C$$

$$۲۴. \int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$$

$$۲۵. \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = -\frac{a^2}{2} \sinh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$$

$$۲۶. \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2+x^2}}{x} \right| + C$$

$$۲۷. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C \quad ۲۸. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}$$

$$۲۹. \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$۳۰. \int x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^5}{5} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{5} x\sqrt{a^2-x^2} (a^2-2x^2) + C$$

$$۳۱. \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2-x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right| + C$$

$$۶۴. \int \sin^n ax \cos ax \, dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$$

$$۶۵. \int \frac{\cos ax}{\sin ax} \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + C$$

$$۶۶. \int \cos^n ax \sin ax \, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$$

$$۶۷. \int \frac{\sin ax}{\cos ax} \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| + C$$

$$۶۸. \int \sin^n ax \cos^m ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{n-2} ax \cos^m ax \, dx$$

$n \neq -m$ (اگر $n = -m$ ، از شماره ۸۶ استفاده کنید)

$$۶۹. \int \sin^n ax \cos^m ax \, dx = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^n ax \cos^{m-2} ax \, dx$$

$m \neq -n$ (اگر $m = -n$ ، از شماره ۸۷ استفاده کنید)

$$۷۰. \int \frac{dx}{b + c \sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{ax}{2} \right) \right] + C, \quad b^2 > c^2$$

$$۷۱. \int \frac{dx}{b + c \sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left| \frac{c + b \sin ax + \sqrt{c^2 - b^2} \cos ax}{b + c \sin ax} \right| + C,$$

$$۷۲. \int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{ax}{2} \right) + C \quad b^2 < c^2$$

$$۷۳. \int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{ax}{2} \right) + C$$

$$۷۴. \int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan \frac{ax}{2} \right] + C, \quad b^2 > c^2$$

$$۷۵. \int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left| \frac{c + b \cos ax + \sqrt{c^2 - b^2} \sin ax}{b + c \cos ax} \right| + C,$$

$$۷۶. \int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2} + C \quad b^2 < c^2$$

$$۷۷. \int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2} + C$$

$$۷۸. \int x \sin ax \, dx = -\frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax + C$$

$$۷۹. \int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax + C$$

$$۱۰. \int x^n \sin ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx$$

$$۱۱. \int x^n \cos ax \, dx = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx$$

$$۱۲. \int \tan ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| + C$$

$$۱۳. \int \cot ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + C$$

$$۱۴. \int \tan^q ax \, dx = \frac{1}{q} \tan ax - x + C$$

$$۱۵. \int \cot^q ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x + C$$

$$۱۶. \int \tan^n ax \, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$۱۷. \int \cot^n ax \, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$۱۸. \int \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sec ax + \tan ax| + C$$

$$۱۹. \int \csc ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\csc ax + \cot ax| + C$$

$$۲۰. \int \sec^q ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax + C$$

$$۲۱. \int \csc^q ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax + C$$

$$۲۲. \int \sec^n ax \, dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$۲۳. \int \csc^n ax \, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$۲۴. \int \sec^n ax \tan ax \, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

$$۲۵. \int \csc^n ax \cot ax \, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

$$۲۶. \int \sin^{-1} ax \, dx = x \sin^{-1} ax + \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 x^2} + C$$

$$٢٢. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C$$

$$٢٣. \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$٢٤. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$$

$$٢٥. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

$$٢٦. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$٢٧. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$٢٨. \int (\sqrt{x^2 - a^2})^n dx = \frac{x(\sqrt{x^2 - a^2})^{n+1}}{n+1} - \frac{na^2}{n+1} \int (\sqrt{x^2 - a^2})^{n-1} dx, n \neq -1$$

$$٢٩. \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 - a^2})^n} = \frac{x(\sqrt{x^2 - a^2})^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-2}{(n-2)a^2} \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 - a^2})^{n-2}}, n \neq 2$$

$$٣٠. \int x(\sqrt{x^2 - a^2})^n dx = \frac{(\sqrt{x^2 - a^2})^{n+2}}{n+2} + C, n \neq -2$$

$$٣١. \int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$٣٢. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C$$

$$٣٣. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + C$$

$$٣٤. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{a^2}{2} \cosh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + C$$

$$٣٥. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C = \frac{1}{a} \cos^{-1} \left| \frac{a}{x} \right| + C$$

$$٣٦. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C$$

$$٣٧. \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C$$

$$٣٨. \int \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C$$

$$۴۹. \int (\sqrt{rax - x^2})^n dx = \frac{(x-a)(\sqrt{rax - x^2})^n}{n+1} + \frac{na^n}{n+1} \int (\sqrt{rax - x^2})^{n-1} dx$$

$$۵۰. \int \frac{dx}{(\sqrt{rax - x^2})^n} = \frac{(x-a)(\sqrt{rax - x^2})^{1-n}}{(n-1)a^n} + \frac{(n-1)}{(n-1)a^n} \int \frac{dx}{(\sqrt{rax - x^2})^{n-1}}$$

$$۵۱. \int x\sqrt{rax - x^2} dx = \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{rax - x^2}}{9} + \frac{a^2}{9} \sin^{-1} \frac{x-a}{a} + C$$

$$۵۲. \int \frac{\sqrt{rax - x^2}}{x} dx = \sqrt{rax - x^2} + a \sin^{-1} \frac{x-a}{a} + C$$

$$۵۳. \int \frac{\sqrt{rax - x^2}}{x^2} dx = -2 \sqrt{\frac{ra-x}{x}} - \sin^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C$$

$$۵۴. \int \frac{x dx}{\sqrt{rax - x^2}} = a \sin^{-1} \frac{x-a}{a} - \sqrt{rax - x^2} + C$$

$$۵۵. \int \frac{dx}{x\sqrt{rax - x^2}} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{ra-x}{x}} + C$$

$$۵۶. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$۵۷. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$۵۸. \int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

$$۵۹. \int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

$$۶۰. \int \sin^n ax dx = \frac{-\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx$$

$$۶۱. \int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx$$

$$۶۲. (T) \int \sin ax \cos bx dx = -\frac{\cos (a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos (a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$(B) \int \sin ax \sin bx dx = \frac{\sin (a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin (a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2$$

$$(C) \int \cos ax \cos bx dx = \frac{\sin (a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin (a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2$$

$$۶۳. \int \sin ax \cos ax dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$$

$$٩٧. \int \cos^{-1} ax \, dx = x \cos^{-1} ax - \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 x^2} + C$$

$$٩٨. \int \tan^{-1} ax \, dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{a} \ln(1 + a^2 x^2) + C$$

$$٩٩. \int x^n \sin^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}, \quad n \neq -1$$

$$١٠٠. \int x^n \cos^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}, \quad n \neq -1$$

$$١٠١. \int x^n \tan^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{1 + a^2 x^2}, \quad n \neq -1$$

$$١٠٢. \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$١٠٣. \int b^{ax} \, dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} + C, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

$$١٠٤. \int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C$$

$$١٠٥. \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$

$$١٠٦. \int x^n b^{ax} \, dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b} \int x^{n-1} b^{ax} \, dx, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

$$١٠٧. \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$١٠٨. \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

$$١٠٩. \int \ln ax \, dx = x \ln ax - x + C$$

$$١١٠. \int x^n \ln ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln ax - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad n \neq -1$$

$$١١١. \int x^{-1} \ln ax \, dx = \frac{1}{x} (\ln ax)^2 + C$$

$$١١٢. \int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln |\ln ax| + C$$

$$١١٣. \int \sinh ax \, dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C$$

$$۱۱۴. \int \cosh ax \, dx = \frac{1}{a} \sinh ax + C$$

$$۱۱۵. \int \sinh^r ax \, dx = \frac{\sinh^r ax}{ra} - \frac{x}{r} + C$$

$$۱۱۶. \int \cosh^r ax \, dx = \frac{\sinh^r ax}{ra} + \frac{x}{r} + C$$

$$۱۱۷. \int \sinh^n ax \, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 0$$

$$۱۱۸. \int \cosh^n ax \, dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 0$$

$$۱۱۹. \int x \sinh ax \, dx = \frac{x}{a} \cosh ax - \frac{1}{a^2} \sinh ax + C$$

$$۱۲۰. \int x \cosh ax \, dx = \frac{x}{a} \sinh ax - \frac{1}{a^2} \cosh ax + C$$

$$۱۲۱. \int x^n \sinh ax \, dx = \frac{x^n}{a} \cosh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cosh ax \, dx$$

$$۱۲۲. \int x^n \cosh ax \, dx = \frac{x^n}{a} \sinh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sinh ax \, dx$$

$$۱۲۳. \int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln (\cosh ax) + C$$

$$۱۲۴. \int \coth ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax| + C$$

$$۱۲۵. \int \tanh^r ax \, dx = x - \frac{1}{a} \tanh ax + C$$

$$۱۲۶. \int \coth^r ax \, dx = x - \frac{1}{a} \coth ax + C$$

$$۱۲۷. \int \tanh^n ax \, dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$۱۲۸. \int \cosh^n ax \, dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$۱۲۹. \int \operatorname{sech} ax \, dx = \frac{1}{a} \sin^{-1} (\tanh ax) + C$$

$$۱۳۰. \int \operatorname{csch} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tanh \frac{ax}{2} \right| + C$$

$$۱۳۱. \int \operatorname{sech}^{\gamma} ax \, dx = \frac{1}{a} \tanh ax + C$$

$$۱۳۲. \int \operatorname{csch}^{\gamma} ax \, dx = -\frac{1}{a} \coth ax + C$$

$$۱۳۳. \int \operatorname{sech}^n ax \, dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-\gamma} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{sech}^{n-\gamma} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$۱۳۴. \int \operatorname{csch}^n ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-\gamma} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{csch}^{n-\gamma} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$۱۳۵. \int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax \, dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

$$۱۳۶. \int \operatorname{csch}^n ax \coth ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

$$۱۳۷. \int e^{ax} \sinh bx \, dx = \frac{e^{ax}}{\gamma} \left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b} \right] + C, \quad a^{\gamma} \neq b^{\gamma}$$

$$۱۳۸. \int e^{ax} \cosh bx \, dx = \frac{e^{ax}}{\gamma} \left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b} \right] + C, \quad a^{\gamma} \neq b^{\gamma}$$

$$۱۳۹. \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} \, dx = \Gamma(x) = (n-1)!, \quad n > 0.$$

$$۱۴۰. \int_0^{\infty} e^{-ax^{\gamma}} \, dx = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$$

$$۱۴۱. \int_0^{\pi/\gamma} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/\gamma} \cos^n x \, dx$$

$$= \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times n} \times \frac{\pi}{\gamma},$$

هرگاه $n \geq 2$ و زوج باشد

$$= \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (n-1)}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times n},$$

هرگاه $n \geq 3$ و فرد باشد

فصل ششم

انتگرال معین

۱-۶ توضیح مطلب

مجموع انتگرال بالا - مجموع انتگرال پائین

تابع $f(x)$ را در نظر می گیریم که در فاصله $[a, b]$ تعریف شده است. عبارت

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

را مجموع انتگرال این تابع گویند. که در آن

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i; \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

مجموع

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

را مجموع (انتگرال) بالا و

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

را مجموع (انتگرال) پائین نامند. که در آن

$$M_i = \sup f(x) \quad [m_i = \inf f(x)] \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

حد، مجموع انتگرال

$$\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

را انتگرال معین تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ گویند.

اگر این حد موجود باشد، تابع را در فاصله $[a, b]$ انتگرالپذیر گویند. هر تابع پیوسته، انتگرالپذیر است.

۶-۱-۱ در انتگرال

$$\int_0^{\pi} \sin x dx$$

فاصله $[0, \pi]$ را به ۳ و ۶ فاصله جزء مساوی تقسیم کنید و سپس مجموعه‌های انتگرال پائین و بالا را در هر حالت تعیین کنید.

حل. با نقاط زیر، فاصله $[0, \pi]$ را به سه فاصله مساوی تقسیم می‌کنیم

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad x_3 = \pi.$$

تابع $\sin x$ در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ بطور یکنواخت صعودی است لذا در این صورت فاصله $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ کمترین مقدار تابع در فاصله $m_0 = \sin 0 = 0$, $M_0 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. برابر $m_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و بزرگترین مقدار برابر $M_1 = \sin \frac{2\pi}{3} = 1$ است. در فاصله $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ تابع $\sin x$ بطور یکنواخت نزول می‌کند. پس

$$m_2 = \sin \pi = 0, \quad M_2 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

چون هر Δx_k با $\frac{\pi}{3}$ برابر است، پس

$$s_3 = \sum_{k=0}^2 m_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3} \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \right) = \frac{\pi \sqrt{3}}{6} \approx 0.907,$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^2 M_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi(\sqrt{3} + 1)}{3} \approx 2.86.$$

وقتی فاصله $[0, \pi]$ را با نقاط

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{3}, \quad x_3 = \frac{\pi}{2}, \quad x_4 = \frac{2\pi}{3}, \quad x_5 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_6 = \pi,$$

به ۶ فاصله جزء مساوی تقسیم بکنیم، داریم:

$$\begin{aligned}
m_0 &= 0, & M_0 &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \\
m_1 &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, & M_1 &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
m_2 &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & M_2 &= \sin \frac{\pi}{2} = 1, \\
m_3 &= \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & M_3 &= \sin \frac{\pi}{2} = 1, \\
m_4 &= \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, & M_4 &= \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
m_5 &= \sin \pi = 0, & M_5 &= \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

و از آنجا

$$\begin{aligned}
s_6 &= \frac{\pi}{6} (m_0 + m_1 + \dots + m_5) = \frac{\pi}{6} (1 + \sqrt{3}) \approx 1.43, \\
S_6 &= \frac{\pi}{6} (M_0 + M_1 + \dots + M_5) = \frac{\pi}{6} (3 + \sqrt{3}) \approx 2.48.
\end{aligned}$$

همانطور که توقع داریم، نامساویهای

$$s_3 \leq s_6 \leq \int_0^{\pi} \sin x \, dx \leq S_6 \leq S_3$$

برقرارند (مقدار دقیق انتگرال برابر ۲ است).

۲-۱-۶. به ازای چه مقداری از $\delta > 0$ نامساوی

$$\left| \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \sum_{i=0}^{n-1} \sin \xi_i \Delta x_i \right| < 0.001$$

از نامساوی $\max \Delta x_i < \delta$ نتیجه می شود؟حل. چون $s_n < I_n < S_n$ ، پس برای برقراری نامساوی کافی است که تفاضل

مجموعه‌های انتگرال بالا و پائین کمتر از ۰/۰۰۱ باشد:

$$0 < S_n - s_n < 0.001.$$

ولی

$$S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i < \delta \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i),$$

که M_i و m_i به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع $\sin x$ در فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) است. برای سادگی، فرض می کنیم که نقطه یکی از نقاط مقسم فاصله باشد و با استفاده از یکنواختی تابع $\sin x$ در فاصله‌های $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ داریم:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 2$$

در نتیجه نامساوی مورد نظر وقتی برقرار است که $0.001 < 2\delta < 0.0005$ یعنی $\delta < 0.00025$ نشان دهید که تابع دیریکله که به صورت

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویاست} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ اصم است} \end{cases}$$

است در فاصله $[0, 1]$ انتگرالپذیر نیست.

حل. در تقسیم فاصله $[0, 1]$ و در انتخاب نقاط در داخل هر کدام، دو حالت در نظر می‌گیریم.

(۱) تمام نقاط ξ_i گویا باشند،

(۲) تمام نقاط ξ_i اصم باشند.

در حالت اول مجموع انتگرال برابر واحد، و در حالت دوم برابر صفر است. پس هر طور که طول بزرگترین فاصله جزء را به صفر میل دهیم، مجموعهای انتگرال برابر صفر و برابر یک می‌شوند. بنابراین مجموعهای انتگرال حد ندارند. یعنی تابع دیریکله در فاصله $[0, 1]$ انتگرالپذیر نیست.

(۳-۱-۶) فاصله پیموده شده بوسیله یک ذره مادی در یک سقوط آزاد در فاصله

زمانی $t=a$ تا $t=b$ ثانیه را به دست آورید.

حل. حرکت یک ذره مادی در سقوط آزاد، با شتاب ثابت g و سرعت اولیه

$v_0=0$ انجام می‌گیرد. در نتیجه، سرعت در لحظه t با نمودار سرعت در فاصله زمانی صفر

تا t برابر است، یعنی، $v(t)=\Delta v$ در یک زمان کوتاه Δt ، نمودار سرعت، تقریباً با

حاصلضرب شتاب در لحظه t بر Δt برابر است. ولی در این حالت، شتاب

ثابت است، پس $\Delta v=g\Delta t$. چون $\Delta t=t-0=t$ ، بنابراین $v(t)=gt$

فاصله زمانی $t=a$ تا $t=b$ را به n فاصله مساوی تقسیم می‌کنیم، لذا در

زمان Δt هر فاصله جزء برابر است با $\Delta t=\frac{b-a}{n}$. فرض می‌کنیم در خلال هر یک از

فاصله‌های زمانی، ذره مادی به طور یکنواخت و با سرعتی برابر با سرعت ابتدای آن

فاصله، حرکت نماید، یعنی،

$$v_0=ga,$$

$$\begin{aligned}v_1 &= g \left(a + 1 \frac{b-a}{n} \right), \\v_2 &= g \left(a + 2 \frac{b-a}{n} \right), \\&\dots \dots \dots \\v_{n-1} &= g \left[a + (n-1) \frac{b-a}{n} \right]\end{aligned}$$

از آنجا مسافت پیموده شده بوسیله متحرک در فاصله زمانی i ام برابر است با $\frac{v_i(b-a)}{n}$ ، کل فاصله طی شده تقریباً برابر است با :

$$\begin{aligned}s &\approx s_n = \frac{b-a}{n} (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}) = \\&= \frac{b-a}{n} g \left[na + 1 \frac{b-a}{n} + 2 \frac{b-a}{n} + \dots + (n-1) \frac{b-a}{n} \right] = \\&= (b-a) g \left[a + \frac{b-a}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} \right]\end{aligned}$$

با افزایش n فاصله طی شده با دقت بیشتری بدست می آید. مقدار دقیق s با حد s_n وقتی $n \rightarrow \infty$ ، برابر است با :

$$\begin{aligned}s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(b-a) \left[a + \frac{1}{2} (b-a) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] = \\&= g(b-a) \left[a + \frac{1}{2} (b-a) \right] = \frac{g}{2} (b^2 - a^2).\end{aligned}$$

چون s_n به صورت

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \Delta t_i \quad \left(\Delta t_i = \Delta t = \frac{b-a}{n} \right),$$

یک مجموع انتگرال است پس s از انتگرال زیر به دست می آید :

$$s = \int_a^b v \, dt = \int_a^b g t \, dt = \frac{g}{2} (b^2 - a^2).$$

۵-۱-۶ با استفاده از تعریف ، انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_0^1 x \, dx.$$

حل. بنا به تعریف

$$\max \Delta x_i \rightarrow 0, \text{ وقتی } \int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta x_i$$

که در آن

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1, \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

۱- فاصله بسته $[0, 1]$ را به n فاصله مساوی، با نقاط $x_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) تقسیم می کنیم. طول هر فاصله جزء با $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ برابر است، هرگاه $n \rightarrow \infty$ داریم $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. نقطه انتهایی هر فاصله جزء را نقاط

$$\xi_i: \xi_i = x_{i+1} = \frac{i+1}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

انتخاب می کنیم. مجموع انتگرال را تشکیل می دهیم:

$$I_n = S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

حد این مجموع برابر است با

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

پس

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

(۲) بوسیله این مثال نشان می دهیم که نقاط ξ_i به هر نحوی انتخاب شوند، حد مجموع انتگرال تغییر نمی کند. مثلاً نقطه وسط فاصله ها را نقاط ξ_i در نظر می گیریم:

$$\xi_i = \frac{i + \frac{1}{2}}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

مجموع انتگرال را تشکیل می دهیم:

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2i+1}{2n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} [1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)] = \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{1}{2}$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2}.$$

۶-۱-۶ بکمک تعریف، انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_a^b x^m \, dx \quad (m \neq -1, 0 < a < b).$$

مثل . در این مثال برای راحتی محاسبه، نقاط زیر را بعنوان نقاط مقسم انتخاب می کنیم:

$$x_0 = a; \quad x_1 = a \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \dots, \quad x_i = a \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{i}{n}}, \quad \dots, \quad x_n = a \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{n}{n}} = b.$$

که یک تصاعد هندسی با قدر نسبت

$$q = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} > 1$$

به دست می آید. طول فاصله i ام برابر است با:

$$\Delta x_i = aq^{i+1} - aq^i = aq^i (q - 1)$$

بنابر این طول بزرگترین فاصله برابر

$$\max \Delta x_i = aq^{n-1} (q - 1) = a \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$$

است که با زیاد شدن n به صفر میل می کند، زیرا $\lim_{n \rightarrow \infty} q = 1$
نقاط انتهایی هر فاصله را نقاط

$$\xi_i = x_{i+1} = aq^{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

انتخاب می کنیم. مجموع انتگرال را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^m \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} a^m q^{(i+1)m} aq^i (q-1) = \\ &= a^{m+1} (q-1) q^m [1 + q^{m+1} + \dots + q^{(n-1)(m+1)}] = \\ &= a^{m+1} (q-1) q^m \frac{q^{(m+1)n} - 1}{q^{m+1} - 1} = (b^{m+1} - a^{m+1}) q^m \frac{q-1}{q^{m+1} - 1} \end{aligned}$$

حد عبارت را وقتی $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ، یعنی $q \rightarrow 1$ حساب می کنیم:

$$\lim I_n = (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{q \rightarrow 1} q^m \frac{q-1}{q^{m+1} - 1} = (b^{m+1} - a^{m+1}) \frac{1}{m+1}$$

پس

$$\int_a^b x^m dx = \frac{1}{m+1} (b^{m+1} - a^{m+1}).$$

۶-۱-۷ با استفاده از تعریف انتگرال مطلوبست محاسبه

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

حل. فاصله $[1, 2]$ را به n قسمت با نقاط x_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) تقسیم می کنیم که جملات یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $q = \sqrt[n]{2}$ هستند

$$x_0 = 1; x_1 = q; x_2 = q^2; x_3 = q^3; \dots; x_n = q^n = 2,$$

طول فاصله جزء i ام برابر است با:

$$\Delta x_i = q^{i+1} - q^i = q^i (q - 1),$$

بنابراین وقتی $n \rightarrow \infty$ یا $q \rightarrow 1$ داریم

$$\max \Delta x_i = q^{n-1} (q - 1) \rightarrow 0$$

حال نقاط انتهایی هر فاصله را بعنوان نقاط منتخب در آن فاصله در نظر می گیریم

$$\xi_i = x_{i+1} = q^{i+1}$$

و مجموع انتگرال را تشکیل می دهیم:

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_i} \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^{i+1}} q^i (q - 1) = \frac{n}{q} (q - 1) = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} n \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)}{2^{\frac{1}{n}}} = \ln 2,$$

زیرا وقتی $n \rightarrow \infty$ ، داریم

$$2^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln 2$$

پس

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

۸-۱-۶ انتگرال

$$I = \int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx,$$

را با توجه به مفهوم هندسی انتگرال، حساب کنید.

حل. منحنی $y = \sqrt{25 - x^2}$ نیمه فوقانی دایره $x^2 + y^2 = 25$ است. آن قسمت از منحنی که متناظر تغییرات x از ۰ تا ۵ است، در ربع اول قرار دارد. پس مساحت دوزنقه منحنی الضلع محدود به خطوط $x=5$; $y=0$, $x=0$ و $y = \sqrt{25 - x^2}$ را حساب می‌کنیم که برابر مساحت ربع دایره $x^2 + y^2 = 25$ است، یعنی $\frac{25\pi}{4}$. پس

$$I = \int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx = \frac{25\pi}{4}.$$

۹-۱-۶ انتگرال

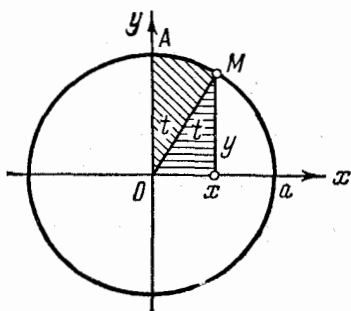
$$I = \int_1^5 (4x - 1) dx.$$

را با توجه به مفهوم هندسی انتگرال، حساب کنید.

جواب: $I = 4 \cdot \frac{3+19}{2} = 44$ که مساحت دوزنقه‌ای است به ارتفاع $5-1=4$ و قاعده‌های $4 \times 5 - 1 = 19$ و $4 \times 1 - 1 = 3$.

۱۰-۱-۶: ثابت کنید

$$I = \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (0 < x \leq a).$$



شکل ۶۰

حل. انتگرال

$$I = \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

مساحت S_{OAMx} قسمتی از دایره به شعاع a است که در ربع اول قرار دارد (شکل

۶۰. این مساحت با مجموع مساحت مثلث OMx و مساحت قطاع OAM برابر است.

$$S_{OMx} = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

مساحت قطاع برابر است با

$$S_{OAM} = \frac{1}{2} a^2 t,$$

که $\sin t = \frac{x}{a}$ پس

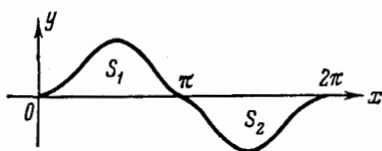
$$S_{OAM} = \frac{a^3}{2} \arcsin \frac{x}{a},$$

در نتیجه

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

۱۱-۱-۶ با استفاده از مفهوم هندسی انتگرال، نشان دهید

$$(a) \int_0^{2\pi} \sin^3 x \, dx = 0; \quad (b) \int_{-1}^1 e^{-x^2} \, dx = 2 \int_0^1 e^{-x^2} \, dx.$$



شکل ۶۱

حل. (a) نمایش هندسی تابع $y = \sin^3 x$ در شکل ۶۱، نشان داده شده است. نشان می دهیم مقدار مساحتی که در بالای محور x ها واقع است با مساحت واقع در زیر محور x ها برابر است. یعنی، فرض می کنیم $\pi \leq x \leq 2\pi$ ، پس $x = \pi + x_1$ که $0 \leq x_1 \leq \pi$ و

$$\sin^3 x = \sin^3(\pi + x_1) = -\sin^3 x_1.$$

بنابر این قسمت دوم را می توان با انتقال قسمت اول به اندازه π به طرف راست و استفاده از تقارن نسبت به محور x ها به دست آورده پس

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x \, dx = 0$$

۶-۱-۱۲ تابع $f(x) = x^3$ در فاصله $[-2, 3]$ مفروض است. این فاصله را به n قسمت مساوی تقسیم کنید و آنگاه (s_n) و (S_n) بترتیب، مجموعهای انتگرال پائین و بالا را حساب کنید.

جواب: $s_n = 16 \frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$; $S_n = 16 \frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$.

۶-۱-۱۳ بکمک مفهوم هندسی انتگرال معین، ثابت کنید:

(a) $\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 0$; (b) $\int_0^{2\pi} \cos^3 x \, dx = 0$;
(c) $\int_1^2 (2x+1) \, dx = 6$; (d) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \, dx = \frac{9\pi}{2}$.

۶-۱-۱۴ با استفاده از حد مجموع، انتگرال

$$I = \int_1^4 x^3 \, dx,$$

را محاسبه کنید، که در آن فاصله $[1, 4]$ به صورتهای زیر تقسیم شده است:

الف. به فاصله های مساوی،

ب. بوسیله نقاطی که تشکیل یک تصاعد هندسی می دهند،

در هر دو حالت نقاط ξ_i را به روش زیر انتخاب کنید

(۱) ابتدای هر فاصله،

(۱) انتهای هر فاصله،

(۳) نقطه وسط فاصله های $[x_i, x_{i+1}]$.

۲-۶ محاسبه انتگرالهای معین با استفاده از

دستور نیوتن — لایبنیتز

دستور زیر معروف به دستور نیوتن — لایبنیتز است:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

که $F(x)$ یک تابع اولیه تابع $f(x)$ است، یعنی،

$$F'(x) \equiv f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

۱-۲-۱ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

حل. چون $F(x) = \arctan x$ یکی از توابع اولیه $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ است، لذا با استفاده از دستور نیوتن - لایبنتز داریم:

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

۲-۲-۲ انتگرالهای زیر حساب کنید:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx; \quad (b) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx; \quad (c) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$(a) 1; \quad (b) \frac{3}{2}; \quad (c) \frac{\pi}{6}. \quad \text{جواب:}$$

۳-۲-۲ تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

مفروض است. مطلوب است محاسبه

$$\int_0^2 f(x) \, dx.$$

حل. با توجه به خواص انتگرال معین داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) \, dx &= \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx + \int_1^2 \sqrt{x} \, dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} (4\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

۶-۲-۴ انتگرال

$$I = \int_0^2 |1-x| dx.$$

را حساب کنید.

حل. چون

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1 & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

پس

$$\begin{aligned} \int_0^2 |1-x| dx &= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \\ &= -\frac{(1-x)^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

۶-۲-۵ مطلوب است محاسبه انتگرال

$$I = \int_a^b \frac{|x|}{x} dx, \quad (a < b)$$

حل. اگر $0 \leq a < b$ ، آنگاه $f(x) = \frac{|x|}{x} = 1$ بنابراین

$$\int_a^b f(x) dx = b - a.$$

هرگاه $a < b \leq 0$ ، آنگاه $f(x) = -1$ پس

$$\int_a^b f(x) dx = -b - (-a) = a - b.$$

بالاخره اگر $a < 0 < b$ ، آنگاه آن را به صورت زیر حساب می کنیم:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx = b - (-a).$$

سه حالت فوق را می توان در یک فرمول خلاصه کرد:

$$\int_a^b \frac{|x|}{x} dx = |b| - |a|.$$

توجه: وقتی انتگرال معین را به کمک دستور نیوتن — لایبنتز حساب می کنیم، باید به شرایط استفاده از این دستور توجه بکنیم. این دستور وقتی که تابع در فاصله $[a, b]$ پیوسته است و در تمام فاصله $[a, b]$ رابطه $F'(x) = f(x)$ برقرار است، بکار می رود $[F(x)]$ یک تابع اولیه $f(x)$ است. بویژه، باید تابع اولیه در تمام فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد. اگر یک تابع منفصل بعنوان تابع اولیه بکار برده شود، نتیجه غلط بدست می آید.

۶-۲-۶ اشتباه محاسبه زیر را بیابید:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} [\arctan(-\sqrt{3}) - \arctan 0] = -\frac{\pi}{6},$$

که در آن

$$\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2} \right)' = \frac{1}{1+x^2} (x \neq 1).$$

حل. غلط بودن نتیجه بدیهی است زیرا، انتگرال یک تابع همه جا مثبت، منفی

شده است. اشتباه مبتنی بر این حقیقت است که تابع $\frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2}$ در نقطه $x=1$ انفعال از نوع اول است:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2} = \frac{\pi}{4}; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

جواب صحیح عبارت است از:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan 0 = \frac{\pi}{3}.$$

در اینجا می توان دستور نیوتن — لایبنتز را بکار برد، زیرا تابع $F(x) = \arctan x$ در فاصله $[0, \sqrt{3}]$ پیوسته است و رابطه $F'(x) = f(x)$ در این فاصله برقرار است.

۶-۲-۷ اشتباه محاسبات زیر را بیابید:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x} = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+3\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}\tan x) \Big|_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

(انتگرال تابع همه جا مثبت، صفر شده است!).

حل . در اینجا دستور نیوتن - لایبنیتز را نمی توان بکار برد، زیرا تابع اولیه

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x)$$

دارای نقطه انفصال $x = \frac{\pi}{2}$ است . در حقیقت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

مقدار صحیح انتگرال با روش زیر حساب می شود:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 3 \sin^2 x} &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\cot^2 x + 3} \frac{dx}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \cot x) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

همچنین می توان انتگرال را بکمک تابع اولیه

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x).$$

حساب کرد. برای این منظور فاصله انتگرالگیری $[0, \pi]$ را به دو فاصله

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ تقسیم می کنیم. حال اگر در این فاصله ها حدهای $F(x)$ را وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \mp 0$ حساب کنیم، پیوستگی تابع تأیید می شود و لذا می توان دستور نیوتن - لایبنیتز را بکار برد

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 3 \sin^2 x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

۸-۲-۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx.$$

حل.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} &= \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}} = |\cos x| = \\ &= \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx =$$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1-0) + (0-(-1)) = 2.$$

توجه اگر این حقیقت را که $\cos x$ در فاصله $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ منفی است، نادیده بگیریم و بنویسیم

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \cos x,$$

جواب غلط

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

نتیجه می شود.

۹-۲-۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx.$$

حل داریم

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2} |\sin x|.$$

چون دوره تناوب $|\sin x|$ ، π است، پس

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{100\pi} |\sin x| dx =$$

$$= 100 \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 200 \sqrt{2}.$$

۱۰-۲-۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \, I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3};$$

$$(b) \, I = \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1};$$

$$(c) \, I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} \, dx;$$

$$(d) \, I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1} \, dx;$$

$$(e) \, I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x};$$

$$(f) \, I = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \, dx;$$

$$(g) \, I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx;$$

$$(h) \, I = \int_0^1 \frac{x^3 \, dx}{1+x^8};$$

$$(i) \, I = \int_0^3 \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}};$$

$$(j) \, I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} \, dx;$$

$$(k) \, I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

جواب:

$$(a) \, \frac{7}{72}; \quad (b) \, \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}; \quad (c) \, \pi; \quad (d) \, \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{\pi}{4}; \quad (e) \, \ln 2; \quad (f) \, 1;$$

$$(g) \, \arctan e - \frac{\pi}{4}; \quad (h) \, \frac{\pi}{16}; \quad (i) \, \frac{14}{15}; \quad (j) \, \frac{4}{3}; \quad (k) \, \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}.$$

۳-۶ تخمین زدن (یا برآورد) یک انتگرال

انتگرال معین به عنوان تابعی از حدودش

۱- اگر در فاصله $a \leq x \leq b$ داشته باشیم $f(x) \leq \varphi(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

برای

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \quad ۲-$$

که m کوچکترین مقدار تابع و M بزرگترین مقدار تابع در فاصله $[a, b]$ است (برآورد یک انتگرال).

۳. اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b$$

(قضیه مقدار میانگین)

۴. اگر توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشند و علاوه علامت $\varphi(x)$ در این فاصله ثابت بماند، آنگاه

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx, \quad a < \xi < b$$

(تعمیم قضیه مقدار میانگین).

۵. به ازای هر x از نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ ،

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x); \quad \frac{d}{dx} \int_x^a f(t) dt = -f(x)$$

$$(a) \quad I = \int_1^3 \sqrt{3+x^3} \, dx; \quad (b) \quad I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} \, dx;$$

$$(c) \quad I = \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} \, dx.$$

حل . (a) چون تابع $f(x) = \sqrt{3+x^3}$ در فاصله $[۱, ۳]$ به طور یکنواخت صعودی است پس $m=2, M=\sqrt{30}, b-a=2$ بنا بر این آن را به صورت زیر برآورد می کنیم:

$$2 \cdot 2 \leq \int_1^3 \sqrt{3+x^3} \, dx \leq \sqrt{30} \cdot 2,$$

یا

$$4 \leq \int_1^3 \sqrt{3+x^3} \, dx \leq 2\sqrt{30} \approx 10.95.$$

(b) چون

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x - \tan x) \cos x}{x^2} < 0$$

پس $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ در فاصله $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ نزولی است. بنا بر این کوچکترین و بزرگترین مقدار آن به قرار زیر است:

$$m = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}, \quad M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

پس

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} \, dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right),$$

یعنی

$$0.22 \approx \frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} \, dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0.24.$$

جواب: $3 < I < 5$ (c) راهنمایی: $m = f(2) = \frac{3}{2}, \quad M = f(0) = \frac{5}{2},$

۲-۳-۶ قدر مطلق انتگرال زیر را برآورد کنید

$$\int_{10}^{19} \frac{\sin x}{1+x^8} \, dx.$$

حل. چون $|\sin x| \leq 1$ ، پس به ازای $x \geq 10$ ، نامساوی زیر برقرار است:

$$\left| \frac{\sin x}{1+x^8} \right| < 10^{-8}$$

بنابراین

$$\left| \int_{10}^{19} \frac{\sin x}{1+x^8} dx \right| < (19-10) 10^{-8} < 10^{-7}$$

(مقدار انتگرال برابر است با $10^{-8} - \approx$).

۶-۳-۳ کدام یک از انتگرالهای زیر بزرگترند:

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx, \quad \int_0^1 x^3 dx$$

حل. در فاصله $0 < x < 1$ داریم، $\sqrt{x} > x^3$ پس

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx > \int_0^1 x^3 dx.$$

۶-۳-۴ نامساویهای زیر را ثابت کنید:

$$(a) \quad 0 < \int_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \frac{1}{8}; \quad (b) \quad 1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e.$$

حل. (a) می دانیم وقتی $0 < x \leq 1$ ، آنگاه $0 < \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}} < x^7$ پس

$$0 < \int_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \int_0^1 x^7 dx = \left. \frac{x^8}{8} \right|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

(b) چون به ازای $0 < x < 1$ نامساوی $1 < e^{x^2} < e$ برقرار است، پس

$$\int_0^1 dx < \int_0^1 e^{x^2} dx < \int_0^1 e dx.$$

۶-۳-۵ نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx < \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) \quad (R > 0).$$

حل. چون تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ در فاصله $(0, \frac{\pi}{2})$ نزولی است (مسئله

(b) 6.3.1 را ببینید)، پس به ازای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ،

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

بنابر این در این فاصله $\sin x > \frac{2}{\pi} x$ و از آنجا

$$e^{-R \sin x} < e^{-\frac{2R}{\pi} x}$$

و

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} x} dx = -\frac{\pi}{2R} \left[e^{-\frac{2R}{\pi} x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}).$$

۶-۳-۶ توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله (a, b) انتگرالپذیرند. نامساوی

زیر موسوم به نامساوی «شوارتز-بونیافکسکی» را ثابت کنید:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx}.$$

حل. تابع

$$F(x) = [f(x) - \lambda g(x)]^2$$

را در نظر می گیریم که λ عدد حقیقی دلخواهی است. چون $F(x) \geq 0$ پس

$$\int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx \geq 0,$$

یا

$$\lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx - 2\lambda \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx \geq 0.$$

عبارت طرف چپ، یک سه جمله ای نسبت به λ است. با توجه به نامساوی، به ازای هر λ این سه جمله ای نامنفی است. پس مبین معادله نامثبت است، یعنی

$$\left\{ \int_a^b f(x) g(x) dx \right\}^2 - \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \leq 0.$$

بنابر این

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx},$$

۷-۳-۶ مقدار انتگرال

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx.$$

را برآورد کنید.

حل. با استفاده از تعمیم قضیه مقدار میانگین، داریم:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \sin \xi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sin \xi \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \sin \xi \quad (0 < \xi < 1).$$

چون تابع $\sin x$ در فاصله $[0, 1]$ صعودی می‌کند، پس $\sin \xi < \sin 1$ و تقریب اضافی آن برابر است با

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx < \frac{\pi}{4} \sin 1 \approx 0.64.$$

می‌توانیم مقدار آن را به صورت زیر هم، برآورد کنیم:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \frac{1}{1+\xi^2} \int_0^1 \sin x dx = \frac{1}{1+\xi^2} (1 - \cos 1) < 1 - \cos 1 \approx 0.46.$$

۸-۳-۶ بکمک مفهوم هندسی، ثابت کنید:

(الف) اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ صعودی کند و منحنی آن در این فاصله تقعر داشته باشد، آنگاه

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2};$$

(ب) اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ صعودی و منحنی آن در این فاصله تحدب داشته باشد، آنگاه

$$(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} < \int_a^b f(x) dx < (b-a)f(b).$$

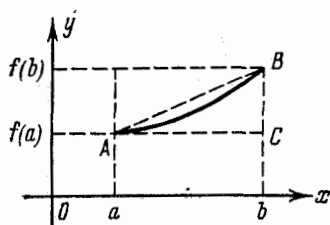
حل. (الف) بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود، فرض می‌کنیم

$f(x) > 0$. بویژه، تحدب منحنی بدین معنی است که منحنی در زیر و تری واقع است که نقاط $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ را بهم وصل می‌کند (شکل ۶۲). بنابراین مساحت ذوزنقه $aABb$ بزرگتر از مساحت ذوزنقه منحنی الضلعی است که از بالا به منحنی محدود است، یعنی

$$\int_a^b f(x) dx < S_{aABb} = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

و برقراری نامساوی زیر طبق شکل بدیهی است،

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x) dx$$



شکل ۶۲

۹-۳-۶ مطلوب است برآورد مقدار

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$$

با استفاده از:

(الف) قضیه مقدار میانگین در انتگرال معین،

(ب) نتیجه مسئله قبل،

(ج) نامساوی

$$\sqrt{1+x^4} < 1 + \frac{x^4}{2},$$

(د) نامساوی شوارتز-بونیافکفسکی (مسئله ۶-۳-۶ را ببینید).

حل. (الف) با توجه به قضیه مقدار میانگین داریم:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx = \sqrt{1+\xi^4}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

ولی

$$1 < \sqrt{1+\xi^4} < \sqrt{2},$$

بنابراین

$$1 < I < \sqrt{2} \approx 1.414.$$

(ب) چون

$$f''(x) = \frac{2x^2(x^4+3)}{(1+x^4)^{3/2}} > 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

پس تابع $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ در فاصله $[0, 1]$ محدب است. براساس مسئله قبلی داریم:

$$1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1.207.$$

$$1 < I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx < \int_0^1 \left(1 + \frac{x^4}{2}\right) dx = 1 + \frac{1}{10} = 1.1. \quad (\text{ج})$$

(د) با فرض $f(x) = \sqrt{1+x^4}$, $g(x) = 1$ و با توجه به نامساوی «شوارتز-

بونیاکفسکی» داریم:

$$\left| \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \right| = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx = I < \sqrt{\int_0^1 (1+x^4) dx \cdot \int_0^1 1^2 dx} = \sqrt{1.2} \approx 1.095.$$

۱۰-۳-۶ از توابع زیر نسبت به x مشتق بگیرید:

$$(a) F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln t dt \quad (x > 0),$$

$$(b) F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt \quad (x > 0).$$

حل. (a) انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$F(x) = \int_{x^2}^c \ln t dt + \int_c^{x^3} \ln t dt = \int_c^{x^3} \ln t dt - \int_c^{x^2} \ln t dt,$$

که $c > 0$ یک ثابت دلخواه است.

برای محاسبه $F'(x)$ از مشتق توابع مرکب و از قضیه مشتق از انتگرال نسبت

به حد فوقانی، استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} F'_x(x) &= \left[\int_c^{x^3} \ln t dt \right]'_{x^3} (x^3)'_x - \left[\int_c^{x^2} \ln t dt \right]'_{x^2} (x^2)'_x = \ln x^3 \cdot 3x^2 - \ln x^2 \cdot 2x = \\ &= (9x^2 - 4x) \ln x. \end{aligned}$$

$$(b) F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^c \cos(t^2) dt + \int_c^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt =$$

$$= - \int_c^{\frac{1}{x}} \cos(t^2) dt + \int_c^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt;$$

$$F'(x) = - \left[\int_c^x \cos(t^2) dt \right] \left(\frac{1}{x} \right)'_x + \left[\int_c^x \cos(t^2) dt \right]_{V^{-x}} (V^{-x})'_x = \\ = - \cos \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x.$$

۱۱-۳-۶ از توابع زیر نسبت به x مشتق بگیرید:

$$(a) F(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt; \quad (b) F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt.$$

جواب:

$$(a) \frac{\sin 2x}{x}; \quad (b) -\sqrt{1+x^4}.$$

۱۲-۳-۶ در دامنه $x > 0$ ، نقاط اکسترمم تابع $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ را تعیین کنید:

حل. از تابع مشتق می گیریم:

$$F'(x) = \left[\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \right]'_x = \frac{\sin x}{x}$$

نقاط بحرانی را تعیین می کنیم:

$$\sin x = 0, \quad x = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots),$$

مقدار مشتق مرتبه دوم به ازای این نقاط عبارت است از:

$$F''(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2};$$

$$F''(n\pi) = \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{1}{n\pi} (-1)^n \neq 0.$$

چون مشتق مرتبه دوم در نقاط $x = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) صفر نیست، پس این نقاط، نقاط اکسترمم تابع هستند. مثلاً اگر n زوج باشد مینیمم، و اگر n فرد باشد ماکزیمم هستند.

۱۳-۳-۶ مشتق y نسبت به x را از توابع پارامتری زیر به دست آورید:

$$x = \int_1^t \sqrt{z} \ln z dz; \quad y = \int_{\sqrt{t}}^3 z^2 \ln z dz.$$

حل. می دانیم که $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. مقادیر y'_t و x'_t را حساب می کنیم:

$$x'_t = \left(\int_1^{t^3} \sqrt[3]{z} \ln z \, dz \right)_{t^3}, \quad (t^3)'_t = t \ln t^3 \cdot 3t^2 = 9t^3 \ln t;$$

$$y'_t = \left(\int_{\sqrt{t}}^3 z^2 \ln z \, dz \right)_{\sqrt{t}}, \quad (\sqrt{t})'_t = -t \ln \sqrt{t} \frac{1}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{4} \sqrt{t} \ln t;$$

از آنجا

$$y'_x = \frac{9t^3 \ln t}{-\frac{1}{4} \sqrt{t} \ln t} = -36t^2 \sqrt{t} \quad (t > 0).$$

۱۴-۳-۶: حدهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{x} \, dx}{x^3}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan x)^2 \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} \, dx \right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} \, dx}.$$

جواب: (b) $\frac{\pi^2}{4}$.

حل. (a) در $x=0$ انتگرال $\int_0^{x^2} \sin \sqrt{x} \, dx$ برابر صفر است. براحتی می توان تحقیق کرد که می توان برای محاسبه این حد از دستور هوییتال استفاده کرد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{x} \, dx}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\int_0^{x^2} \sin \sqrt{x} \, dx \right]_{x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

در اینجا حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ وجود دارد. با استفاده از دستور هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} \, dx \right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} \, dx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{x^2} \, dx \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{x^2} \, dx}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} \cdot 2x} = 0.$$

۱۵-۳-۶: در توابع ضمنی زیر $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید:

$$(a) \int_0^y e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} \sin^2 t dt = 0;$$

$$(b) \int_0^y e^t dt + \int_0^x \sin t dt = 0;$$

$$(c) \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{3-2\sin^2 z} dz + \int_0^y \cos t dt = 0.$$

جواب:

$$(b) \frac{dy}{dx} = -e^{-y} \sin x.$$

حل . (a) با در نظر گرفتن $y = y(x)$ ، از طرف چپ نسبت به x مشتق می گیریم:

$$\left[\int_0^y e^{-t^2} dt \right]'_y \cdot \frac{dy}{dx} + \left[\int_0^{x^2} \sin^2 t dt \right]'_{x^2} (x^2)'_x = 0;$$

$$e^{-y^2} \frac{dy}{dx} + \sin^2 x^2 \cdot 2x = 0.$$

از رابطه اخیر $\frac{dy}{dx}$ را حساب می کنیم:

$$\frac{dy}{dx} = -2xe^{+y^2} \sin^2 x^2.$$

(c) با در نظر گرفتن $y = y(x)$ ، از طرف چپ نسبت به x مشتق می گیریم:

$$\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{3-2\sin^2 z} dz \right]'_x + \left[\int_0^y \cos t dt \right]'_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

از آنجا

$$\sqrt{3-2\sin^2 x} + \cos y \frac{dy}{dx} = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}.$$

(۶-۳-۱۶)

(الف) نقاط اکسترمم و نقاط عطف منحنی تابع زیر را تعیین کنید:

$$I = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt;$$

(ب) انحنا منحنی به معادله زیر را تعیین کنید:

$$(مارپیچ کارنو) \begin{cases} x = a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \\ y = a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin \frac{\pi t^2}{2} dt \end{cases}$$

حل . (الف) تابع بطور پیوسته در تمام نقاط محور حقیقی معین و مشتقپذیر است .
مشتق آن، یعنی

$$I'_x = (x-1)(x-2)^2$$

در نقاط $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ صفر است و در گذشتن از x_1 علامت آن از منفی به مثبت تبدیل می شود ولی در همسایگی نقطه x_2 علامتش ثابت است . بنابراین در نقطه $x_1 = 1$ ، مینیمم است و در نقطه $x_2 = 2$ اکسترم وجود ندارد . مشتق دوم

$$I''_x = 3x^2 - 10x + 8$$

در نقاط $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 2$ ، صفر است و در گذشتن از این نقاط ، علامت تغییر می کند . پس این نقاط ، طول نقاط عطف منحنی هستند .

(ب) داریم :

$$x'_t = a\sqrt{\pi} \cos \frac{\pi t^2}{2}, \quad y'_t = a\sqrt{\pi} \sin \frac{\pi t^2}{2},$$

پس

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \tan \frac{\pi t^2}{2}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\sqrt{\pi} t}{a \cos^3 \frac{\pi t^2}{2}};$$

پس انحناء برابر است با

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi} t}{a}.$$

۱۷-۳-۶ ثابت کنید تابع $L(x)$ که در فاصله $(0, \infty)$ با انتگرال

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

تعریف می شود، یک معکوس تابع e^x است .

حل . مشتق عبارت است از

$$L'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

چون مشتق مثبت است . پس تابع $y = L(x)$ صعودی است ، بنابراین یک تابع معکوس به

صورت

$$x = L^{-1}(y)$$

دارد . مشتق تابع معکوس

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{L'(x)} = x,$$

است پس نتیجه می شود

$$x = Ce^y$$

(مسئله ۱۰-۱-۳ را ببینید) برای تعیین C فرض می کنیم $x=1$ چون $L(1)=0$ ،

یعنی ، $y|_{x=1} = 0$ پس

$$1 = Ce^0 = C$$

این مطلب ثابت می کند که

$$x = L^{-1}(y) = e^y.$$

۱۸-۳-۶. نمایش هندسی تابع $y = f(x)$ در شکل ۶۳ نشان داده شده

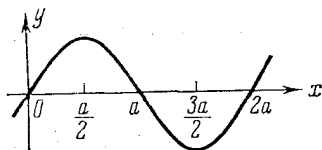
است. نمودار تابع (اولیه)

$$I = \int_0^x f(t) dt.$$

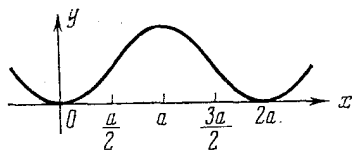
را مشخص نماید.

حل. در فاصله $[0, a]$ ، تابع مثبت است ، در نتیجه ، تابع اولیه صعود می کند.

در فاصله $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ مشتق تابع مفروض ، مثبت است ، پس منحنی $I = I(x)$ محدب است. در فاصله $\left[\frac{a}{2}, a\right]$ مشتق تابع منفی است ، در نتیجه منحنی $I = I(x)$ مقعر است ، بنابراین نقطه $x = \frac{a}{2}$ ، نقطه عطف است. مطالعه وضعیت منحنی در فاصله $[a, 2a]$ به طریق مشابه انجام می شود. چون در گذشتن از نقطه $x_1 = 0$ مشتق $I'(x) = f(x)$ از علامت منفی به مثبت تبدیل می شود ، لذا این نقطه مینیمم است ، و نقطه $x_2 = a$ ماکزیمم می باشد زیرا در این نقطه علامت مشتق از مثبت به منفی تبدیل می شود.



شکل ۶۳



شکل ۶۴

چون مساحت‌های واقع در بالا و پائین محور x ها دوبرو در فاصله‌های به طول $2a$ حذف می‌شوند، پس $I(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $2a$ است. با در نظر گرفتن تمام مطالبی که گذشت گراف تابع اولیه طبق شکل ۶۴ رسم می‌شود.

۱۹-۳-۶ چند جمله‌ای $P(x)$ را با کوچکترین درجه طوری تعیین

کنید که در نقطه $x=1$ ماکزیمی برابر ۶ و در نقطه $x=3$ مینیمی برابر ۲ داشته باشد.

حل. چون چند جمله‌ای در همه جا مشتق‌پذیر است. بنابراین، نقاط اکسترم فقط می‌توانند جوابهای مشتق باشند. بعلاوه، مشتق چند جمله‌ای، یک چند جمله‌ای است. چند جمله‌ای با کوچکترین درجه که ریشه‌های $x_1=1$ و $x_2=3$ را داشته باشند، به صورت

$$a(x-1)(x-3)$$

است. بنابراین

$$P'(x) = a(x-1)(x-3) = a(x^2 - 4x + 3).$$

چون در $x=1$ داریم $P(1)=6$ ، پس

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_1^x P'(x) dx + 6 = a \int_1^x (x^2 - 4x + 3) dx + 6 = \\ &= a \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1 \frac{1}{3} \right) + 6. \end{aligned}$$

برای تعیین a از شرط $P(3)=2$ استفاده می‌کنیم که از آنجا، $a=3$. بنابراین

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

۲۰-۳-۶ چند جمله‌ای $P(x)$ را با کوچکترین درجه طوری تعیین کنید که

منحنی نمایش آن، دارای سه نقطه عطف $(1, 1)$ ، $(-1, -1)$ و نقطه‌ای به طول صفر باشد که در این نقطه خط مماس به منحنی، با محور x زاویه 60° درجه می‌سازد.

حل. چون تابع مطلوب یک چند جمله‌ای است، پس نقاط عطف می‌توانند فقط

ریشه‌های مشتق مرتبه دوم باشند. چند جمله‌ای با کمترین درجه که دارای ریشه‌های

$1, 0, -1$ باشد به صورت $ax(x^2-1)$ است. در نتیجه

$$P''(x) = a(x^3 - x)$$

چون در $x=0$ داریم:

$$P'(0) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

پس

$$P'(x) = \int_0^x P''(x) dx + \sqrt{3} = a \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) + \sqrt{3}$$

و همچنین به علت اینکه $P(1) = 1$ ، بنابراین

$$P(x) = \int_1^x P'(x) dx + 1 = a \left(\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} + \frac{7}{60} \right) + \sqrt{3}(x-1) + 1$$

ضریب a با شرط $P(-1) = -1$ به دست می‌آید، از آنجا $a = \frac{60(\sqrt{3}-1)}{7}$ بنابراین

$$P(x) = \frac{\sqrt{3}-1}{7} (3x^5 - 10x^3) + x\sqrt{3}.$$

۶-۳-۲۱ با استفاده از قضیه مقدار میانگین در انتگرال معین، نامساویهای زیر

را ثابت کنید:

$$(a) \quad 3 < \int_0^1 \sqrt{q+x^2} dx < 10,$$

$$(b) \quad \frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$(c) \quad \frac{2\pi}{13} < \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3 \cos x} < \frac{2\pi}{7}.$$

۶-۳-۲۲ با استفاده از نامساوی «شوارتز-بونیاکوفسکی» ثابت کنید

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

و نشان دهید که به وسیله قضیه مقدار میانگین برآورد بهتر از این، حاصل نمی‌شود.

۶-۳-۲۳ مشتق توابع زیر را بیابید:

$$(a) \quad F(x) = \int_1^x \ln t dt \quad (x > 0); \quad (b) \quad F(x) = \int_{\frac{2}{x}}^{x^2} \frac{dt}{t}.$$

جواب: (a) $\ln x$; (b) $\frac{3}{x}$.۶-۳-۲۴ در توابع پارامتری زیر $\frac{dy}{dx}$ را بیابید:

$$(a) \quad x = \int_2^t \frac{\ln z}{z} dz, \quad y = \int_5^{\ln t} e^z dz;$$

$$(b) \quad x = \int_{e^2}^{\sin t} \arcsin z \, dz, \quad y = \int_n^{\sqrt{t}} \frac{\sin z^2}{z} dz.$$

جواب (a) $y' = \frac{t}{\ln t}$; (b) $y'_x = \frac{\tan t}{t^2}$

۶-۳-۲۵ نقاط اکسترمم توابع زیر را تعیین کنید:

$$(a) \quad F(x) = \int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}} (1-t^2) dt;$$

$$(b) \quad F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t} dt.$$

جواب: (a) در $x=1$ ماکزیمم و در $x=-1$ مینیمم دارد. (b) در نقاط $x=-2$; 0 ; 2 مینیمم و در نقاط $x=\pm 1$ ماکزیمم دارد.

۶-۴ تغییر متغیر در انتگرال معین

اگر تابع $x = \varphi(t)$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\varphi(t)$ در فاصله $[\alpha, \beta]$ ، تابعی پیوسته و یک مقداری بوده و در این فاصله

$\varphi'(t)$ نیز پیوسته باشد،

(۲) اگر t در فاصله $[\alpha, \beta]$ تغییر نماید، مقادیر تابع $x = \varphi(t)$ از فاصله

$[a, b]$ خارج نشود،

(۳) $\varphi(\beta) = b$ و $\varphi(\alpha) = a$.

آنگاه دستور تغییر متغیر در انتگرال معین برای هر تابع پیوسته در فاصله

$[a, b]$ به صورت زیر اعمال می شود:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

اغلب به جای تغییر متغیر $x = \varphi(t)$ ، معکوس آن یعنی $t = \psi(x)$ بکار می رود. در

این صورت حدود انتگرالگیری مستقیماً از تساویهای $\alpha = \psi(a)$ و $\beta = \psi(b)$ حساب می‌شوند. در عمل، تغییر متغیر به کمک توابع یکنواخت و به طور پیوسته مشتقپذیر انجام می‌گیرد. برای راحتی تعویض حدود انتگرالگیری را با جدول زیر انجام می‌دهیم:

x	t
a	α
b	β

۱-۴-۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx.$$

حل. با استفاده از تغییر متغیر $x = 2 \sin t$ داریم $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$. تابع $x = \varphi(t) = 2 \sin t$ در فاصله $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ در تمام شرایط قضیه تعویض متغیرها، صدق می‌کند، زیرا در این فاصله، تابعی یکنواخت بوده و به طور پیوسته مشتقپذیر است. و

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

همچنین

$$x = 2 \sin t; \quad dx = 2 \cos t dt; \quad \sqrt{4-x^2} = 2 |\cos t| = 2 \cos t,$$

زیرا $\cos t$ در فاصله $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ مثبت است.

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx &= 4 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= 2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

۲-۴-۶ مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

حل. تغییر متغیر زیر را بکار می‌بریم:

$$x = 2 \sec t; \quad \begin{vmatrix} x & t \\ 2 & 0 \\ 4 & \frac{\pi}{3} \end{vmatrix}$$

$$dx = 2 \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt;$$

در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ تابع $2 \sec t$ یکنواخت است پس می توانیم آن را بکار ببریم. بنابراین

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{4 \sec^2 t - 4}}{16 \sec^4 t} \cdot 2 \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{12} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

۳-۴-۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad (b) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

(با تغییر متغیر $x = a \sin t$) (a) جواب: $\frac{\pi a^4}{16}$

(b) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ (با تغییر متغیر $x = \tan t$)

۴-۴-۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}; \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

حل. (a) تغییر متغیر زیر را بکار می بریم.

$$\sin x = t; \quad \begin{vmatrix} x & t \\ 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\cos x dx = dt;$$

تابع معکوس $x = \arcsin t$ ($0 \leq t \leq 1$ برای $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) در شرایط قضیه تعویض متغیرها صدق می کند. بنابراین

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{6 - 5t + t^2} = \ln \frac{t-3}{t-2} \Big|_0^1 = \ln \frac{4}{3}.$$

(b) تغییر متغیر $t = \tan \frac{x}{2}$ را بکار می‌بریم:

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \left| \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 1 \end{array} \right|,$$

چون تابع $\tan \frac{x}{2}$ در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ یک‌نواخت است پس این تغییر متغیر را می‌توان بکار برد.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan 0 \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

۵-۴-۶. مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad (a > 0, \quad b > 0).$$

حل. تغییر متغیر زیر را بکار می‌بریم:

$$\tan x = t, \quad \left| \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \frac{\pi}{4} & 1 \end{array} \right|,$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt,$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} &= \int_0^1 \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{1}{b^2} \int_0^1 \frac{dt}{\frac{a^2}{b^2} + t^2} = \\ &= \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{a} \arctan \frac{bt}{a} \Big|_0^1 = \frac{1}{ab} \arctan \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

اگر $a = b = 1$ آنگاه

$$\frac{1}{ab} \arctan \frac{b}{a} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

که دقیقاً با نتیجه جاگذاری $a = b = 1$ در انتگرال اصلی یکی است

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

۶-۴-۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx; \quad (b) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}};$$

$$(c) \int_3^2 \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx.$$

جواب:

$$(a) \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}; \quad (b) 2(\sqrt{3}-1); \quad (c) 8 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$$

۶-۴-۷ مطلوب است محاسبه انتگرال

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

حل. آن را به انتگرالهای زیر تبدیل می کنیم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = I_1 + I_2.$$

برای حل

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$x = \pi - t, \\ dx = -dt,$$

x	t
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
π	0

پس

$$I_2 = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\pi-t) \sin(\pi-t)}{1 + \cos^2(\pi-t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt.$$

بنابراین

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt.$$

چون انتگرالهای اول و سوم قرینه یکدیگرند، حذف می شوند، پس

$$I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt.$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$u = \cos t,$$

$$du = -\sin t dt,$$

t	u
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0

$$I = -\pi \int_1^0 \frac{du}{1+u^2} = \pi \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

توجه: انتگرال نامعین

$$\int \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

را نمی توان به صورت توابع مقدماتی نوشت. طوری که دیدیم به کمک یک روش ابتکاری انتگرال معین، حساب می شود.

۸-۴-۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

حل. تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$x = \tan t,$$

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t},$$

x	t
0	0
1	$\frac{\pi}{4}$

بنابر این

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 + \tan t) \sec^2 t}{\sec^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt.$$

مجموع $1 + \tan t$ را به صورت زیر حساب می کنیم:

$$1 + \tan t = \tan \frac{\pi}{4} + \tan t = \frac{\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}$$

و در انتگرال قرار می دهیم،

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \ln 2 dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt = \\ &= \frac{1}{2} t \ln 2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt = \\ &= \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt = \frac{\pi}{8} \ln 2 + I_1 - I_2. \end{aligned}$$

حال نشان می دهیم که $I_1 = I_2$. برای این منظور از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi}{4} - z, \\ dt &= -dz, \end{aligned} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline t & z \\ \hline 0 & \frac{\pi}{4} \\ \hline \frac{\pi}{4} & 0 \\ \hline \end{array}$$

در انتگرال $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt$ قرار می دهیم:

$$I_2 = - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right) dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - z\right)\right] dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} + z\right) dz = I_1.$$

بنابراین

$$I = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

توجه کنید همان طوری که قبلاً هم دیده‌ایم انتگرال

$$\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

قابل تبدیل به انتگرال توابع مقدماتی نیست.

۹-۴-۶ ثابت کنید همیشه در انتگرال با حدود متناهی a و b ، می‌توانتغییر متغیر خطی مانند $x = pt + q$ (p و q اعداد ثابتی هستند) را طوری انتخاب کرد تا حدود انتگرال جدید ۰ و ۱ شوند.حل. توجه داریم که تغییر متغیر $x = pt + q$ به طور ضمنی دارای شرایط قضیهتعویض متغیرهاست، چون t به ازای $x = a$ صفر، و به ازای $x = b$ برابر یک است. پس p و q در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند

$$a = p \cdot 0 + q,$$

$$b = p \cdot 1 + q,$$

از آنجا $p = b - a$ ، $q = a$ بنابراین

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[(b-a)t + a] dt.$$

۱۰-۴-۶ مجموع دو انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2} dx + 3 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} e^9 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx.$$

حل. هریک از انتگرالها را به انتگرالی با حدود صفر و یک تبدیل می‌کنیم.

برای این منظور تغییر متغیر $x = -t - 4$ را برای انتگرال اولی بکار می‌بریم در اینصورت $dx = -dt$ ، و از آنجا

$$I_1 = \int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2} dx = - \int_0^1 e^{(-t+1)^2} dt = - \int_0^1 e^{(t-1)^2} dt.$$

و تغییر متغیر $x = \frac{t}{3} + \frac{1}{3}$ را برای انتگرال دومی در نظر می گیریم که در آن $dx = \frac{dt}{3}$ ، پس

$$I_2 = 3 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} e^9 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx = \int_0^1 e^{(t-1)^2} dt.$$

بنابراین

$$I_1 + I_2 = - \int_0^1 e^{(t-1)^2} dt + \int_0^1 e^{(t-1)^2} dt = 0.$$

توجه داریم که هیچ یک از انتگرالهای $\int e^{(x+5)^2} dx$ و $\int e^9 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx$ به طور جداگانه قابل تبدیل به انتگرال توابع مقدماتی نیستند.

۱۱-۴-۶ ثابت کنید که انتگرال زیر وقتی k عددی صحیح باشد، برابر صفر

است:

$$\int_0^\pi \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx$$

حل. تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$\begin{array}{l} x = \pi - t, \\ dx = -dt, \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 0 & \pi \\ \pi & 0 \\ \hline \end{array}$$

چون k عددی صحیح است، پس

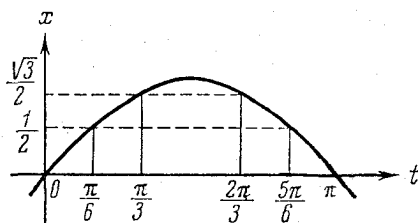
$$\int_0^\pi \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx = - \int_\pi^0 \frac{\sin 2k(\pi - t)}{\sin(\pi - t)} dt = - \int_0^\pi \frac{\sin 2kt}{\sin t} dt.$$

چون مقدار انتگرال معین با تغییر نماد انتگرالگیری تغییر نمی کند، بنابر این

$$I = -I, \quad I = 0.$$

۱۲-۴-۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}.$$



شکل ۶۵

حل . تغییر متغیر

$$x = \sin t \quad , \quad dx = \cos t \, dt$$

را بکار می‌بریم (تابع مفروض یکنواخت نیست). حدود انتگرال جدید را از معادلات

$$\frac{1}{2} = \sin t; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin t$$

بدست می‌آوریم. می‌توان فرض کرد $t_1 = \frac{\pi}{6}$ و $t_2 = \frac{\pi}{3}$ و یا همچنین می‌توانیم فرض کنیم $t_1 = \frac{5\pi}{6}$ و $t_2 = \frac{2\pi}{3}$.

در هر دو حالت متغیر $x = \sin t$ تمام فاصله $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ را طی می‌کند (شکل ۶۵ را ببینید) و تابع $\sin t$ در هر دو فاصله $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ و $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ یکنواخت است.

حال نشان می‌دهیم که نتیجه انتگرالگیری در هر دو فاصله یکی است. یعنی،

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t \, dt}{\sin t \cos t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| \bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \ln \tan \frac{\pi}{6} - \ln \tan \frac{\pi}{12} = \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

از طرفی چون $\cos t$ در فاصله $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ منفی است، داریم:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos t \, dt}{\sin t (-\cos t)} = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{dt}{\sin t} =$$

$$= \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| \bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} = \ln \frac{\tan \frac{5}{12} \pi}{\tan \frac{\pi}{3}} = \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

توجه: مقادیر $t_1 = \frac{5\pi}{6}$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$ را انتخاب نمی کنیم زیرا اگر t در فاصله $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right]$ تغییر نماید مقادیر x در خارج فاصله $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ قرار می گیرند.

۱۳-۴-۶ ثابت کنید تابع $L(x)$ که در فاصله $(0, \infty)$ با انتگرال $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ تعریف می شود، دارای خواص زیر است:

$$L(x_1 x_2) = L(x_1) + L(x_2),$$

$$L\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = L(x_1) - L(x_2).$$

حل. با توجه به خاصیت جمع پذیری،

$$L(x_1 x_2) = \int_1^{x_1 x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_1 x_2} \frac{dt}{t}.$$

در انتگرال دوم از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{array}{l} t = x_1 z, \\ dt = x_1 dz, \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline t & z \\ \hline x_1 & 1 \\ x_1 x_2 & x_2 \\ \hline \end{array}$$

بنابراین

$$L(x_1 x_2) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_1^{x_2} \frac{dz}{z} = L(x_1) + L(x_2).$$

با فرض $x_1 x_2 = x_3$; $x_2 = \frac{x_3}{x_1}$ داریم:

$$L(x_3) = L(x_1) + L\left(\frac{x_3}{x_1}\right), \quad L\left(\frac{x_3}{x_1}\right) = L(x_3) - L(x_1).$$

تحقیق درستی رابطه

$$L\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} L(x)$$

برای مقادیر صحیح m و n خیلی راحت است. در حقیقت برای مقادیر مثبت m و

n داریم:

$$L\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = mL\left(x^{\frac{1}{n}}\right), \quad L(x) = nL\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

و برای توانهای منفی داریم:

$$L(1) = 0, \quad L(x^{-1}) = L\left(\frac{1}{x}\right) = L(1) - L(x) = -L(x).$$

حال با استفاده از پیوستگی انتگرال به عنوان تابعی از حد فوقانی، خاصیت عمومی

$$L(x^a) = aL(x)$$

بدست می آید.

توجه: طوری که دیدیم، $L(x) = \ln x$ در اینجا خواص اساسی لگاریتم یکمک انتگرال بررسی شد.

۱۴-۴-۶ انتگرال

$$\int_0^3 (x-2)^2 dx$$

را با تغییر متغیر $(x-2)^2 = t$ تغییر دهید.حل. استفاده از تغییر متغیر در فاصله $[0, 3]$ نتیجه درستی حاصل نمیشود، زیرا

تابع معکوس $x = \varphi(t)$ به صورت دو تابع $x = 2 \pm \sqrt{t}$ است، یعنی x دارای دو شاخه $x_1 = 2 - \sqrt{t}$ ، $x_2 = 2 + \sqrt{t}$ می باشد. که در شاخه اولی $x < 2$ و در شاخه دومی $x > 2$ برای حصول به نتیجه درست، انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int_0^3 (x-2)^2 dx = \int_0^2 (x-2)^2 dx + \int_2^3 (x-2)^2 dx,$$

فرض می کنیم که در انتگرال اول $x = 2 - \sqrt{t}$ و در انتگرال دومی $x = 2 + \sqrt{t}$ ، پس

$$I_1 = \int_0^2 (x-2)^2 dx = - \int_4^0 t \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{t} dt = \frac{8}{3},$$

$$I_2 = \int_2^3 (x-2)^2 dx = \int_0^1 t \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{1}{3}.$$

بنابر این $I = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$ ، که جواب صحیح مسئله است و می توان آن را به صورت زیر،

راحت تر حساب کرد:

$$\int_0^3 (x-2)^2 dx = \frac{(x-2)^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3.$$

۱۵-۴-۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) I = \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; \quad (b) I = \int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}};$$

$$(c) I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}; \quad (d) I = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx;$$

$$(e) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx;$$

$$(f) I = \int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx, \quad a > 0;$$

$$(g) I = \int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2} dx; \quad (h) I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

جواب:

$$(a) 2-2 \ln 2; \quad (b) 0.2 \ln 112; \quad (c) \frac{\sin \frac{\pi}{24}}{\sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{12}}; \quad (d) \sqrt{3}-0.5 \ln(2+\sqrt{3})$$

$$(e) 0.25 \ln 3 \quad \text{با تغییر متغیر } t = \sin x - \cos x \quad (f) a^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{با استفاده از تغییر متغیر}$$

$$(g) \frac{\pi a^2}{2} \quad \text{با استفاده از تغییر متغیر } t = x = a \cos t \quad (h) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{با استفاده از تغییر متغیر } t = x = 2a \sin^2 t$$

۱۶-۴-۶ بکمک تغییر متغیر مناسب، انتگرالهای زیر را حساب نمایید:

$$(a) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}; \quad (b) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$(c) \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}; \quad (d) \int \frac{\sqrt{(a^2+b^2)/2}}{\sqrt{(3a^2+b^2)/2}} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}.$$

جواب: (a) $\frac{\pi}{6}$; (b) $\frac{\pi}{4}$; (c) $\frac{1}{4} \ln \frac{32}{17}$ با تغییر متغیر $x^4 = t$; (d) $\frac{\pi}{12}$ با تغییر متغیر $x^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t$

۱۷-۴-۶ براحتی انتگرال

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2}$$

حساب می شود که مقدارش $\frac{\pi}{4}$ است. در واقع

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{4}$$

از طرف دیگر با استفاده از تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ داریم:

$$dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad \begin{vmatrix} x & t \\ -2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2 \left(4 + \frac{1}{t^2} \right)} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{4t^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan 2t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{4}.$$

واضح است که جواب درست نیست، زیرا $\frac{1}{4+x^2} > 0$ ، و نتیجتاً انتگرال معین این تابع نمی تواند عدد منفی $-\frac{\pi}{4}$ باشد. مورد اشتباه را بیابید.

جواب: تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ را نمی توان بکاربرد زیرا تابع در $t=0$ پیوسته

نیست.

۱۸-۴-۶ اگر در انتگرال

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-2\cos x}$$

تغییر متغیر $\frac{x}{2} = t$ را بکار ببریم، داریم:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-2\cos x} = \int_0^0 \frac{2 dt}{(1+t^2) \left(5-2\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = 0$$

واضح است که نتیجه درست نیست، زیرا انتگرال مثبت است و در نتیجه انتگرال آن

نمی تواند صفر شود. مورد اشتباه را بیابید.

جواب: تغییر متغیر $t = \tan \frac{x}{2}$ را نمی توان بکاربرد، زیرا تابع در $x = \pi$

پیوسته نیست.

۱۹-۴-۶ تعیین کنید که به چه دلیل با تغییر متغیر $t = x^{\frac{2}{5}}$ ، نتیجه

انتگرالگیری از

$$\int_{-2}^2 \sqrt[5]{x^2} dx$$

غلط است؟

راهنمایی: تابع معکوس یعنی $x = \pm \sqrt[5]{t^5}$ تابعی دو مقدراری است. برای

اینکه جواب صحیح باشد لازم است فاصله انتگرالگیری را تغییر دهید:

$$\int_{-2}^2 \sqrt[5]{x^2} dx = \int_{-2}^0 \sqrt[5]{x^2} dx + \int_0^2 \sqrt[5]{x^2} dx$$

و $x = -\sqrt[5]{t^5}$ را در فاصله $-2 < x < 0$ ، و $x = +\sqrt[5]{t^5}$ را در $0 < x < 2$ بکار
برید.

۲۰-۴-۶ آیا می توان برای محاسبه

$$I = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

از تغییر متغیر $x = \sec t$ استفاده کرد.

جواب: چون $t \geq 1$ $\sec t$ فاصله انتگرالگیری $[0, 1]$ است، پس نمی توان از

این تغییر متغیر استفاده کرد.

۲۱-۴-۶ انتگرال

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

مفروض است. تغییر متغیر $x = \sin t$ را در نظر می گیریم. آیا می توان π و $\frac{\pi}{2}$ را به
عنوان حدود انتگرال جدید انتخاب کرد؟

جواب: غیر ممکن است، تمرین ۱۲-۴-۶ را ببینید.

۲۲-۴-۶ اتحاد زیر را برای هر تابع دلخواه $f(x)$ ثابت کنید:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

راهنمایی . در رابطه

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

تغییر متغیر $t = -x$ را برای اولین انتگرال بکار ببرید .

۲۳-۴-۶ انتگرال

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$

را با تغییر متغیر $\sin x = t$ تغییر دهید .

جواب :

$$\int_0^1 f(\arcsin t) dt + \int_1^{-1} f(\pi - \arcsin t) dt + \int_{-1}^0 f(2\pi + \arcsin t) dt$$

راهنمایی نخست انتگرال را به سه انتگرال در فاصله های

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

تبدیل کنید و آنگاه به ترتیب از تغییر متغیرهای

$$x = \arcsin t, x = \pi - \arcsin t, x = 2\pi + \arcsin t$$

استفاده کنید .

۵-۶ تلخیص انتگرال براساس خاصیت تقارن انتگرال

۱. اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-a, a]$ زوج باشد، آنگاه

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

۲. اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-a, a]$ فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

۳. اگر $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x) dx,$$

که n عددی صحیح است.

۱-۵-۶ انتگرال

$$\int_{-1}^1 |x| dx$$

را حساب کنید.

حل. چون $f(x) = |x|$ تابعی زوج است، پس

$$\int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

۲-۵-۶ مطلوب است محاسبه

$$\int_{-7}^7 \frac{x^4 \sin x}{x^6 + 2} dx.$$

حل. چون انتگرال تابعی فرد است، بنابراین مقدارش صفر می شود.

۳-۵-۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx;$$

$$(b) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

اگر

(۱) $f(x)$ تابعی زوج است. (۲) هرگاه $f(x)$ تابعی فرد است.

جواب: (۱) اگر $f(x)$ زوج باشد، آنگاه

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \text{ and } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0$$

(۲) اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \text{ و } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

۴-۵-۶ مطلوب است محاسبه

$$\int_{-5}^5 \frac{x^5 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$$

جواب: صفر

۵-۵-۶ مطلوبست محاسبه

$$\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx.$$

حل . چون

$$f(x + \pi) = \frac{\sin 2(x + \pi)}{\cos^4(x + \pi) + \sin^4(x + \pi)} = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = f(x).$$

پس انتگرال تابعی متناوب با دوره تناوب π است، بنابراین می توان π را از حد بالا و حد پایین انتگرال، کم کرد:

$$\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos^2 x (1 + \tan^4 x)}.$$

تغییر متغیر زیر را بکار می بریم

$$t = \tan x, \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

x	t
0	0
$\frac{\pi}{4}$	1

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos^2 x (1 + \tan^4 x)} = \int_0^1 \frac{2t dt}{1 + t^4} = \arctan t^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

۶-۵-۶ اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\int_{-a}^a \cos x f(x^2) dx = 2 \int_0^a \cos x f(x^2) dx.$$

حل . کافی است نشان دهیم انتگرال زوج است

$$\cos(-x) f[(-x)^2] = \cos x f(x^2).$$

۶-۵-۷ مطلوبست محاسبه

$$\int_{-V^2}^{V^2} \frac{2x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 7x^3 - 12x^2 + x + 1}{x^2 + 2} dx.$$

حل .

$$\int_{-V^2}^{V^2} \frac{2x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 7x^3 - 12x^2 + x + 1}{x^2 + 2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7 - 10x^5 - 7x^3 + x}{x^2 + 2} dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{3x^2(x^4 - 4) + 1}{x^2 + 2} dx = \\
&= 0 + 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left[3(x^4 - 2x^2) + \frac{1}{x^2 + 1} \right] dx = \\
&= \frac{6}{5} x^5 - 4x^3 + \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = -\frac{16}{5} \sqrt{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

در محاسبه انتگرال، آن را به دو انتگرال تبدیل کردیم که انتگرال انتگرال اول فرد و انتگرال دوم زوج است.

۸-۵-۶ مطلوب است محاسبه

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

حل. تابع $f(x) = \cos x$ زوج است. ثابت می کنیم تابع $\varphi(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ فرد است،

$$\varphi(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -\varphi(x).$$

پس انتگرال، حاصلضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد است، پس انتگرال تابعی فرد است، بنابراین

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0.$$

۹-۵-۶ درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

$$(a) \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^8 \sin^9 x dx = 0; \quad (b) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\cos x} dx;$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (m \text{ و } n \text{ اعداد طبیعی اند})$$

$$(d) \int_{-a}^a \sin xf(\cos x) dx = 0.$$

۱۰-۵-۶ اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

حل. برای انتگرال طرف چپ تغییر متغیر زیر را بکار می‌بریم:

$$x = a + b - t, \quad dx = -dt, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline a & b \\ b & a \\ \hline \end{array}.$$

پس داریم:

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = - \int_b^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

توجه. رابطه بین دو انتگرال را می‌توان به صورت زیر تعبیر هندسی کرد:

منحنی نمایش $f(x)$ و منحنی تابع $f(a+b-x)$ در فاصله $[a, b]$ نسبت به خط $x = \frac{a+b}{2}$ متقارن هستند، یعنی، اگر A به طول x روی محور x ها باشد، آنگاه نقطه A' قرینه آن، نسبت به خط مذکور، دارای طول $x' = a+b-x$ است. بنابراین

$$f(a+b-x') = f[a+b-(a+b-x)] = f(x)$$

می‌دانیم شکل‌های متقارن، مساحت‌های برابر دارند پس انتگرال‌ها برابرند. بنابراین، اتحادی که ثابت شد، یک تساوی بین مساحت‌های دو ذوزنقه منحنی الضلع را بیان می‌کند.

۱۱-۵-۶ تساوی زیر را ثابت کنید

$$\int_0^t f(x) g(t-x) dx = \int_0^t g(x) f(t-x) dx.$$

حل. تغییر متغیر $t-x=z$ را برای انتگرال طرف راست بکار می‌بریم:

$$- \int_t^0 g(t-z) f(z) dz = \int_0^t f(z) g(t-z) dz.$$

۱۲-۵-۶ نخست تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$$

و با استفاده از آن انتگرالهای

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \quad \text{و} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$$

را حساب کنید *

حل . براساس مسئله (6.5.10) داریم :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \, dx.$$

پس در حالت خاص

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx;$$

برای محاسبه دو انتگرال را با هم جمع می کنیم

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

پس

$$I = \frac{\pi}{4}$$

۱۳-۵-۶ تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx.$$

حل . چون

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) \, dx,$$

کافی است ثابت کنیم که

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx.$$

برای انتگرال طرف چپ، از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$\begin{array}{l} x = \pi - t, \\ dx = -dt, \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \hline \pi & 0 \\ \hline \end{array}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f[\sin(\pi - t)] dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx. \end{aligned}$$

۱۴-۵-۶ تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

حل. در انتگرال طرف چپ، از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{array}{l} x = \pi - t, \\ dx = -dt, \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 0 & \pi \\ \hline \pi & 0 \\ \hline \end{array}.$$

داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= - \int_{\pi}^0 (\pi - t) f[\sin(\pi - t)] dt = \\ &= \int_0^{\pi} \pi f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt. \end{aligned}$$

از آنجا

$$2 \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx,$$

۱۵-۵-۶ با استفاده از تساوی

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx,$$

ثابت کنید

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}} dx = \pi.$$

۱۶-۵-۶ ثابت کنید که اگر

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \\ + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

آنگاه

$$(a) \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx = \pi a_0; \quad (b) \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos kx dx = \pi a_k;$$

$$(c) \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin kx dx = \pi b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

۶-۶ انتگرالگیری بروش جزء بجزء - دستوره‌های کاهش

اگر u و v توابعی از x باشند و مشتقهای پیوسته‌ای داشته باشند، آنگاه

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

و یا بطور خلاصه

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

۱-۶-۶ مطلوب است محاسبه

$$\int_0^1 x e^x dx.$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x &= u, & e^x dx &= dv; \\ du &= dx, & v &= e^x, \end{aligned}$$

چون توابع $u = x$ و $v = e^x$ در فاصله $[0, 1]$ پیوسته‌اند و مشتقهای پیوسته دارند، لذا

روش جزء بجزء قابل اعمال است.

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1$$

۶-۶-۲ مطلوب است محاسبه

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx dx.$$

حل. فرض می کنیم:

$$\begin{aligned} u &= \sin bx, & dv &= e^{ax} dx; \\ du &= b \cos bx dx, & v &= \frac{1}{a} e^{ax}. \end{aligned}$$

چون توابع $u = \sin bx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$ در فاصله $[0, \pi]$ پیوسته اند و مشتقات پیوسته دارند، پس، از روش جزء بجزء استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx \Big|_0^{\frac{\pi}{b}} - \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx dx = \\ &= -\frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx dx = -\frac{b}{a} I_1. \end{aligned}$$

حال I_1 را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} u &= \cos bx, & dv &= e^{ax} dx, \\ du &= -b \sin bx dx, & v &= \frac{1}{a} e^{ax}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= -\frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx \Big|_0^{\frac{\pi}{b}} + \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx dx \right) = \\ &= -\frac{b}{a} \left(-\frac{e^{\frac{a\pi}{b}}}{a} - \frac{1}{a} \right) - \frac{b^2}{a^2} I = \frac{b \left(e^{\frac{a\pi}{b}} + 1 \right)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} I. \end{aligned}$$

پس

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} I = \frac{b \left(e^{\frac{a\pi}{b}} + 1 \right)}{a^2}, \quad I = \frac{b \left(e^{\frac{a\pi}{b}} + 1 \right)}{a^2 + b^2}.$$

بویژه اگر $a=b=1$ داریم:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} (e^{\pi} + 1).$$

۶-۶-۳ مطلوب است محاسبه

$$\int_1^e \ln^3 x \, dx.$$

جواب: $6-2e$

۶-۶-۴ مطلوب است محاسبه

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} \, dx.$$

حل. نخست تغییر متغیر زیر را بکار می‌بریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= t, \\ x &= t^2, \\ dx &= 2t \, dt, \end{aligned}$$

x	t
0	0
$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

از آنجا

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt.$$

انتگرال اخیر را بروش جزء بجزء حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t &= u; & \sin t \, dt &= dv; \\ du &= dt; & v &= -\cos t. \end{aligned}$$

بنابراین

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt = 2 \left[-t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \right] = 2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

۶-۶-۵ مطلوب است محاسبه

$$I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} \, dx.$$

جواب: $\pi \sqrt{2} - 4$

۶-۶-۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx.$$

جواب: $\pi - 2$

۶-۶-۷ انتگرال

$$I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n \, dx$$

را حساب کنید. n عدد طبیعی است.

حل. می توان انتگرال را با بسط عبارت $(a^2 - x^2)^n$ ، براساس دو جمله ای نیوتن حل کرد، ولی این روشی خسته کننده و کُند است. آن را، با استفاده از فرمول کاهش، با تبدیل I_n به I_{n-1} حل می کنیم و به صورت زیر عمل می کنیم:

$$I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^{n-1} (a^2 - x^2) \, dx = a^2 I_{n-1} - \int_0^a x (a^2 - x^2)^{n-1} x \, dx$$

انتگرال آخری را بروش جزء بجزء حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} u &= x; & (a^2 - x^2)^{n-1} x \, dx &= dv, \\ du &= dx; & v &= -\frac{1}{2n} (a^2 - x^2)^n \quad (n \neq 0). \end{aligned}$$

از آنجا داریم:

$$I_n = a^2 I_{n-1} + \frac{1}{2n} x (a^2 - x^2)^n \Big|_0^a - \frac{1}{2n} \int_0^a (a^2 - x^2)^n \, dx = a^2 I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n.$$

و یا

$$I_n = a^2 \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

این فرمول به ازای تمام مقادیر حقیقی n ، بجز ۰ و $-\frac{1}{2}$ معتبر است. بویژه، وقتی n عددی طبیعی باشد، داریم:

$$I_0 = \int_0^a dx = a,$$

از آنجا

$$I_n = a^{2n+1} \frac{2n(2n-2)(2n-4) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3} = a^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

که در آن

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n),$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1).$$

۸-۶-۶ با استفاده از نتیجه مسئله قبل، دستور زیر را ثابت کنید:

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

که C_n^k ضرایب دو جمله‌ای نیوتن هستند.

حل. انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

انتگران را یکمک دستور دو جمله‌ای بسط داده و از آن در فاصله‌های از ۰ تا ۱ انتگرالگیری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \\ &= \int_0^1 (1 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - C_n^3 x^6 + \dots + (-1)^n C_n^n x^{2n}) dx = \\ &= \left[x - \frac{C_n^1 x^3}{3} + \frac{C_n^2 x^5}{5} - \frac{C_n^3 x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \\ &= 1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}, \end{aligned}$$

۹-۶-۶ مطلوبست محاسبه

$$H_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$$

(m عددی طبیعی است)

حل. تغییر متغیر

$$\begin{aligned} \sin x &= t, \\ \cos x dx &= dt, \end{aligned}$$

x	t
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1

$$H_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cos x \, dx = \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{m-1}{2}} dt,$$

را به انتگرالی که در مسئله (۷-۶-۶) به ازای $n = \frac{m-1}{2}$ و $a = 1$ دیدیم، تبدیل می کند. از آن، دستور کاهش زیر حاصل می شود:

$$H_m = \frac{m-1}{m} H_{m-2} \quad (m \neq 0, m \neq 1)$$

چون

$$H_m = I_{\frac{m-1}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{m-1}{2}}{2 \cdot \frac{m-1}{2} + 1} I_{\frac{m-1}{2} - 1} = \frac{m-1}{m} I_{\frac{m-3}{2}} = \frac{m-1}{m} H_{m-2}.$$

پس اگر m فرد باشد، دستور کاهش H_m را به انتگرال زیر تبدیل می کند:

$$H_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1,$$

بنابراین

$$H_m = \frac{(m-1)!!}{m!!}.$$

اگر m عددی زوج باشد انتگرال H_m به انتگرال زیر تبدیل می شود:

$$H_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

پس

$$H_m = \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2}.$$

۶-۶-۱۰ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_0^{\pi} x \sin^m x \, dx$$

(m عددی طبیعی است).

حل. براساس نتایج مسائل ۶-۵-۱۴ و ۶-۵-۱۳ داریم:

$$I = \int_0^{\pi} x \sin^m x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx,$$

با استفاده از مسئله ۹-۶-۶ داریم:

$$I = \int_0^{\pi} x \sin^m x \, dx = \begin{cases} \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \text{ زوج است} \\ \pi \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \text{ فرد است} \end{cases}$$

۱۱-۶-۶ مطلوب است محاسبه

$$I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx$$

($m > 0$ و n عددی طبیعی است)

حل. قبل از هر چیز توجه داریم با اینکه تابع $f(x) = x^m (\ln x)^n$ در $x=0$ بی معنی است ولی می توان در فاصله $[0, 1]$ با فرض $f(0) = 0$ به ازای هر $m > 0$ و $n > 0$ آن را پیوسته کرد. در واقع

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^m (\ln x)^n = \lim_{x \rightarrow +0} \left(x^{\frac{m}{n}} \ln x \right)^n = 0$$

(مسئله 3.2.4 از جلد اول را ببینید).

بنابراین، در حالت خاص به ازای $m > 0$, $n > 0$ انتگرال I_n وجود دارد. برای محاسبه آن از روش جزء بجزء استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} u &= (\ln x)^n, & dv &= x^m \, dx, \\ du &= \frac{n (\ln x)^{n-1}}{x} \, dx, & v &= \frac{x^{m+1}}{m+1}. \end{aligned}$$

$$I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} \, dx = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}.$$

اگر n عددی طبیعی باشد، داریم:

$$I_0 = \int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1},$$

بالاخره

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

۱۲-۶-۶ مطلوب است محاسبه

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx,$$

که در آن n و m اعداد صحیح نامنفی هستند.

حل. فرض می‌کنیم،

$$(1-x)^n = u; \quad x^m dx = dv;$$

$$du = -n(1-x)^{n-1} dx; \quad v = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

در این صورت

$$I_{m,n} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} (1-x)^n \right]_0^1 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{n}{m+1} I_{m+1, n-1}.$$

این رابطه به ازای هر $m > -1$ و $n > 0$ معتبر است. اگر n عددی صحیح و مثبت باشد، آنگاه بعد از n بار استفاده از رابطه فوق، نتیجه می‌شود:

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1, n-1} = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)} I_{m+2, n-2} = \dots$$

$$\dots = \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)} I_{m+n, 0}.$$

ولی

$$I_{m+n, 0} = \int_0^1 x^{m+n} dx = \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+n+1}.$$

بنابراین

$$I_{m,n} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)(m+n+1)}.$$

این رابطه با شرط نامنفی بودن m ، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

۱۳-۶-۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

(a) $\int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx;$

(b) $\int_0^1 (x-1)e^{-x} dx;$

(c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x};$

(d) $\int_0^1 x \arctan x dx;$

(e) $\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx;$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx;$

$$(g) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \arctan(\sin x) dx; \quad (h) \int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x}-1} dx.$$

جواب:

$$(a) \sqrt{2} \quad (b) -\frac{1}{e}; \quad (c) \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9} \pi + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}; \quad (d) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}; \quad (e) \ln 2 - \frac{1}{2};$$

$$(f) \ln \frac{2}{8}; \quad (g) \frac{\pi}{2} - 1; \quad (h) \frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$$

۱۴-۶-۶ ثابت کنید

$$\int_0^1 (\arccos x)^n dx = n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} - n(n-1) \int_0^1 (\arccos x)^{n-2} dx \quad (n > 1).$$

۱۵-۶-۶ اگر $f''(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد. درستی رابطه زیر را

ثابت کنید:

$$\int_a^b x f''(x) dx = [b f'(b) - f(b)] - [a f'(a) - f(a)].$$

۷-۶ محاسبه مقدار تقریبی انتگرالهای معین

۱. دستور ذوزنقه‌ای: فاصله $[a, b]$ را بوسیله نقاط $x_k = a + kh$ به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که در آن

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

و دستور زیر را بکار می‌بریم:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right].$$

 R مقدار خطا به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$|R| \leq \frac{M_2 (b-a)^3}{12n^2}, \quad M_2 = \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

(فرض می کنیم که مشتق مرتبه دوم کراندار است).

۲. دستور سیمپسون^۱: فاصله $[a, b]$ را بوسیله نقاط $x_k = a + kh$ به $2n$ فاصله مساوی تقسیم می کنیم که در آن $h = \frac{b-a}{2n}$ ، و در نهایت، دستور زیر را بکار می بریم:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \{f(x_0) + f(x_{2n}) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})]\}.$$

فرض می کنیم $f^{IV}(x)$ ، موجود و کراندار است، خطای محاسبه به صورت زیر برآورد می شود:

$$|R| \leq \frac{M_4 (b-a)^5}{180 (2n)^4}, \quad M_4 = \sup_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|.$$

۱-۷-۶ با استفاده از دستور ذوزنقه ای که $n = 10$ ، مقدار تقریبی انتگرال

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

را حساب کنید:

حل. جدول زیر مقادیر مختلف تابع را با چهار رقم اعشار نشان می دهد:

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, 10)$$

x_i	$1+x_i$	$y_i = \frac{1}{1+x_i}$	x_i	$1+x_i$	$y_i = \frac{1}{1+x_i}$
0.0000	1.0000	1.0000	0.6000	1.6000	0.6250
0.1000	1.1000	0.9091	0.7000	1.7000	0.5882
0.2000	1.2000	0.8333	0.8000	1.8000	0.5556
0.3000	1.3000	0.7692	0.9000	1.9000	0.5263
0.4000	1.4000	0.7143	1.0000	2.0000	0.5000
0.5000	1.5000	0.6667			

با استفاده از دستور دوزنقه‌ای داریم:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10} \left(\frac{1.0000 + 0.5000}{2} + 0.9091 + 0.8333 + \right. \\ \left. + 0.7692 + 0.7143 + 0.6667 + 0.6250 + 0.5882 + 0.5556 + \right. \\ \left. + 0.5263 \right) = \frac{1}{10} \cdot 6.9377 = 0.69377 \approx 0.6938.$$

برای تعیین خطای نتیجه بدست آمده، مشتق مرتبه دوم را حساب می‌کنیم

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

چون $0 \leq x \leq 1$ پس $|f''(x)| \leq 2$. در نتیجه می‌توانیم به جای M_2 عدد ۲ را قرار دهیم، بنابراین

$$|R| \leq \frac{2}{12 \times 10^3} = \frac{1}{600} < 0.0017.$$

عرضها را بادقت چهار رقم اعشار حساب کردیم، و خطای ناشی از گرد کردن

کمتر از

$$\frac{0.00005}{10} (1 + 9 \times 1) = 0.00005$$

است. (بادقت بیشتر، $\frac{0.00005}{10} \cdot 9 = 0.000045$ ، زیرا y_{10} و y_0 اعداد دقیق هستند). پس، کل خطای ناشی از دستور دوزنقه‌ای و گرد کردن مقادیر عرضها، کمتر از ۰/۰۰۱۸ است.

توجه داریم که مقدار انتگرال مفروض با دستور نیوتن — لایبنیتز چنین است

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0.69315.$$

بنابراین، خطای نتیجه بدست آمده کمتر از ۰/۰۰۰۷ است، یعنی، نتیجه‌ها با دقت سه رقم اعشار بدست آمده است.

۲-۷-۶ با دستور سیمپسون مقدار تقریبی انتگرال

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{e^{0.1x}}{x} dx$$

را بادقت چهار رقم اعشار حساب کنید.

حل. برای دقت بیشتر، $2n$ مقدار تابع را حساب می‌کنیم و مشتق چهارم یعنی $f^{IV}(x)$ را بدست می‌آوریم که بعد از محاسبه مشتقات متوالی از $f(x) = \frac{e^{0.1x}}{x}$ داریم:

$$f^{IV}(x) = \frac{e^{0.1x}}{x^6} (0.0001x^4 - 0.004x^3 + 0.12x^2 - 2.4x + 24) = \frac{P(x)}{x^6} e^{0.1x},$$

که $P(x)$ چند جمله‌ای داخل پرانتز است. در فاصله $[0.5, 1.5]$ تابع $\varphi(x) = e^{0.1x}$ صعودی است و بیشترین مقدار تابع به ازای $x = 1.5$ بوده و مقدار ماکزیمم تابع برابر است با $\varphi(1.5) = e^{0.15} < 1.2$. می‌توان تقریب اضافی قدر مطلق نسبت $P(x)$ به x^6 را، با جمع قدر مطلق جملات آن حساب کرد. بیشترین مقدار هر جمعوند به ازای $x = 0.5$ بدست می‌آید، بنابر این

$$\left| \frac{P(x)}{x^6} \right| < \frac{0.0001}{x} + \frac{0.004}{x^2} + \frac{0.12}{x^3} + \frac{2.4}{x^4} + \frac{24}{x^5} \leqslant \leqslant 0.0002 + 0.016 + 0.96 + 38.4 + 768 < 808.$$

و از آنجا $|f^{IV}(x)| < 1.2 \times 808 < 1000$ ، پس M_4 را می‌توان ۱۰۰۰ در نظر گرفت. چون می‌خواهیم مقدار انتگرال را با دقت چهارم اعشاری حساب بکنیم، لذا ضروری است که مجموع خطای محاسبات و خطای گرد کردن نهایی از 0.0001 تجاوز نکند. برای این منظور $2n$ مقدار را در نظر می‌گیریم (طول فاصله جزء را با h نشان می‌دهیم) به طوری که نامساوی

$$|R| < \frac{1}{2} \cdot 0.0001 = 5 \cdot 10^{-5}$$

برقرار باشد. از حل نامساوی

$$\frac{1^5 \times 1000}{180 (2n)^4} < 5 \times 10^{-5},$$

$$2n > 19.$$

داریم.

فرض می‌کنیم $2n = 20$ در این صورت مقدار h برابر است با

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{20} = 0.05$$

اگر دقت بیشتری در محاسبه داشته باشیم، وقتی $2n = 20$ ، داریم:

$$|R| < 3.5 \times 10^{-5}$$

اگر y_i را با پنج رقم اعشار حساب بکنیم یعنی خطا از 10^{-5} تجاوز نکند،

آنگاه خطای بعد از آخرین گرد کردن بزرگتر از 10^{-5} نمی شود بنابراین کل خطا کمتر از

$$4.5 \times 10^{-5} < 0.0001$$

است.

حال جدول مقادیر تابع $y = \frac{e^{0.1x}}{x}$ را برای مقادیر x از 0.5 تا 1.5 با $h = 0.05$ تنظیم می کنیم. محاسبه با پنج رقم اعشار انجام گرفته است.

i	x_i	$0.1x_i$	$e^{0.1x_i}$	y_i
0	0.50	0.050	1.05127	2.10254
1	0.55	0.055	1.05654	1.92098
2	0.60	0.060	1.06184	1.76973
3	0.65	0.065	1.06716	1.64178
4	0.70	0.070	1.07251	1.53216
5	0.75	0.075	1.07788	1.43717
6	0.80	0.080	1.08329	1.35411
7	0.85	0.085	1.08872	1.28085
8	0.90	0.090	1.09417	1.21574
9	0.95	0.095	1.09966	1.15754
10	1.00	0.100	1.10517	1.10517
11	1.05	0.105	1.11071	1.05782
12	1.10	0.110	1.11628	1.01480
13	1.15	0.115	1.12187	0.97554
14	1.20	0.120	1.12750	0.93958
15	1.25	0.125	1.13315	0.90652
16	1.30	0.130	1.13883	0.87602
17	1.35	0.135	1.14454	0.84781
18	1.40	0.140	1.15027	0.82162
19	1.45	0.145	1.15604	0.79727
20	1.50	0.150	1.16183	0.77455

برای بررسی شهودی، جدول اطلاعات را جهت تنظیم جدول زیر بکار می بریم:

i	x_i	y_i		
		در $t=0$ و $t=20$	برای i فرد	برای i زوج
0	0.50	2.10254		
1	0.55		1.92098	
2	0.60			1.76973
3	0.65		1.64178	
4	0.70			1.53216
5	0.75		1.43717	
6	0.80			1.35411
7	0.85		1.28085	
8	0.90			1.21574
9	0.95		1.15754	
10	1.00			1.10517
11	1.05		1.05782	
12	1.10			1.01480
13	1.15		0.97554	
14	1.20			0.93958
15	1.25		0.90652	
16	1.30			0.87602
17	1.35		0.84781	
18	1.40			0.82162
19	1.45		0.79727	
20	1.50	0.77455		
	Sums	2.87709	12.02328	10.62893

با استفاده از دستور سیمپسون داریم:

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{e^{0.1x}}{x} dx \approx \frac{1}{60} (2.87709 + 4 \times 12.02328 +$$

$$+ 2 \times 10.62893) = \frac{1}{60} \cdot 72.22807 = 1.2038.$$

۳-۷-۶ رودخانه ای ۲۶ متر عرض دارد. جدول زیر اعماق متوالی آن را در طول

یک مقطع در فاصله های ۲ متری نشان می دهد.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
y	0.3	0.9	1.7	2.1	2.8	3.4	3.3	3.0	3.5	2.9	1.7	1.2	0.8	0.6

در اینجا فاصله را با x و عمق متناظر آن را با y (با واحد متر) نشان می دهیم. آهنگ (یا نرخ) متوسط جریان آب $\frac{1}{3}$ متر بر ثانیه است، مطلوب است محاسبه Q ، مقدار آبی که در یک ثانیه در رودخانه جریان پیدا می کند.

حل . S مساحت سطح مقطع را بکمک دستور ذوزنقه ای حساب می کنیم :

$$S = \int_0^{26} y dx \approx 2 \left[\frac{1}{2} (0.3 + 0.6) + 0.9 + 1.7 + 2.1 + 2.8 + 3.4 + \right. \\ \left. + 3.3 + 3.0 + 3.5 + 2.9 + 1.7 + 1.2 + 0.8 \right] = 55.5 \text{ (m}^2\text{)}.$$

بنابراین

$$Q = 55.5 \times 1.3 \approx 72 \text{ (m}^3\text{/sec)}.$$

در این حالت برآورد دقیق خطا غیر ممکن است، با بعضی روشهای غیر مستقیم
 قادریم خطای تقریبی را بدست آوریم. خطای S برابر ۳ متر مربع است، بنابراین،
 خطای Q برابر ۴ متر مکعب در ثانیه می شود.

۴-۷-۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید :

(الف) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ را با دستور سیمپسون و با دقت سه رقم اعشار.

(ب) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ را با دستور ذوزنقه ای و با دقت سه رقم اعشار.

جواب:

(الف) ۰/۶۰۱ راهنمایی: برای تخمین $|f^{(4)}(x)|$ در فاصله $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ فرض

کنید $2n=6$ (ب) ۰/۷۴۶۲

۵-۷-۶ بوسیله دستور سیمپسون مقدار تقریبی

$$I = \int_{1.05}^{1.36} f(x) dx,$$

را تعیین کنید که انتگران با جدول زیر تعریف می شود:

جواب: ۰/۹۶

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.6

۸-۶ تمرینهای اضافی

۸-۶-۱ تابع زیر مفروض است:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & 1 < x \leq 2, \\ (2-x)^2 & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

مستقیماً نشان دهید که تابع

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

در فاصله $[0, 3]$ پیوسته است و مشتق آن در نقاط داخلی موجود و برابر $f(x)$ است.

جواب:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x-x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2, \\ \frac{(x-2)^3}{3} + \frac{1}{2} & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

پیوستگی آن مستقیماً بررسی می شود. برای برابری مشتق با تابع $f(x)$ کافی است، فقط در نقاط $x=1$ ، $x=2$ تحقیق شود.

۸-۶-۲ نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x} & 0 < x < 1, \\ 0 & x=0 \\ -1 & x=1 \end{cases}$$

در فاصله $[0, 1]$ انتگرالپذیر است.

راهنمایی ثابت کنید که تابع $f(x)$ در فاصله $(0, 1)$ و در نقاط انتهائی

فاصله، پیوسته است $(\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0))$ و $(\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1))$

۸-۶-۳ آیا می توان ادعا کرد که اگر قدر مطلق تابعی در فاصله $[a, b]$

انتگرالپذیر باشد، آنگاه خود تابع در آن فاصله انتگرالپذیر است؟

جواب : خیر . برای مثال تابع زیر را در فاصله $[۰, ۱]$ در نظر بگیرید :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{گویاست } x \\ -1 & \text{اصم است. } x \end{cases}$$

۶-۸-۴ خط مماس به منحنی تابع $y = f(x)$ در نقاط $x=a$ و $x=b$

بترتیب زوایای $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ با محور x ها می سازد . مطلوب است محاسبه

$$\int_a^b f''(x) dx$$

اگر $f''(x)$ تابعی پیوسته باشد

جواب: $1 - \sqrt{3}$ راهنمایی: $\int_a^b f''(x) dx = f'(b) - f'(a)$

۶-۸-۵ ثابت کنید

$$\int_0^x E(x) dx = \frac{E(x)(E(x)-1)}{2} + E(x)[x - E(x)].$$

راهنمایی : فرض کنید که

$$E(x) = n \leq x < n+1,$$

وقتی طبق تعریف $x > 0$. آنگاه با توجه به خاصیت جمع پذیری انتگرال

$$\int_0^x E(x) dx = \int_0^1 E(x) dx + \int_1^2 E(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n E(x) dx + \int_n^x E(x) dx.$$

۶-۸-۶ انتگرال

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

مفروض است . تحقیق کنید که توابع

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\sqrt{2} \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \quad \text{و} \quad F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}}$$

توابع اولیه انتگرال هستند ، آیا می توان برای محاسبه انتگرال بوسیله دستور نیوتن — لایبنیتز از هر دو تابع اولیه استفاده کرد ؟ و گرنه ، از کدام یک از تابع اولیه ها می توان استفاده نمود .

جواب : با تابع $F_1(x)$ به جواب درست می رسم ، ولی با $F_2(x)$ نتیجه درستی

بدست نمی آید علت این امر منفصل بودن تابع دومی در فاصله $[0, \pi]$ است .

۶-۸-۷ تابع اولیه تابع $f(x)$ را طوری بیابید که وقتی $x = x_0$ ، داشته باشیم $y = y_0$ (مسئله کوشی)

جواب: $F(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$. راهنمایی: هر تابع اولیه $F(x)$ را می توان به صورت

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C$$

نشان داد. با فرض $x = x_0$ داریم $C = y_0$.

۶-۸-۸ به ازای چه مقداری از ξ تساوی

$$\int_a^b e^{2x} dx = e^{2\xi} (b-a)$$

برقرار است. نشان دهید

$$\xi > \frac{a+b}{2}.$$

جواب:

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2b} - e^{2a}}{2b - 2a}.$$

۶-۸-۹ تابع

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^4} dt$$

را بررسی نمائید.

جواب: تابع در فاصله $[-1, 1]$ معین، فرد و صعودی است و در فاصله $[0, 1]$ مقعر و در فاصله $[0, 1]$ محدب است و نقطه $(0, 0)$ نقطه عطف می باشد.
۶-۸-۱۰ درستی نامساویهای زیر را تحقیق کنید:

$$0.692 \leq \int_0^1 x^x dx \leq 1$$

راهنمایی: تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

تابعی پیوسته در $x = \frac{1}{e}$ ، کوچکترین مقدار $m = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0.692$ و در نقاط $x = 1$ و

$x=0$ بزرگترین مقدار $M=1$ را دارد.

۱۱-۸-۶. یکمک نامساوی $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$ نشان

دهید:

$$1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\pi}{2}.$$

راهنمایی: از نامساوی $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ انتگرال بگیرید.

۱۲-۸-۶. با استفاده از نامساوی $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} (x \geq 0)$ و نامساوی

«شوارتز-بونیا کفسکی» (۶-۳-۶) را ببینید) نشان دهید:

$$1.096 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \sin x} dx < 1.111.$$

راهنمایی: اول از نامساوی

$$\sqrt{x \sin x} > \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{6}} = x \sqrt{1 - \frac{x^2}{6}} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{6})$$

انتگرال بگیرید و سپس نامساوی «شوارتز-بونیا کفسکی» را بکار ببرید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \sin x} dx \leq \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

۱۳-۸-۶. توابع

$$p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$$

در فاصله $[a, b]$ انتگرالپذیرند. تابع $p_1(x)$ نامنفی است و توابع

$p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ در نامساوی

$$p_3(x) \leq p_2(x) \leq p_4(x).$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید

$$\int_a^b p_3(x) p_1(x) dx \leq \int_a^b p_2(x) p_1(x) dx \leq \int_a^b p_4(x) p_1(x) dx.$$

۱۴-۸-۶. تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ مثبت است. ثابت کنید

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

وقتی کوچکترین مقدار را دارد که فقط اگر $f(x)$ در این فاصله تابعی ثابت باشد.

راهنمایی: از نامساوی «شوارتز-بونیافسکی» به صورت زیر استفاده کنید:

$$\left[\int_a^b \sqrt{f(x) \cdot \frac{1}{f(x)}} dx \right]^2 \leq \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx.$$

۱۵-۸-۶ ثابت کنید

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} dt.$$

راهنمایی: از تغییر متغیر $x = \frac{t}{2}$ استفاده کنید.

۱۶-۸-۶ ثابت کنید که تابع اولیه یک تابع زوج، تابعی فرد است، و هر تابع

اولیه یک تابع فرد، تابعی زوج است.

راهنمایی: اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

تابعی فرد است، زیرا

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt = - \int_0^x f(-z) dz = -F(x) \quad (t = -z).$$

و اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

تابعی زوج است، زیرا

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt = - \int_0^x f(-z) dz = F(x) \quad (t = -z);$$

و تمام توابع اولیه به صورت $F(x) + C$ هستند، و بنابراین همگی زوج می باشند.

۶-۸-۱۷ ثابت کنید که اگر $f(x)$ تابعی پیوسته، متناوب با دوره تناوب T باشد، آنگاه

$$I = \int_a^{a+T} f(x) dx$$

مستقل از a است.

راهنمایی: مشتق از انتگرال نسبت به a برابر صفر است:

$$\frac{dI}{da} = f(a+T) - f(a) = 0$$

۶-۸-۱۸ ثابت کنید که اگر $u = u(x)$, $v = v(x)$ و مشتقات آنها تا مرتبه n ، در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشند، آنگاه

$$\int_a^b uv^{(n)} dx = [uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)}v] \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)} v dx.$$

فصل هفتم

کاربردهای انتگرال معین

۷-۱ محاسبه حد مجموع بکمک انتگرال معین

اغلب لازم است که حد مجموعی را حساب بکنیم که تعداد جملات آن به طور نامتناهی افزایش می یابند در بعضی حالات چنین حدهایی را می توان بکمک انتگرال معین حساب کرد، بشرط این که بتوان آن را به مجموع انتگرال تبدیل کرد. مثلاً نقاط

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

را در نظر می گیریم که فاصله $[0, 1]$ را به n فاصله مساوی به طول $\Delta x = \frac{1}{n}$ تقسیم می کنند برای هرتابع پیوسته $f(x)$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \int_0^1 f(x) dx.$$

۷-۱-۱ مطلوبیست محاسبه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$$

حل. جملات داخل کروشه، مقادیر تابع $f(x) = \sin x$ را در نقاط

$$x_1 = \frac{\pi}{n}; \quad x_2 = \frac{2\pi}{n}; \quad \dots; \quad x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n},$$

نشان می دهند. این نقاط فاصله $[0, \pi]$ را به n طول مساوی برابر $\Delta x = \frac{\pi}{n}$ تقسیم می کنند. بنابر این، اگر جمله $\sin \frac{n\pi}{n} = 0$ را به مجموع، اضافه نماییم، عبارت حاصل، مجموع انتگرال تابع $f(x) = \sin x$ در فاصله $[0, \pi]$ می شود. بنا به تعریف، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، حد چنین مجموع انتگرال، با مجموع انتگرال معین تابع $f(x) = \sin x$ از ۰ تا π می شود:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right) &= \\ &= \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2. \end{aligned}$$

۷-۱-۲ مطلوب است محاسبه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right).$$

حل. عبارت داخل پرانتز را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} &= \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right). \end{aligned}$$

عبارت مورد نظر مجموع انتگرال تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ در فاصله $[0, 1]$ است که به n فاصله مساوی تقسیم شده است. حد این عبارت وقتی $n \rightarrow \infty$ ، با انتگرال معین تابع از ۰ تا ۱ برابر است:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right) &= \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

۷-۱-۳ مطلوب است محاسبه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left[1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \sqrt{\frac{n}{n+9}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right].$$

حل. عبارت را بصورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{3}{n} \left[1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right] &= \\ = \frac{3}{n} \left[\sqrt{\frac{1}{1+0}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}} \right]. \end{aligned}$$

این عبارت مجموع انتگرال تابع $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x}}$ در فاصله $[0, 3]$ است، بنابر این، بنا به تعریف داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right) &= \\ = \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{1+x}} dx = \int_0^3 (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \sqrt{1+x} \Big|_0^3 = 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

۷-۱-۴ یکمک انتگرال معین، حدهای زیر را حساب کنید:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$;
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$;
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$;
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right)$;
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right]$.

جواب:

(a) $\ln 2$; (b) $\frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$; (c) $\frac{3}{4}$; (d) 1; (e) $\frac{1}{2}$.

۷-۱-۵ مطلوب است محاسبه

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

حل. با استفاده از لگاریتم داریم:

$$\ln A = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n \right].$$

عبارت داخل کروشه، مجموع انتگرال، انتگرال زیر است:

$$\int_0^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1.$$

در نتیجه

$$\ln A = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

۷-۲ محاسبه مقادیر متوسط توابع

مقدار متوسط تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ عدد

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

است. مقدار

$$\left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

را که مقدار متوسط مربع تابع است، مربع میانی ریشه تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ گویند.

۷-۲-۱ مطلوب است تعیین μ ، مقدار متوسط تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در فاصله $[0, 1]$.

حل. در این حالت داریم

$$\mu = \frac{1}{1-0} \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

۷-۲-۲ مقدار متوسط هریک از توابع زیر را تعیین کنید:

(a) $f(x) = \sin^2 x$ ، فاصله $[0, 2\pi]$

(b) $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ، فاصله $[0, 2]$

جواب:

$$(a) \frac{1}{2} \quad (b) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{e+1} \approx 0.283.$$

۷-۲-۳ طول متوسط وترهای قائم هذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ را در فاصله

$a \leq x \leq 2a$ تعیین نمایید.

حل. مسئله عبارت است از تعیین مقدار متوسط تابع

$$f(x) = 2y = 2 \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{در فاصله } [a, 2a].$$

$$\begin{aligned}\mu &= 2 \frac{1}{a} \int_a^{2a} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx = \\ &= \frac{2b}{a^2} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right]_a^{2a} = b [2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})]\end{aligned}$$

۷-۲-۴ مقدار متوسط تابع سینوسی $y = \sin x$ را در فاصله $[0, \pi]$ تعیین کنید.

حل -

$$\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637.$$

نتیجه را به صورت زیر می نویسیم:

$$\mu \cdot \pi = \frac{2}{\pi} \cdot \pi = \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

با استفاده از مفهوم هندسی انتگرال معین، می توان گفت که مساحت مستطیلی با ابعاد μ و π با مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = \sin x$ و محور x ها در فاصله $0 \leq x \leq \pi$ ، برابر است.

۷-۲-۵ مطلوب است تعیین مقدار متوسط تمام y های مثبت دایره

$$x^2 + y^2 = 1.$$

جواب: $\frac{\pi}{4}$

۷-۲-۶ نشان دهید که مقدار متوسط تابع پیوسته $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ ، حد واسطه حسابی مقادیر این تابع است، که این مقادیر از فاصله های جزء مساوی از متغیر x به دست آمده اند.

حل فاصله $[a, b]$ را به n فاصله جزء مساوی به وسیله نقاط

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

تقسیم می کنیم. واسطه حسابی مقادیر تابع $f(x)$ در n نقطه تقسیم کننده $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\mu_n = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

این عبارت را به شکل زیر می نویسیم:

$$\mu_n = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i,$$

که در آن

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}.$$

مجموع آخری، مجموع انتگرال تابع $f(x)$ است. پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu,$$

۷-۲-۷ مقدار متوسط فشار (p_m) را که از ۲ تا ۱۰ اتمسفر تغییر می کند، بیابید. در صورتی که فشار (p) و حجم (v) در رابطه زیر صدق می کنند

$$pv^{\frac{3}{2}} = 160.$$

حل. وقتی p از ۲ تا ۱۰ اتمسفر تغییر می کند، فاصله

$$[4\sqrt[3]{4}, 4\sqrt[3]{100}]$$

را می پیماید، پس

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{1}{4(\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{4})} \int_{4\sqrt[3]{4}}^{4\sqrt[3]{100}} 160v^{-\frac{3}{2}} dv = \\ &= -\frac{320}{4(\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{4})} v^{-\frac{1}{2}} \Big|_{4\sqrt[3]{4}}^{4\sqrt[3]{100}} = \frac{40}{\sqrt[3]{20}(\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2})} \approx 4.32 \text{ atm.} \end{aligned}$$

۷-۲-۸ در هیدرولیک فرمول Bazin، v ، سرعت آب را در یک نقطه از یک کانال پهن با مقطع چهار گوش بر حسب عمق آن نقطه نسبت به سطح آزاد آب، یعنی، h به صورت زیر بیان می کند:

$$v = v_0 - 20\sqrt{HL} \left(\frac{h}{H}\right)^2,$$

که در این رابطه v_0 سرعت آب در سطح آزاد، H عمق کانال و L شیب کانال است. سرعت متوسط جریان آب در سطح آزاد، یعنی v_m را در مقطع کانال به دست آورید.

حل. داریم:

$$v_m = \frac{1}{H} \int_0^H \left[v_0 - 20\sqrt{HL} \left(\frac{h}{H}\right)^2 \right] dh = v_0 - \frac{20}{3}\sqrt{HL}.$$

۷-۲-۹ مقدار نیروی محرکه متوسط E_m را در فاصله زمانی تناوب T معین کنید، یا به عبارت دیگر در فاصله زمانی $t=0$ تا $t=T$ حساب کنید، بشرطی که نیروی محرکه با فرمول زیر محاسبه گردد.

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

در اینجا T زمان تناوب برحسب ثانیه، E_0 دامنه (مقدار بیشینه) نیروی محرکه و متناظر با زمان $t=0.25T$ است. کسر $\frac{2\pi t}{T}$ فاز نامیده می شود.

حل.

$$E_m = \frac{E_0}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{E_0 T}{T \cdot 2\pi} \left[-\cos \frac{2\pi t}{T} \right]_0^T = 0.$$

پس مقدار متوسط نیروی محرکه در فاصله یک زمان تناوب برابر صفر است.

۷-۲-۱۰ بر روی دو میله قائم OA و CD که به فاصله d از هم قرار دارند، یک لامپ الکتریکی با شدت روشنائی i به ارتفاع h نصب کرده ایم. روشنائی متوسط بر روی خط مستقیم OC را که پایه دو میله را بهم وصل می کند، بیابید.

$$\text{جواب: } \frac{2i}{h \sqrt{d^2 + h^2}}$$

۷-۲-۱۱ مقدار متوسط مربع نیروی محرکه $(E^2)_m$ را در فاصله زمانی $t=0$ تا $t=\frac{T}{2}$ حساب کنید (مسئله ۷-۲-۹ را ببینید).

حل. چون

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

داریم

$$\begin{aligned} (E^2)_m &= \frac{2}{T} E_0^2 \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{2}{T} E_0^2 \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos \frac{4\pi t}{T}}{2} dt = \\ &= \frac{E_0^2}{T} \left[t - \frac{T}{4\pi} \sin \frac{4\pi t}{T} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{E_0^2}{2}. \end{aligned}$$

۷-۲-۱۲ اگر تابع $f(x)$ در فاصله نامتناهی $[0, \infty)$ تعریف شده باشد، آنگاه مقدار متوسط آن چنین است:

$$\mu = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx$$

اگر این حد وجود داشته باشد، توان متوسط مصرفی یک مدار جریان متناوب را به دست

آورید در صورتیکه شدت جریان I و اختلاف پتانسیل u بترتیب با فرمولهای زیر تعریف شده باشند

$$I = I_0 \cos(\omega t + \alpha);$$

$$u = u_0 \cos(\omega t + \alpha + \varphi)$$

در اینجا φ اختلاف فاز ثابت بین شدت جریان و اختلاف پتانسیل است (پارامترهای ω و α در رابطه توان متوسط ظاهر نخواهند شد).
حل. توان مصرفی متوسط

$$w_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \cos(\omega t + \alpha) u_0 \cos(\omega t + \alpha + \varphi) dt.$$

با استفاده از

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$

برابر است با

$$w_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0 u_0}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + 2\alpha + \varphi) + \cos \varphi] dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{I_0 u_0}{4\omega} \cdot \frac{\sin(2\omega T + 2\alpha + \varphi) - \sin(2\alpha + \varphi)}{T} + \frac{I_0 u_0}{2} \cos \varphi \right\} = \frac{I_0 u_0}{2} \cos \varphi.$$

از این رو کاملاً واضح است که چرا در مهندسی برق کمیت $\cos \varphi$ اهمیت زیادی دارد.

۷-۲-۱۳ مقدار متوسط μ تابع $f(x)$ را در فاصله‌های داده شده حساب کنید:

(a) $f(x) = 2x^2 + 1$ ، در فاصله $[0, 1]$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ ، در فاصله $[1, 2]$

(c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ ، در فاصله $[0, 2]$

جواب:

(a) $\mu = \frac{5}{3}$; (b) $\mu = \ln 2$; (c) $\mu = \frac{8}{\ln 3} + 2$.

۷-۲-۱۴ جسمی از حالت سکون به طرف زمین سقوط می کند سرعت آن پس از طی مسافت $s = s_1$ به $v_1 = \sqrt{2gs_1}$ می رسد. نشان دهید سرعت متوسط v_m در این مسیر برابر $\frac{2v_1}{3}$ است.

۷-۲-۱۵ مقطع یک ظرف (تغار) به شکل قسمتی از سهمی است. قاعده ظرف

a و ارتفاع آن h است. ارتفاع متوسط این ظرف را تعیین کنید. جواب: $\frac{2h}{3}$

۷-۲-۱۶ مقدار متوسط شدت جریان متناوب I_m را در فاصله زمانی

۰ و $\frac{\pi}{\omega}$ حساب کنید (مسئله ۷-۲-۱۲ را ببینید). جواب: $\frac{2I_0}{\pi}$

۷-۲-۱۷ ثابت کنید مقدار متوسط شعاعهای کانونی بیضی $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$

برابر b است که در آن $p = \frac{b^2}{a}$ و a, b نیمقطرهای بیضی و ε خروج از مرکز آن است.

۷-۲-۱۸ روی پاره خط AB به طول a ، نقطه p بفاصله x از A

انتخاب شده است. نشان دهید که مقدار متوسط مساحت مستطیل‌های به ابعاد AP و PB برابر $\frac{a^2}{6}$ است.

۷-۲-۱۹ مقدار متوسط تابع

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$$

را در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ حساب کنید. مستقیماً تحقیق کنید که مقدار متوسط این تابع که با

$\frac{1}{6}$ برابر است، با مقداری از تابع $f(x)$ در نقطه معین $x = \frac{\pi}{6}$ که در فاصله مفروض واقع است، مساوی می باشد.

۷-۳ محاسبه مساحت در مختصات قائم

اگر ناحیه مسطح به خطوط $x=a, x=b (a < b)$ و منحنیهای

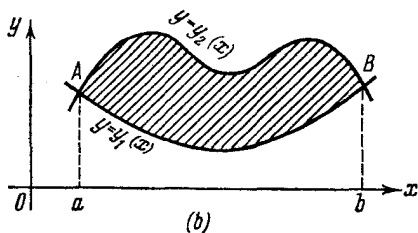
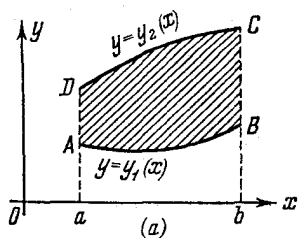
$y=y_1(x), y=y_2(x)$ با شرط $y_1(x) \leq y_2(x) (a \leq x \leq b)$ محدود شود، آنگاه

مساحت این ناحیه از دستور زیر حساب می شود:

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

بعضی مواقع مرز چپ $x=a$ (یا مرز راست $x=b$) می تواند محل تلاقی

منحنیهای $y=y_1(x)$ و $y=y_2(x)$ باشد. پس a و b طولهای نقاط تلاقی منحنیها



هستند (شکل ۶۶، a, b).

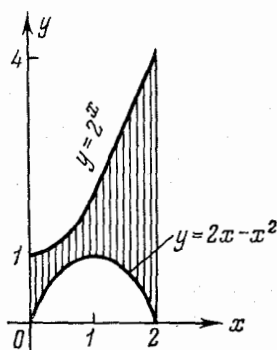
۷-۳-۱ مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به خطوط

$x=0, x=2$ و منحنیهای $y=2x, y=2x-x^2$ (شکل ۶۷)

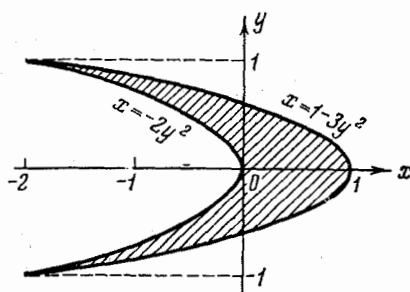
حل. چون ماکزیم تابع $y=2x-x^2$ در نقطه $x=1$ برابر یک است و در فاصله

$[0, 2]$ داریم $y=2x \geq 1$ پس

$$S = \int_0^2 [2x - (2x - x^2)] dx = \frac{2x}{\ln 2} \Big|_0^2 - \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$



شکل ۶۷



شکل ۶۸

۷-۳-۲ مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به سهمی های

$x=-2y^2, x=1-3y^2$ (شکل ۶۸)

حل. دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x = 2y^2; \\ x = 1 - 3y^2, \end{cases}$$

را حل می کنیم، داریم $y_1 = -1, y_2 = 1$. چون وقتی $-1 \leq y \leq 1$

آنگاه $1 - 3y^2 \geq -2y^2$ پس

$$S = \int_{-1}^1 [(1 - 3y^2) - (-2y^2)] dy = 2 \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

۷-۳-۳ مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به سهمی $x^2=4y$ و

منحنی $y = \frac{8}{x^2+4}$ (شکل ۶۹).

حل. طول نقاط A و C را که نقاط تلاقی منحنیها هستند، تعیین می کنیم.

برای این منظور y را در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} y = \frac{8}{x^2+4} \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

حذف می کنیم، داریم $\frac{8}{x^2+4} = \frac{x^2}{4}$ یا $x^4 + 4x^2 - 32 = 0$ ، ریشه های حقیقی این معادله $x_1 = -2$ و $x_2 = 2$ هستند. طوری که در شکل مشاهده می شود در فاصله

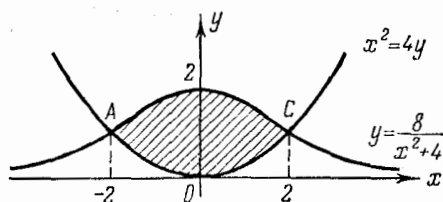
$[-2, 2]$ داریم

$$\frac{8}{x^2+4} \geq \frac{x^2}{4}$$

(البته می توانیم برای این کار مقادیر دو تابع را به ازای نقطه ای از فاصله مانند $x=0$ حساب نمائیم، هر کدام از مقادیر بیشتر باشد، تابع متناظر آن بزرگتر است).

در نتیجه

$$S = \int_{-2}^2 \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left(4 \arctan \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_{-2}^2 = 2\pi - \frac{4}{3}.$$



شکل ۶۹

۴-۳-۷ مساحت ناحیه محدود به سهمی $y = x^2 + 1$ و خط $x + y = 3$ را

حساب نمائید.

جواب: $\frac{35}{6}$

۵-۳-۷ مساحت قسمتی از ربع اول را که داخل دایره $x^2 + y^2 = 3a^2$ و

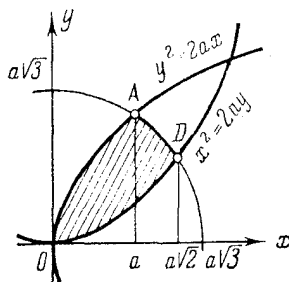
محدود به سهمی های $y^2 = 2ax$ و $x^2 = 2ay$ ($a > 0$) می باشد، حساب کنید.

(شکل ۷۰)

حل. طول نقطه A محل تلاقی سهمی $y^2 = 2ax$ و دایره $x^2 + y^2 = 3a^2$ را

به دست می آوریم. برای این منظور y را در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2, \\ y^2 = 2ax, \end{cases}$$



(شکل ۷۰)

حذف می کنیم. از آنجا $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$ و بالاخره ریشه مثبت $x_A = a$ حاصل می شود. به طور مشابه طول نقطه D محل تلاقی دایره $x^2 + y^2 = 3a^2$ و سهمی $x^2 = 2ay$ را به دست می آوریم که $x_D = a\sqrt{2}$ است. مساحت برابر است با:

$$S = \int_0^{a\sqrt{2}} [y_2(x) - y_1(x)] dx,$$

که در آن

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2a}, \quad y_2(x) = \begin{cases} \sqrt{2ax} & 0 \leq x \leq a, \\ \sqrt{3a^2 - x^2} & a < x \leq a\sqrt{2}. \end{cases}$$

با توجه به خاصیت جمع پذیری انتگرال، داریم

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \left(\sqrt{2ax} - \frac{x^2}{2a} \right) dx + \int_a^{a\sqrt{2}} \left(\sqrt{3a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2a} \right) dx = \\ &= \left[\sqrt{2a} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6a} \right]_0^a + \left[\frac{x}{2} \sqrt{3a^2 - x^2} + \frac{3a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a\sqrt{3}} - \frac{x^3}{6a} \right]_a^{a\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} a^2 - \frac{a^3}{6} + \frac{3a^2}{2} \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{3} a^2 + \frac{1}{6} a^3 = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{1}{3} \right) a^2. \end{aligned}$$

در این محاسبه دستور مثلثاتی

$$\arcsin \alpha - \arcsin \beta = \arcsin (\alpha \sqrt{1 - \beta^2} - \beta \sqrt{1 - \alpha^2}) \quad (\alpha\beta > 0)$$

را برای بدست آوردن

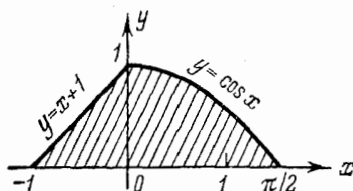
$$\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \arcsin \frac{1}{3}.$$

بکار برده ایم.

۷-۳-۶ مساحت ناحیه ای را حساب کنید که در ربع اول واقع است و به منحنی های $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ و $x^2 + y^2 = 5$ محدود می باشد.

جواب: $\frac{2}{3} + \frac{5}{2} \arcsin \frac{3}{5}$

۷-۳-۷ مساحت ناحیه ای را حساب کنید که به خطوط $y = \cos x$, $y = x + 1$ و محور x ها محدود است (شکل ۷۱).



شکل ۷۱

حل. تابع

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x \leq 0, \\ \cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

در فاصله $\left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$ پیوسته است. مساحت ذوزنقه منحنی الضلع برابر است با

$$S = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-1}^0 (x + 1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{(x + 1)^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

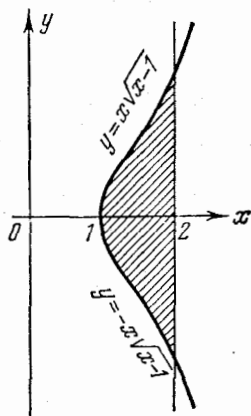
۷-۳-۸ مطلوب است محاسبه مساحت بین منحنی $y^2 = x^3 - x^2$ و خط

$x = 2$.

حل. از رابطه $y^2 = x^2(x - 1)$ نتیجه می شود که $x^2(x - 1) \geq 0$ ، بنابراین

این یا $x = 0$ یا $x \geq 1$. به عبارت دیگر حوزه تعریف تابع ضمنی $y^2 = x^3 - x^2$

شامل نقطه $x=0$ و فاصله $[1, \infty)$ است. در محاسبه مساحت، نقطه منفرجه $(0, 0)$ هیچ نقشی ندارد، پس فاصله انتگرالگیری، $[1, 2]$ است (شکل ۷۲).



شکل ۷۲

تابع را به صورت

$$y = \pm x\sqrt{x-1}$$

می‌نویسیم، ملاحظه می‌شود که مساحت از بالا به $y = x\sqrt{x-1}$ و از پایین به $y = -x\sqrt{x-1}$ محدود است. بنابراین

$$S = \int_1^2 [x\sqrt{x-1} - (-x\sqrt{x-1})] dx = 2 \int_1^2 x\sqrt{x-1} dx.$$

برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر

$$\begin{array}{l} x-1=t^2, \\ dx=2t dt, \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

استفاده می‌کنیم. پس

$$S = 4 \int_0^1 (t^2 + 1) t^2 dt = 4 \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{32}{15}.$$

۷-۳-۹ مساحت محدود به دو شاخه منحنی $(y-x)^2 = x^3$ و خط $x=1$ را حساب کنید.

حل. قبل از هر چیز متوجه هستیم که y تابعی ضمنی از x است که فقط به ازای $x \geq 0$ معین است، طرف اول معادله همواره نامنفی است. حال شاخه های منحنی را تعیین می کنیم:

$$y = x + x\sqrt{x} \quad \text{و} \quad y = x - x\sqrt{x}$$

چون $x \geq 0$ پس $x + x\sqrt{x} \geq x - x\sqrt{x}$ و بنابراین

$$S = \int_0^1 (x + x\sqrt{x} - x + x\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 x\sqrt{x} dx = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{5}.$$

۷-۳-۱۰ مساحت محدود به حلقه منحنی $y^2 = x(x-1)^2$ را حساب کنید

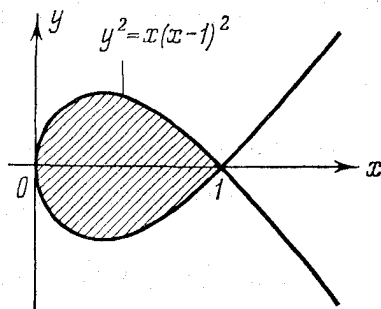
حل. حوزه تعریف تابع ضمنی y ، فاصله $0 \leq x < +\infty$ است، چون y از درجه دوم است پس منحنی نسبت به محور x ها متقارن است. $y_1(x)$ شاخه مثبت آن، عبارت است از

$$y = y_1(x) = \sqrt{x} |x-1| = \begin{cases} \sqrt{x}(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x}(x-1), & x > 1. \end{cases}$$

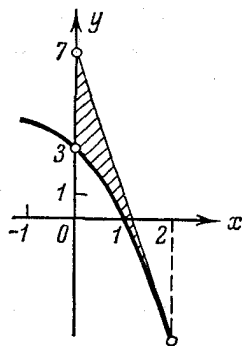
نقاط مشترک شاخه های متقارن $y_1(x)$ و $y_2(x) = -y_1(x)$ باید روی محور x ها باشند. ولی از $y_1(x) = \sqrt{x} |x-1| = 0$ نتیجه می شود که $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$. در نتیجه حلقه محدود به منحنیهای

$$y = \sqrt{x}(1-x) \quad \text{و} \quad y = -\sqrt{x}(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

می باشد (شکل ۷۳)، مساحت مورد نظر برابر است با:



شکل ۷۳



شکل ۷۴

$$S = 2 \int_0^1 \sqrt{x} (1-x) dx = 2 \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{8}{15}.$$

۷-۳-۱۱ مطلوب است محاسبه مساحت محدود به حلقه منحنی

$$y^2 = (x-1)(x-2)^2$$

جواب: $\frac{8}{15}$

۷-۳-۱۲ مساحت محدود به سهمی $y = -x^2 - 2x + 3$ و خط مماس به

آن در نقطه $M(2, -5)$ و محور y ها را حساب کنید.

حل. معادله خط مماس در نقطه $M(2, -5)$ به صورت

$y + 5 = -6(x - 2)$ یا $y = 7 - 6x$ است. چون شاخه های سهمی به طرف پائین

امتداد پیدا می کنند پس منحنی زیر خط مماس قرار دارد یعنی، در فاصله $[0, 2]$ داریم.

$$7 - 6x \geq -x^2 - 2x + 3$$

شکل ۷۴ پس

$$S = \int_0^2 [7 - 6x - (-x^2 - 2x + 3)] dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{8}{3}$$

۷-۳-۱۳ مطلوب است محاسبه مساحت محدود به سهمی $y = x^2 - 2x + 2$

و خط مماس به آن در نقطه $M(3, 5)$ و محور y ها.

جواب: ۹

۷-۳-۱۴ روی بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$

نقطه $M(x, y)$ را که در ربع اول است در نظر می گیریم. نشان دهید که مساحت قطاعی از بیضی که بین نیم قطراطول و خط OM واقع است عبارت است از

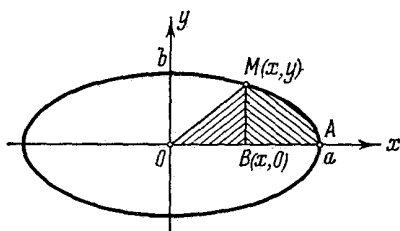
$$S = \frac{ab}{2} \arccos \frac{x}{a}.$$

بکمک این رابطه دستور محاسبه مساحت بیضی را نتیجه بگیرید.

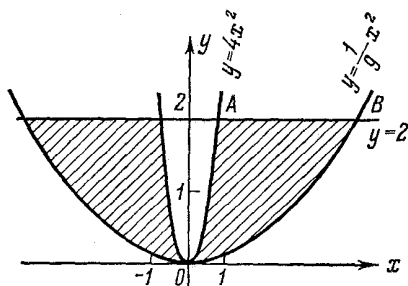
حل. با توجه به شکل ۷۵ داریم:

$$S_{OMAO} = S_{\Delta OMB} + S_{MABM}; \quad S_{\Delta OMB} = \frac{xy}{2} = \frac{b}{2a} x \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$S_{MABM} = \int_x^a y dx = \int_x^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} dt = \frac{b}{2a} \left(t \sqrt{a^2 - t^2} + a^2 \arcsin \frac{t}{a} \right) \Big|_x^a = \\ = \frac{b}{2a} \left[-x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{a} \right) \right].$$



شکل ۷۵



شکل ۷۶

چون $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{a} = \arccos \frac{x}{a}$

$$S_{MABM} = \frac{b}{2a} \left[-x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arccos \frac{x}{a} \right].$$

بنابر این

$$S_{OMAO} = S_{\Delta OMB} + S_{MABM} + \frac{ab}{2} \arccos \frac{x}{a}.$$

در $x=0$ قطاع، تبدیل به ربع بیضی می شود یعنی،

$$\frac{1}{4} S_{\text{ellipse}} = \frac{ab}{2} \arccos 0 = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{ab}{4} \pi,$$

و در نتیجه مساحت بیضی $S = \pi ab$ است. وقتی $a=b$ ، مساحت دایره به دست می آید:

$$S = \pi a^2$$

۱۵-۳-۷ مساحت محدود به سهمی های $y = \frac{x^2}{9}$ و خط $y = 2$ را حساب کنید.

حل. در اینجا توصیه می شود که نسبت به y انتگرالگیری کرده و از تقارن مساحت هم استفاده نماییم (شکل ۷۶). بنابر این معادله ها را نسبت به x حل می کنیم:

$$x = \pm \sqrt{3y}, \quad x = \pm 3\sqrt{y}$$

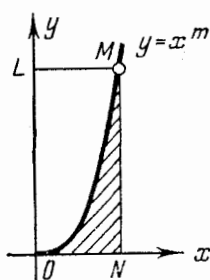
با توجه به تقارن شکل نسبت به محور y ها، مساحت با دو برابر مساحت S_{OABO} برابر

است :

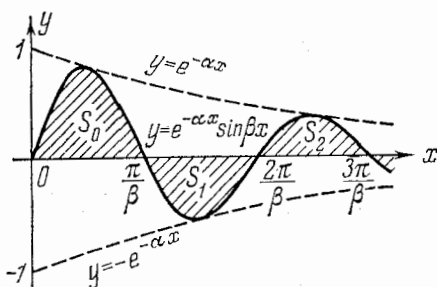
$$S = 2S_{OABO} = 2 \int_0^2 \left(3\sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{y} \right) dy = 5 \int_0^2 \sqrt{y} dy = \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

۱۶-۳-۷ از نقطه دلخواه $M(x, y)$ واقع بر منحنی $y = x^m$ ($m > 0$) خطوط MN و ML ($x > 0$) را عمود بر محورهای مختصات رسم می کنیم. مساحت ناحیه $ONMO$ چه قسمتی از مساحت مستطیل $ONML$ می باشد؟ (شکل ۷۷).

جواب : $\frac{1}{m+1}$



شکل ۷۷



شکل ۷۸

۱۷-۳-۷ ثابت کنید که $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$ مساحت های محدود به محور x ها و نیم موج های منحنی $y = e^{-\alpha x} \sin \beta x$, $x \geq 0$ ، جملات یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q = e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}$ می باشند.

حل . مطابق شکل ۷۸ منحنی ، قسمت مثبت محور x ها ، یعنی Ox را در نقاطی که $\sin \beta x = 0$ ، قطع می کند ، از آنجا

$$x_n = \frac{n\pi}{\beta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

تابع $y = e^{-\alpha x} \sin \beta x$ در فاصله (x_{2k}, x_{2k+1}) مثبت و در فاصله (x_{2k+1}, x_{2k+2}) منفی است ، یعنی ، علامت تابع در فاصله (x_n, x_{n+1}) با عدد $(-1)^n$ یکی است . بنابر

این

$$S_n = \int_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} |y| dx = (-1)^n \int_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx.$$

ولی انتگرال نامعین آن برابر است با

$$\int e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) + C.$$

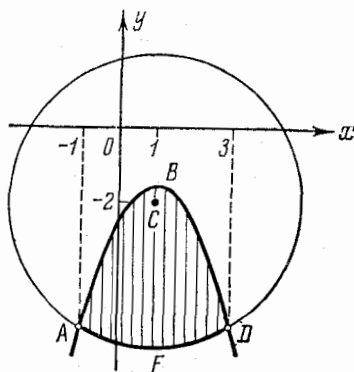
در نتیجه

$$\begin{aligned} S_n &= (-1)^{n+1} \left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) \right] \Big|_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^2 + \beta^2} [e^{-\alpha(n+1)\pi/\beta} \beta (-1)^{n+1} - e^{-\alpha n\pi/\beta} \beta (-1)^n] = \\ &= \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha n\pi/\beta} (1 + e^{-\alpha\pi/\beta}). \end{aligned}$$

پس

$$q = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{e^{-\alpha(n+1)\pi/\beta}}{e^{-\alpha n\pi/\beta}} = e^{-\alpha\pi/\beta},$$

۱۸-۳-۷ مساحت واقع در داخل دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ و داخل سهمی $y = -x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{3}$ را حساب کنید.



شکل ۷۹

حل. معادلات منحنی ها را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 16, \\ y &= -(x-1)^2 - 2\sqrt{3} + 2. \end{aligned}$$

در نتیجه مرکز دایره نقطه $C(1, -2)$ ، و شعاع آن ۴ است. محور سهمی خط $x=1$ و رأس آن نقطه $B(1, 2, -2\sqrt{3})$ می باشد (شکل ۷۹). مساحت S_{ABDFA} از دستور زیر به دست می آید:

$$S_{ABDFA} = \int_{x_A}^{x_D} (y_{\text{par}} - y_{\text{circle}}) dx,$$

که در آن x_A و x_D از حل دستگاه معادلات زیر حاصل می شوند:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16, \\ y+2 = -(x-1)^2 - 2\sqrt{3} + 4, \end{cases}$$

که در نتیجه $x_A = -1$, $x_D = 3$. بنابراین

$$\begin{aligned} S_{ABDFA} &= \int_{-1}^3 [(-x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{3}) + (2 + \sqrt{16 - (x-1)^2})] dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + (3 - 2\sqrt{3})x + \frac{x-1}{2} \sqrt{16 - (x-1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{16}{2} \arcsin \frac{x-1}{4} \right]_1^3 = \frac{32}{3} - 8\sqrt{3} + 2\sqrt{12} + 16 \arcsin \frac{1}{2} = \\ &= \frac{32}{3} - 4\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

توجه انتگرال را می توان با انتخاب تغییر متغیر $x-1=z$ و استفاده از زوج بودن انتگرال، ساده تر حل کرد

۱۹-۳-۷ مساحت بین منحنی های $y = (x-4)^2$, $|y| = 16 - x^2$ و محور x ها را حساب کنید.

جواب: $\frac{64}{3}$

۲۰-۳-۷ مطلوب است محاسبه مساحت محدود به سهمی های

$$x = y^2; \quad x = \frac{3}{4}y^2 + 1$$

جواب: $\frac{8}{3}$

۲۱-۳-۷ مساحت قسمتی از بیضی $x^2 + 4y^2 = 8$ را حساب کنید که به

وسیله هذلولی $x^2 - 3y^2 = 1$ قطع می شود.

جواب $2\pi - (2\sqrt{3}) \ln(2 + \sqrt{3})$

۲۲-۳-۷ مساحت محدود به منحنی $y^2 = (1-x^2)^3$ را حساب کنید.

جواب: 0.75π

۷-۳-۲۳ مساحت محدود به حلقه منحنی $(y^2 - x^2) + x^3 = 0$ را حساب کنید. جواب: $\frac{128}{15}$

۷-۳-۲۴ مساحت واقع بین منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و خط $x + y = 1$ را به دست آورید. جواب: $\frac{1}{3}$

۷-۳-۲۵ مساحت محدود به منحنی $y^2 = x^2(1 - x^2)$ را به دست آورید. جواب: $\frac{4}{3}$

۷-۳-۲۶ مساحت محدود به حلقه منحنی $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ را به دست آورید. جواب: $\frac{8}{15}$

۷-۳-۲۷ مساحت محدود به محور عرضها و منحنی $x = y^2(1 - y)$ را به دست آورید. جواب: $\frac{1}{12}$

۷-۳-۲۸ مطلوب است مساحت محدود به منحنی $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$ و محور x ها که بین عرضهای نقاط مینیمم منحنی $y(x)$ واقع است. جواب: $\frac{91}{30}$

۷-۴ محاسبه مساحت ناحیه محدود به منحنی هایی که معادلات آنها به صورت پارامتری هستند

اگر مرز ناحیه محدود به معادلات :

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

باشد، مساحت آن بوسیله یکی از دستورهایی زیر حساب می شود :

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt; \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) y'(t) dt; \quad S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (xy' - yx') dt,$$

که در آن α و β مقادیر متناظر از پارامتر t برای ابتدا و انتهای مرز ناحیه است که در جهت مثبت پیموده می شود. (جهت مثبت عبارت است از جهتی است که اگر متحرکی در آن جهت محیط ناحیه را ببیند مساحت ناحیه را در طرف چپ خودش داشته باشد).

۷-۴-۱ مساحت محدود به بیضی

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

را حساب کنید.

حل . برای راحتی ، به صورت زیر عمل می کنیم :

$$xy' - yx' = a \cos t \times b \cos t + b \sin t \times a \sin t = ab$$

پس

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

۷-۴-۲ مطلوب است محاسبه مساحت محدود به آستروئید

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

حل . برای محاسبه ، معادله را به صورت پارامتری می نویسیم :

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

برای راحتی محاسبه ، به قرار زیر عمل می کنیم :

$$xy' - yx' = a^2 (\cos^3 t \cdot 3 \sin^2 t \cos t + \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t \sin t) = 3a^2 \cos^2 t \sin^2 t$$

پس

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} a^2 \pi.$$

۷-۴-۳ مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه واقع در یک قوس از سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

و محور x ها .

حل . در اینجا مرز ناحیه قسمتی از سیکلوئید است وقتی $(0 \leq t \leq 2\pi)$

و قسمتی از محور x هاست که $(0 \leq x \leq 2\pi a)$. برای محاسبه مساحت ، از فرمول

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} yx' dt$$

استفاده می کنیم . چون معادله محور x ها ، $y = 0$ است پس

$$S = - \int_{2\pi}^0 a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

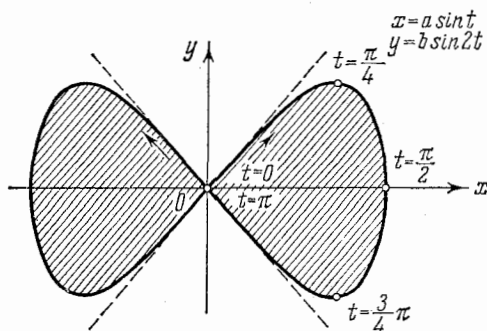
$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2 \cos t + \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \right] dt = 3\pi a^2$$

۷-۴-۴ مساحت ناحیه محدود به منحنی

$$x = a \sin t, \quad y = b \sin 2t$$

رابدست آورید.

حل. با توجه به اینکه وقتی t به $\pi - t$ تبدیل شود، x ثابت مانده ولی علامت y تغییر می کند پس منحنی نسبت به محور x ها متقارن است. وقتی t را به $t + \pi$ تبدیل می کنیم y تغییر نمی کند ولی x تغییر علامت می دهد، بنابراین منحنی نسبت به محور y ها متقارن است.



شکل ۸۰

بعلاوه چون توابع $x = a \sin t$; $y = b \sin 2t$ دارای دوره تناوب مشترک 2π هستند پس فاصله تغییرات پارامتر عبارت است از $0 \leq t \leq 2\pi$. از معادلات منحنی نتیجه می شود که فقط اگر پارامتر t در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ تغییر نماید x و y با هم، نامنفی هستند پس به ازای $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ منحنی در ربع اول قرار دارد شکل ۸۰. همان طوری که در شکل دیده می شود کافی است مساحت یک حلقه محاسبه گردد که متناظر تغییرات t برای این حلقه از ۰ تا π می باشد، پس

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\pi} y x' dt = 2 \int_0^{\pi} b \sin 2t \times a \cos t dt = 4ab \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin t dt = \\ &= -4ab \left(\frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3} ab. \end{aligned}$$

۷-۴-۵ مساحت ناحیه محدود به حلقه منحنی

$$x = \frac{t}{3}(6-t); \quad y = \frac{t^2}{8}(6-t).$$

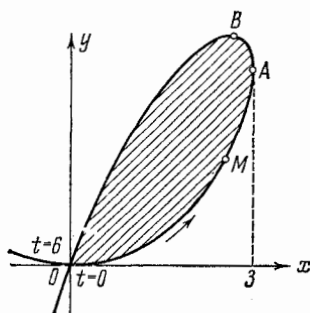
را حساب کنید.

حل. نقاطی از منحنی را تعیین می کنیم که خودش را قطع می کند. هر دو منحنی $x(t)$ و $y(t)$ در فاصله $-\infty < t < \infty$ معین هستند.

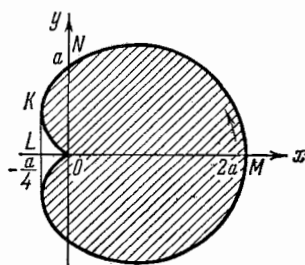
طول و عرض نقطه ای را که منحنی خودش را قطع می کند به ازای مقادیر مختلف پارامتر به دست می آیند. چون $x = 3 - \frac{1}{3}(t-3)^2$ ، پس طولهای نقاط تلاقی به ازای $t = 3 \pm \lambda$ حاصل می شوند. λ را طوری تعیین می کنیم که رابطه

$$\frac{(3+\lambda)^2}{8}(3-\lambda) = \frac{(3-\lambda)^2}{8}(3+\lambda)$$

به ازای $\lambda \neq 0$ برقرار باشد که از آنجا $\lambda = \pm 3$. بنابراین در $t_1 = 0$ و $t_2 = 6$ داریم



شکل ۸۱



شکل ۸۲

تنها نقطه ای است که منحنی $(0, 0)$ ، یعنی $y(t_1) = y(t_2) = 0$ و $x(t_1) = x(t_2) = 0$ خودش را قطع می کند. وقتی t از ۰ تا ۶ تغییر می کند تمام نقاط منحنی در ربع اول قرار می گیرند. وقتی t از ۰ تا ۳ تغییر کند نقطه $M(x, y)$ قسمت فوقانی حلقه را رسم می کند، زیرا در این فاصله $x(t)$ و $y(t) = \frac{3tx}{8}$ صعودی هستند و بنابراین $x(t)$ شروع به نزول می کند، در حالی که هنوز $y(t)$ در حال صعود است. شکل ۸۱ نشان می دهد که وقتی منحنی در جهت افزایش t پیموده می شود، ناحیه در سمت چپ قرار می گیرد. برای محاسبه مساحت محدود به این حلقه دستور زیر مناسب است:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^6 (xy' - yx') dt = \frac{1}{2} \int_0^6 \frac{t^2(6-t)^2}{24} dt = \frac{27}{5}.$$

۶-۴-۷ مساحت واقع در حلقه

$$x = t^2; \quad y = t - \frac{t^3}{3}$$

را بدست آورید.

جواب: $\frac{8}{5}$

۷-۴-۷ مطلوب است محاسبه مساحت محدود به کار دیوید

$$x = a \cos t (1 + \cos t); \quad y = a \sin t (1 + \cos t).$$

حل. چون توابع $x(t)$ و $y(t)$ متناوب هستند لذا کافی است فاصله $[-\pi, \pi]$ را در نظر بگیریم. چون با تبدیل t به $-t$ مقدار x ثابت مانده و فقط y تغییر علامت می دهد و وقتی t از ۰ تا π تغییر می کند $y \geq 0$ ، بنابراین منحنی نسبت به محور x ها متقارن است.وقتی t از ۰ تا π تغییر نماید تابع $u = \cos t$ از ۱ تا -۱ نزول می کند و

$$x = au(1+u) = a \left[-\frac{1}{4} + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

نخست از $x|_{u=1} = 2a$ به $x|_{u=-\frac{1}{2}} = -\frac{a}{4}$ نزول کرده و سپس تا $x|_{u=-1} = 0$ صعود می کند. می توان نشان داد که y در فاصله $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}\right)$ صعودی و در فاصله $\left(\frac{\pi}{3} \leq t \leq \pi\right)$ نزولی است.

نمایش هندسی تابع در شکل ۸۲ نموده شده است و فلش جهتی را نشان می دهد

که t افزایش می یابد. در نتیجه

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (xy' - yx') dt = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t)^2 dt = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

۸-۴-۷ مطلوب است محاسبه ناحیه محدود به منحنی

$$x = \cos t, \quad y = b \sin^3 t.$$

جواب: $0.75\pi ab$

راهنمایی: منحنی نسبت به محورهای مختصات متقارن است و آنها را در نقاط

 $x = \pm a, y = \pm b$ قطع می کند.

۹-۴-۷ مساحت محدود به حلقه هریک از منحنی های زیر را بدست آورید:

(a) $x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - t;$

(b) $x = 2t - t^2; \quad y = 2t^2 - t^3;$

(c) $x = t^2; \quad y = \frac{t}{3} (3 - t^2).$

جواب: $\frac{8}{15}$ (a) راهنمایی: منحنی نسبت به محور x ها متقارن است و مبداء را مرتبه دیگر، به ازای $t = \pm 1$ قطع می کند. حلقه در ربع های دوم و سوم واقع است.
راهنمایی: (b) $\frac{8}{15}$ نقاطی که منحنی خودش را قطع می کند به صورت زیر تعیین می شوند:

از $y = tx(t)$ به ازای $t_1 \neq t_2$ داریم $t_1 x(t_1) = t_2 x(t_2)$ و $y(t_1) = t_1 x(t_1) = t_2 x(t_2)$ و فقط وقتی $x(t_1) = x(t_2) = 0$ ، یعنی $t_1 = 0; t_2 = 2$ ،
 (c) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

۱-۴-۷ مساحت ناحیه محدود به منحنی زیر را بدست آورید:

$$x = a \cos t; y = b \sin t \cos^2 t.$$

جواب: $0.25\pi ab$. راهنمایی: منحنی نسبت به هر دو محور متقارن است که دوبار از مبداء می گذرد و دو تا حلقه می سازد. بنابراین کافی است یک چهارم مساحت را که متناظر تغییرات t از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ است حساب کرده و نتیجه را به ۴ ضرب کنیم.
 ۱۱-۴-۷ مساحت محدوده به گسترده بیضی

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t; y = -\frac{c^2}{b} \sin^3 t; c^2 = a^2 - b^2$$

را حساب کنید.

جواب: $\frac{3c^4\pi}{8ab}$. راهنمایی: منحنی شبیه به یک آستروئید است که در جهت قائم، امتداد پیدا می کند.

۵-۷ محاسبه مساحت در مختصات قطبی

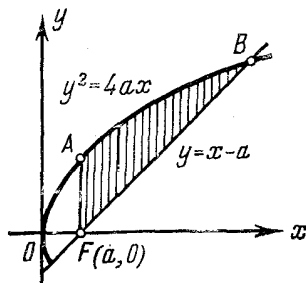
در مختصات قطبی مساحت محدود به منحنی $\rho = \rho(\varphi)$ و شعاع حامل های $\varphi_1 = \alpha$ و $\varphi_2 = \beta$ با انتگرال زیر حساب می شود:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

۱-۵-۷ مساحت واقع در ربع اول و محدود به سهمی $y^2 = 4ax$ و خطوط $y = x - a$ و $x = a$ را حساب کنید.

حل. دستگاه مختصات قطبی را طوری در نظر می گیریم که قطب به نقطه F ،

کانون سهمی منطبق شود و جهت محور قطبی در جهت محور x ها قرار بگیرد. بنابراین معادله سهمی به صورت $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ است که p پارامتر سهمی است. در اینجا $p = 2a$ و F دارای مختصات $(a, 0)$ است. بنابراین معادله سهمی به صورت $\rho = \frac{2a}{1 - \cos \varphi}$ بوده و خطوط راست تبدیل به $\varphi = \frac{\pi}{4}$ و $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ می شوند (شکل ۸۳)



شکل ۸۳

پس

$$S_{FABF} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{4a^2}{(1 - \cos \varphi)^2} d\varphi = 2a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d\varphi}{4 \sin^4 \frac{\varphi}{2}}$$

تغییر متغیر زیر را در نظر بگیریم:

$$\cot \frac{\varphi}{2} = z, \quad -\frac{d\varphi}{2 \sin^2(\varphi/2)} = dz, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \varphi & z \\ \hline \pi/4 & \cot(\pi/8) \\ \hline \pi/2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

داریم

$$S_{FABF} = a^2 \int_1^{\cot(\pi/8)} (1 + z^2) dz = a^2 \left(\cot \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \cot^3 \frac{\pi}{8} - 1 - \frac{1}{3} \right)$$

باتوجه به

$$\cot \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = 1 + \sqrt{2}$$

داریم:

$$S_{FABF} = 2a^2 \left(1 + \frac{4}{3} \sqrt{2} \right).$$

۷-۵-۲ مساحت محدود به هریک از منحنی های زیر را حساب کنید:

(a) $\rho = 1 + \cos \varphi$;

(b) $\rho = a \cos \varphi$.

جواب: (a) $\frac{3\pi}{2}$; (b) $\frac{\pi a^2}{4}$

راهنمایی: منحنی دوم دایره ای است به شعاع $\frac{a}{2}$ که از قطب می گذرد و نسبت به محور قطبی متقارن است و $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

۷-۵-۳ مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به منحنی

$\rho = 2a \cos 3\varphi$ و دایره $\rho = a$ ، که مساحت خارج دایره واقع است.

حل. چون منحنی $\rho = 2a \cos 3\varphi$ دارای دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{3}$ است وقتی φ

بین $-\pi$ و π تغییر می کند شعاع حامل سه حلقه مساوی منحنی را رسم می کند. مقادیر مورد قبول φ ، آن مقادیری هستند که $\cos 3\varphi \geq 0$ ، از آنجا

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

پس یکی از حلقه ها وقتی φ بین $-\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6}$ تغییر کند رسم می شود. دو حلقه دیگر،

وقتی φ بترتیب بین $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ تغییر می کند رسم می شوند (شکل

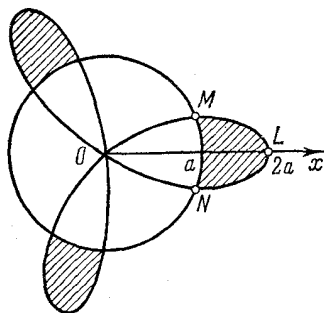
۸۴)، مساحت قسمت های بریده شده بوسیله دایره $\rho = a$ ، با سه برابر مساحت ناحیه

S_{MLNM} برابر است. مختصات قطبی نقاط M و N با حل معادله $2a \cos 3\varphi = a$

یعنی $\cos 3\varphi = \frac{1}{2}$ بدست می آیند. جوابهای معادله که بین $-\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6}$ قرار دارد

فقط $-\frac{\pi}{9}$ و $\frac{\pi}{9}$ ($k=0$) می باشند. پس نقطه N با زاویه قطبی $\varphi_1 = -\frac{\pi}{9}$ ، و

نقطه M با زاویه قطبی $\varphi_2 = \frac{\pi}{9}$ مشخص می شود. با توجه به شکل داریم:



شکل ۸۴

$$S_{MLNM} = S_{OMLNO} - S_{OMNO} = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi/9}^{\pi/9} 4a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi - \frac{1}{2} \int_{-\pi/9}^{\pi/9} a^2 d\varphi = a^2 \left(\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right).$$

۴-۵-۷ مساحت ناحیه محدود به دو دایره $\rho = 3\sqrt{2}a \cos \varphi$ و $\rho = 3a \sin \varphi$ را بدست آورید.

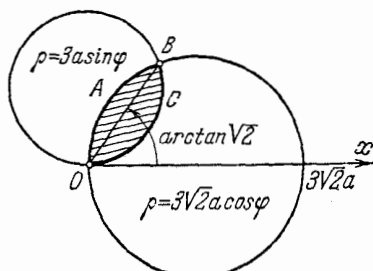
حل. دایره اول در نیم صفحه سمت راست قرار دارد و از قطب $\rho = 0$ می گذرد و به خط افقی در این نقطه مماس است. در نتیجه قطب، محل تلاقی دایره هاست. نقطه تلاقی دیگر نقطه B است که از حل معادله $3\sqrt{2}a \cos \varphi = 3a \sin \varphi$ بدست می آید، یعنی $B(\arctan \sqrt{2}, a\sqrt{6})$. طوری که در شکل ۸۵ نشان داده شده است مساحت S ، با مجموع مساحت های ناحیه های $OABO$ و $OCBO$ برابر است که در شعاع حامل $\varphi = \arctan \sqrt{2}$ مشترک هستند. کمان BAO از دایره اول در فاصله تغییرات $\arctan \sqrt{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ رسم می شود و کمان OCB از دایره دوم در فاصله تغییرات $0 \leq \varphi \leq \arctan \sqrt{2}$ رسم می شود. بنابراین

$$S_{OABO} = 9a^2 \int_{\arctan \sqrt{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{9}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right),$$

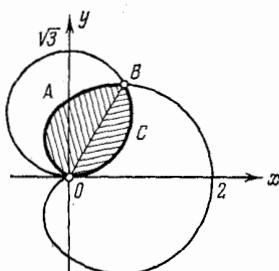
$$S_{OCBO} = \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\arctan \sqrt{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{9}{4} a^2 \left(\arctan \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right).$$

پس

$$S_{OABO} + S_{OCBO} = 2.25a^2 (\pi - \arctan \sqrt{2} - \sqrt{2}).$$



شکل ۸۵



شکل ۸۶

۷-۵-۵ مساحت ناحیه‌ای از کاردیوئید $\rho = 1 + \cos \varphi$ را که بوسیله دایره

$$\rho = \sqrt{3} \sin \varphi \text{ قطع می شود حساب کنید (شکل ۸۶)}$$

حل. نقاط تلاقی دو منحنی را با حل دستگاه معادلات زیر بدست می آوریم:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3} \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ \rho = 1 + \cos \varphi, \end{cases}$$

جوابها $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \pi$ هستند. مساحت مطلوب، مجموع دو مساحت است. اولی مساحت قسمتی از دایره، و دومی مساحت قسمتی از کاردیوئید می باشد، فصل مشترک دو مساحت شعاع حامل $\varphi = \frac{\pi}{3}$ است. کمان BAO قسمتی از کاردیوئید است که در فاصله تغییرات $\frac{\pi}{3}$ تا π رسم می شود، کمان OCB قسمتی از دایره است که در فاصله تغییرات $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ رسم می شود. بنابراین

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \\ &= \frac{3}{4} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} \left(\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \\ &= \frac{3}{4} (\pi - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

۷-۵-۶ مساحت ناحیه محدود به کاردیوئید $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ و دایره

$\rho = a$ را حساب کنید.

$$\text{جواب: } 2a^2 \left(\frac{5\pi}{8} - 1 \right)$$

۷-۵-۷ مطلوب است محاسبه مساحت حلقه منحنی $x^3 + y^3 = 3axy$

حل. برای محاسبه از مختصات قطبی استفاده می کنیم. با توجه به روابط

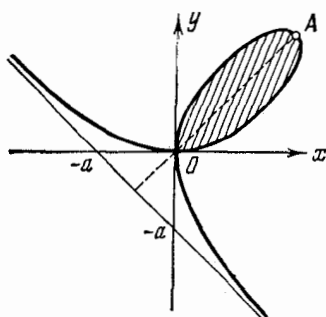
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

داریم:

$$\rho^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 3a\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

یا

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} = \\ &= \frac{3a \sin 2\varphi}{(\sin \varphi + \cos \varphi)(2 - \sin 2\varphi)}. \end{aligned}$$



شکل ۸۷

از معادله چنین بر می آید که اولاً به ازای $\varphi = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ داریم $\rho = 0$ ، ثانیاً هرگاه $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{4}$ و $\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{4}$ آنگاه $\rho \rightarrow \infty$. از مطلب دوم معلوم می شود که منحنی مجانبی به معادله $y = -x - a$ دارد که براحتی می توان با روش معمولی، در مختصات قائم، تعیین کرد. در نتیجه حلقه منحنی وقتی φ از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر بکند در ربع اول رسم می شود (شکل ۸۷). پس

$$S_{OAO} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi.$$

با توجه به تقارن منحنی نسبت به نیمساز $y = x$ ، یعنی، شعاع حامل $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ، مساحت نصف حلقه را حساب می کنیم یعنی در فاصله تغییرات $\varphi = 0$ تا $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ، و سپس آن را دو برابر می کنیم. برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر

$$\tan \varphi = z, \quad \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = dz,$$

φ	z
0	0
$\frac{\pi}{4}$	1

استفاده می کنیم. از آنجا داریم:

$$S_{OAO} = 9a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi = 9a^2 \int_0^1 \frac{z^2 dz}{(1+z^3)^2}.$$

دوباره تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$1 + z^3 = v, \\ 3z^2 dz = dv,$$

z	v
0	1
1	2

بالاخره مساحت به صورت زیر حساب می شود:

$$S_{OAO} = 3a^2 \int_1^2 \frac{dv}{v^2} = \frac{3}{2} a^2.$$

۷-۵-۸ مساحت ناحیه محدود به حلقه های هریک از منحنی های زیر را حساب

کنید:

$$(a) \rho = a \cos 2\varphi; \quad (b) \rho = a \sin 2\varphi.$$

$$\text{جواب: } (a) \frac{\pi a^2}{8}; \quad (b) \frac{\pi a^2}{8}$$

۷-۵-۹ مساحت ناحیه ای از کاردیوئید $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ را حساب کنید

که درون دایره $\rho = a \cos \varphi$ واقع است.

$$\text{جواب: } a^2 \left(\frac{7\pi}{12} - \sqrt{3} \right)$$

۷-۵-۱۰ مساحت ناحیه محدود به منحنی $\rho = a \sin \varphi \cos^2 \varphi$, $a > 0$ را

بدست آورید.

۷-۵-۱۱ راهنمایی: منحنی از قطب می گذرد و دو حلقه متقارن نسبت به محور

y ها را در ربع اول و دوم می سازد. پس کافی است مساحت یک حلقه را که متناظر به تغییرات φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ می باشد حساب کرده و آن را دو برابر نماییم.

۷-۵-۱۱ مساحت ناحیه محدود به منحنی $\rho = a \cos^3 \varphi$ ($a > 0$) را حساب

کنید.

۷-۵-۱۲ راهنمایی: منحنی از قطب می گذرد و نسبت به محور قطبی

متقارن است، و مساحت مورد نظر در ربع اول و چهارم واقع است پس کافی است مساحت قسمت بالا را که متناظر به تغییرات φ بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ است محاسبه و دو برابر نماییم.

۷-۵-۱۲ مساحت قسمتی از لمنسکات برنولی $\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$ را که درون

دایره $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}$ قرار دارد حساب کنید.

$$\text{جواب: } a^2 \left(1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

۷-۵-۱۳ با استفاده از مختصات قطبی مساحت محدود به منحنی

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$$

را حساب کنید.

جواب: $\frac{\pi a^2}{2}$ راهنمایی: منحنی نسبت به محورهای مختصات متقارن است و فقط آنها را در مبداء مختصات قطع می کند و چهار حلقه که هر کدام در یک ربع قرار دارند، می سازد (گل رز چهاربرگی). بنابراین کافی است مساحت یک حلقه که متناظر به تغییرات φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ است حساب کرده و آن را چهار برابر کنیم.

۷-۵-۱۴ با استفاده از مختصات قطبی مساحت ناحیه محدود به منحنی

$$x^4 + y^4 = a^2 (x^2 + y^2)$$

جواب: $\sqrt{2} \pi a^2$ راهنمایی: منحنی نسبت به نیمسازها و محورهای مختصات متقارن است و محورها را در فاصله های مساوی قطع می کند. مبداء مختصات یک نقطه منفرد است. پس کافی است مساحت یک هشتم آن را که متناظر به تغییرات φ از ۰ تا $\frac{\pi}{4}$ است حساب کرده و نتیجه را هشت برابر نماییم.

۷-۶ محاسبه حجم یک جسم

حجم یک جسم از رابطه

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

به دست می آید که $S(x)$ مساحت مقطع جسم با هر صفحه عمود به محور x ها در نقطه ای به طول x در فاصله تغییرات a تا b است. تابع $S(x)$ ، در فاصله تغییرات x ، از a تا b معین و پیوسته است.

V_x حجم حاصل از دوران ذوزنقه منحنی الضلع محدود به $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) و محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ ($a < b$) از رابطه زیر حساب می شود:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

V_x حجم حاصل از دوران ناحیه واقع بین منحنی های $y = y_1(x)$ و $y = y_2(x)$ ($0 \leq y_1(x) \leq y_2(x)$) و خطوط راست $x = a$ ، $x = b$ حول محور x ها از رابطه زیر به دست می آید:

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

اگر منحنی با معادلات پارامتری یا در مختصات قطبی مشخص شود، دستورهای فوق را به صورت مناسب تغییر داده و حجم را حساب می کنیم.

۷-۶-۱ حجم بیضوی (یا الپسوئید) زیر را حساب کنید:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

حل. مقطع بیضوی با صفحه، مقدار ثابت x ، یک بیضی است (شکل ۸۸)

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

نیمقطرهای این بیضی عبارتند از:

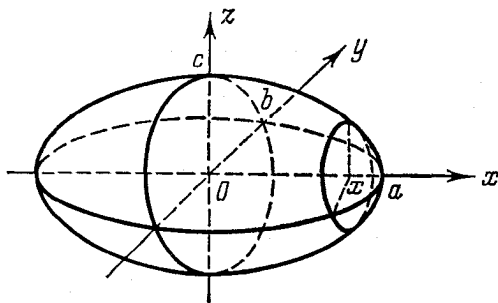
$$b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}; c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

مساحت بیضی برابر است با:

$$S(x) = \pi b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \times c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (-a \leq x \leq a).$$

(مسئله ۷-۴-۱ را ببینید). بنابراین حجم بیضوی برابر

$$V = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc.$$



است، در حالت خاص $a=b=c$ ، بیضوی تبدیل به کره می شود و حجم آن برابر است با

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

۷-۶-۲ حجم قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ را که بین صفحات $x=2$ و $x=3$ قرار دارد حساب کنید.

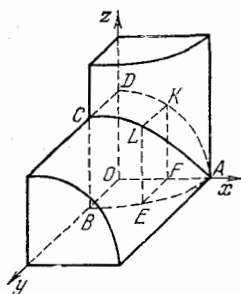
جواب: $9\frac{2}{3}\pi$ راهنمایی: صفحه عمود بر محور x ها در نقطه x کره را در مقطع دایره ای شکل، با شعاع $r = \sqrt{16-x^2}$ قطع می کنند که مساحت آن $S(x) = \pi(16-x^2)$ است.

۷-۶-۳ دو استوانه به شعاع قاعده های a با محورهای متعامد، مفروض است. حجم مشترک دو استوانه را بدست آورید.

حل. محورهای استوانه ها را، محورهای y و z انتخاب می کنیم (شکل ۸۹). حجم $OABCD$ با یک هشتم حجم جسم مورد نظر برابر است.

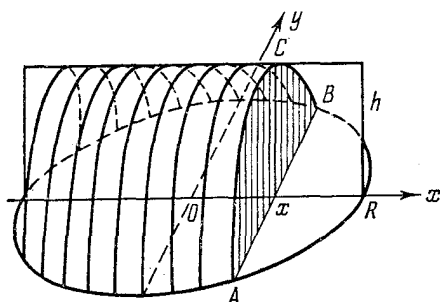
مقطع جسم را با صفحه عمود به محور x ها در فاصله x از مبدا پیدا می کنیم. مقطع، مربع $EFLK$ با بُعد $EF = \sqrt{a^2 - x^2}$ است که مساحت آن برابر $S(x) = a^2 - x^2$ و حجم آن برابر است با

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3.$$

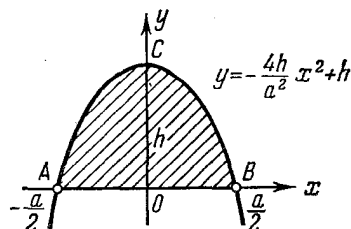


شکل ۸۹

۷-۶-۴ روی تمام وترهای یک دایره به شعاع R که همگی با هم موازیند سهمی هایی به ارتفاع ثابت h بنا شده است، طوری که صفحه سهمی ها به صفحه دایره عمود است. حجم جسم حاصل را بیابید (شکل ۹۰).



شکل ۹۰



شکل ۹۱

حل. نخست مساحت سهمی به قاعده a و به ارتفاع h را بدست می آوریم. اگر محوره‌های مختصات را مطابق شکل ۹۱ در نظر بگیریم، معادله سهمی به صورت زیر نوشته می شود

$$y = \alpha x^2 + h$$

با در نظر گرفتن مختصات نقطه $B\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ ، پارامتر α را حساب می کنیم. در این نقطه داریم، $0 = \alpha \frac{a^2}{4} + h$ از آنجا $\alpha = -\frac{4h}{a^2}$ بنابراین معادله سهمی

$$y = -\frac{4h}{a^2} x^2 + h$$

بوده و مساحت مورد نظر برابر است با

$$S = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} y \, dx = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(-\frac{4h}{a^2} x^2 + h \right) dx = \frac{2}{3} ah.$$

حال حجم را حساب می کنیم. اگر محوره‌های مختصات را طبق شکل ۹۰ مرتب کنیم و جسم را بوسیله صفحات عمود به محور x ها در نقطه‌ای به طول x قطع دهیم مساحت مقطع برابر است با $S = \frac{2}{3} ah$ که در آن

$$a = 2y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

است. پس

$$S(x) = \frac{4}{3} \sqrt{R^2 - x^2} h \quad \text{و} \quad V = \int_{-R}^R S(x) \, dx = \frac{8}{3} h \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = \frac{2}{3} \pi h R^2.$$

۷-۶-۵ صفحه مثلثی بر قطر ثابتی از دایره به شعاع a عمود است و قاعده آن

وتری از دایره می باشد و رأس مثلث روی خط راستی موازی با آن قطر و به فاصله h از صفحه دایره واقع است. این مثلث از یک طرف قطر تا طرف دیگر آن حرکت می کند در نتیجه جسمی حاصل می شود، حجم آن را بیابید.

جواب: $0.5\pi a^2 h$ راهنمایی: مساحت مثلث وقتی به فاصله x از مرکز دایره قرار

گیرد برابر $h\sqrt{a^2 - x^2}$ است.

۶-۶-۷ ناحیه واقع بین محورهای مختصات و سهمی $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = a^2$ حول

محور x ها دوران می کند حجم جسم حاصل را بیابید.

حل. نقاط تلاقی منحنی با محورهای مختصات عبارت است از

$$x=0 \quad y=a, \quad \text{و} \quad y=0 \quad x=a$$

پس فاصله انتگرالگیری $[0, a]$ است. با توجه به معادله سهمی داریم:

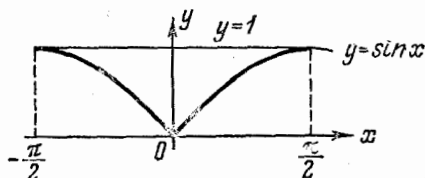
$$y = \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

بنابر این

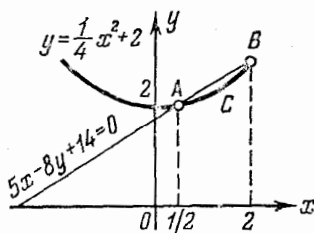
$$V = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^4 dx = \pi \int_0^a \left(a^2 - 4a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + 6ax - 4a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + x^2\right) dx = \frac{1}{15} \pi a^3.$$

۷-۶-۷ ناحیه واقع بین یک قوس از منحنی سینوسی $y = \sin x$ و محور

عرضها و خط $y=1$ را حول محور y ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را بیابید (شکل ۹۲).



شکل ۹۲



شکل ۹۳

حل. تابع معکوس $x = \arcsin y$ را در فاصله $[0, 1]$ در نظر می گیریم. پس

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy.$$

با توجه به تغییر متغیر $\arcsin y = t$ داریم:

$$\begin{array}{l} y = \sin t, \\ dy = \cos t dt, \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline y & t \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & \pi/2 \\ \hline \end{array}$$

پس

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t dt$$

با استفاده از روش جزء بجزء داریم

$$V = \frac{\pi(\pi^2 - 8)}{4}$$

۸-۶-۷ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی $y = 0.25x^2 + 2$ و

خط $5x - 8y + 14 = 0$ حول محور x ها را بدست آورید.

حل. جسم از دوران سطح $ABCA$ حول محور x ها ساخته می شود (شکل

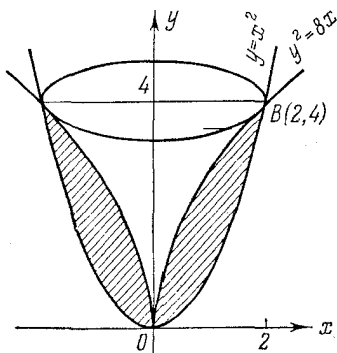
۹۳ را ببینید). برای بدست آوردن طول نقاط A و B دستگاه معادلات زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + 2, \\ 5x - 8y + 14 = 0 \end{cases}$$

داریم $x_A = \frac{1}{2}$; $x_B = 2$ و $y_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$ و $y_2(x) = (5/8)x + 7/4$

پس

$$V = \pi \int_{1/2}^2 \left[\frac{1}{16} \left(\frac{5}{2}x + 7 \right)^2 - \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 \right] dx = \frac{891}{1280} \pi.$$



شکل ۹۴

۷-۶-۹ سطح محدود به سهمی های $y = x^2$ و $8x = y^2$ را حول محور y ها دوران می دهیم، حجم جسم حاصل را بدست آورید.

حل. واضح است که در فاصله بین مبدا و نقطه تلاقی سهمی ها داریم (شکل ۹۴

را ببینید):

$$x_2(y) = \sqrt{y} \geq x_1(y) = \frac{y^2}{8}$$

حال عرض های نقاط تلاقی را با حل دستگاه معادلات زیر بدست می آوریم

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = 8x. \end{cases}$$

که داریم، $y_1 = 0, y_2 = 4$. بنابراین

$$V = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64} \right) dy = \frac{24}{5} \pi.$$

۷-۶-۱۰ مطلوب است محاسبه حجم چنبره حاصل از دوران دایره ای به شعاع

a حول محوری واقع در صفحه دایره و به فاصله b از مرکز آن ($b \geq a$). (مثلاً توئی لاستیک اتومبیل به شکل یک چنبره است).

جواب: $2\pi^2 a^2 b$

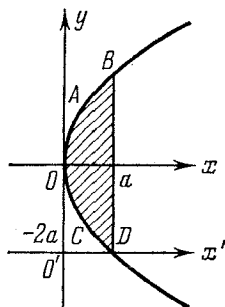
۷-۶-۱۱ ناحیه واقع بین دو شاخه از منحنی $(y-x)^2 = x^3$ و خط $x = 1$ را

حول محور x ها دوران می دهیم، حجم جسم حاصل را بیابید.

جواب: $\frac{8}{7}$ (تمرین ۷-۳-۹ را ببینید).

۷-۶-۱۲ ناحیه محدود به سهمی $y^2 = 4ax$ و خط $x = a$ را حول خط

$y = -2a$ دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را حساب کنید (شکل ۹۵ را ببینید).



شکل ۹۵

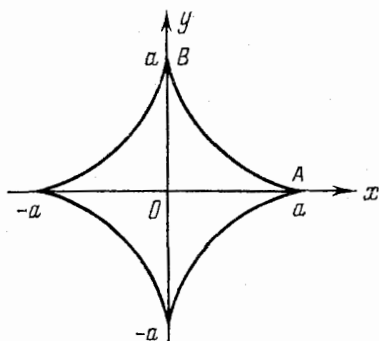
حل. اگر مبدا مختصات را با حفظ جهت و امتداد محورهای

مختصات، به نقطه $O'(0, -2a)$ منتقل کنیم، معادله سهمی در دستگاه مختصات جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$(y' - 2a)^2 = 4ax.$$

پس معادله منحنی OAB عبارت است از $y_2 = 2a + \sqrt{4ax}$ و معادله منحنی OCD به صورت $y_1 = 2a - \sqrt{4ax}$ است. حجم مورد نظر برابر است با:

$$V = \pi \int_0^a (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_0^a [(2a + 2\sqrt{ax})^2 - (2a - 2\sqrt{ax})^2] dx = \frac{32}{3}\pi a^3.$$



شکل ۹۶

۷-۶-۱۳ ناحیه محدود به آستروئید $x = a \cos^3 t$; $y = a \sin^3 t$ را حول محور

x ها دوران می دهیم، حجم حاصل را بیابید.

حل. حجم مطلوب را با V نشان می دهیم و مقدار آن با دو برابر حجم جسمی

برابر است که از دوران سطح OAB حاصل می شود (شکل ۹۶ را ببینید). پس

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx.$$

برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم،

$$\begin{aligned} x &= a \cos^3 t, \\ dx &= -3a \cos^2 t \sin t dt, \\ y &= a \sin^3 t, \end{aligned}$$

x	t
0	$\pi/2$
a	0

بنابر این

$$V = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \sin^6 t (-3a \cos^2 t \sin t) dt =$$

$$= 6\pi a^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt \right].$$

با استفاده از دستوری که در مسئله ۹-۶-۶ دیدیم، مقدار انتگرال فوق برابر است با:

$$V = 6\pi a^3 \left(\frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} - \frac{8}{9} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{105} \pi a^3$$

۷-۶-۱۴ حجم حاصل از دوران یک قوس از سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

حول محور x ها را حساب کنید. جواب: $5\pi^2 a^3$

۷-۶-۱۵ حجم حاصل از دوران کاردیوئید $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ حول محور

قطبی را حساب کنید. شکل این کاردیوئید در شکل ۸۲ داده شده است.

حل. حجم مورد نظر تفاضل دو حجمی است که از دوران دناحیه $MNKLO$

و $OKLO$ حول محور x ها که همان محور قطبی است، ساخته می شود.

مثل مسئله قبل عمل می کنیم و اینجا φ را بعنوان پارامتر در نظر می گیریم،

$$x = \rho \cos \varphi = a \cos \varphi (1 + \cos \varphi),$$

$$y = \rho \sin \varphi = a \sin \varphi (1 + \cos \varphi).$$

واضح است که طول نقطه M برابر $2a$ است (مقدار x به ازای $\varphi = 0$). طول نقطه

K مینیمم تابع $x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$ است. حال می پردازیم به تعیین این مینیمم

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi) = 0,$$

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \frac{2}{3} \pi.$$

در $\varphi_1 = 0$ داریم $x_M = 2a$ ، و در $\varphi_2 = \frac{2}{3} \pi$ داریم $x_K = -\frac{a}{4}$.

پس حجم مطلوب را به صورت زیر حساب می کنیم:

$$V = \pi \int_{-\frac{a}{4}}^{2a} y_2^2 dx - \pi \int_{-\frac{a}{4}}^0 y_1^2 dx.$$

با توجه به تغییر متغیر $x = a \cos \varphi (1 + \cos \varphi)$ ، داریم:

$$y^2 = a^2 (1 + \cos \varphi)^2 \sin^2 \varphi,$$

$$dx = -a \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi) d\varphi,$$

x	φ
$-a/4$	$2\pi/3$
$2a$	0

,

x	φ
$-a/4$	$2\pi/3$
0	π

پس

$$V = \pi \int_{\frac{2}{3}\pi}^0 a^2 (1 + \cos \varphi)^2 \sin^2 \varphi [-a \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi)] d\varphi -$$

$$- \pi \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 \sin^2 \varphi [-a \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi)] d\varphi =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi (1 + \cos \varphi)^2 (1 + 2 \cos \varphi) d\varphi =$$

$$= \pi a^3 \int_{-1}^1 (1 - u^2) (1 + u)^2 (1 + 2u) du = \frac{8}{3} \pi a^3 \quad (u = \cos \varphi).$$

۷-۶-۱۶ حجم جسمی را در هریک از حالات زیر بدست آورید:

الف. محدود به استوانه $z = 4 - y^2$ ، صفحات مختصات و صفحه $x = a$

باشد،

ب. محدود به هیپربولوئید یک پارچه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ و صفحات $z = 1$

و $z = -1$ باشد،

ج. محدود به پارابولوئید $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ و صفحه $z = k$ ($k > 0$) باشد.

جواب: (الف) $\frac{16}{3}a$ (ب) $2\pi ab \left(1 + \frac{1}{3c^2}\right)$ (ج) $\frac{1}{2}abk^2\pi$

۷-۶-۱۷ قطعه‌ای از استوانه قائم با قاعده دایره‌ای شکل به شعاع a ، بوسیله

صفحه‌ای که از قطر قاعده گذشته و با آن زاویه α می‌سازد جدا شده است. حجم قسمت جدا شده را بیابید.

جواب: $\frac{2}{3}a^3 \tan \alpha$

۷-۶-۱۸ حجم هریک از اجسام دوار زیر را حساب کنید:

الف. ناحیه محدود به $xy = 4$ ، $x = 1$ ، $x = 4$ ، $y = 0$ حول محور x ها

دوران می‌کند،

ب. ناحیه محدود به $y = 2x - x^2$ ، $y = 0$ حول محور x ها دوران می‌کند،

ج. ناحیه محدود به $y = x^3$ ، $y = 0$ ، $x = 2$ حول محور y ها دوران

می‌کند،

د. ناحیه محدود به یک موج از منحنی $y = \sin x$ و محدود به $y = 0$ حول محور x ها دوران می کند،

ر. ناحیه محدود به $y = \pm 2$ ، $x^2 - y^2 = 4$ ، حول محور y ها دوران می کند،

ز. ناحیه محدود به $(y-a)^2 = ax$ ، $x=0$ ، $y=2a$ ، حول محور x ها دوران می کند.

جواب: (الف) 12π (ب) $\frac{16}{15}\pi$ (ج) $\frac{64}{5}\pi$ (د) π^2 (ه) $\frac{64}{3}\pi$ (ز) $\frac{4}{3}\pi a^3$

۷-۶-۱۹ حجم حاصل از دوران منحنی

$$y^2 = \frac{ax^3 - x^4}{a^2}$$

حول محور x ها را بیابید.

جواب: $\frac{\pi a^3}{20}$

۷-۶-۲۰ ناحیه محدود به منحنی $y = \sin x$ و خط $y = \frac{2}{\pi}x$ حول محور x ها دوران می کند، حجم حاصل را بیابید.

جواب: $\frac{\pi^2}{12}$

۷-۶-۲۱ ذوزنقه منحنی الضلع محدود به

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \cosh \frac{x}{a}$$

و خطوط

$$x_1 = -c, x_2 = c \ (c > 0)$$

را حول محور x ها دوران می دهیم، حجم حاصل را بیابید.

$$\text{جواب: } \frac{1}{4}\pi a^3 \left(e^{\frac{2c}{a}} - e^{-\frac{2c}{a}} \right) + \pi a^2 c = \frac{\pi a^3}{2} \sinh \frac{2c}{a} + \pi a^2 c$$

۷-۶-۲۲ ناحیه محدود به منحنی $y = \cos x$ و سهمی $y = \frac{9}{2\pi^2}x^2$ حول محور x ها دوران می کند. حجم حاصل را بیابید.

جواب: $\frac{\pi}{20}(6\pi + 5\sqrt{3})$

راهنمایی: طول نقاط تلاقی $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ ؛ $x_2 = \frac{\pi}{3}$ هستند.

۷-۶-۲۳ ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 1$ و سهمی $y^2 = \frac{3}{2}x$ را حول محور x ها دوران می دهیم، حجم حاصل را بیابید.

جواب: $\frac{19}{48}\pi$

۷-۶-۲۴ روی منحنی $y = x^3$ دو نقطه A و B بترتیب به طولهای

$a=1$ و $b=2$ ، انتخاب می کنیم.

ذوزنقه منحنی الضلع $aABb$ را حول محور x ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را حساب کنید.

جواب: $\frac{127}{7}\pi$.

۷-۶-۲۵ یک قوس گسترنده بیضی $x=a\cos t$; $y=b\sin t$ را که در ربع اول

واقع است حول محور x ها دوران می کند، حجم جسم حاصل را حساب کنید.

جواب: $\frac{16\pi c^3}{105ab^2}$ راهنمایی: معادلات گسترنده بیضی،

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t; \quad y = -\frac{c^2}{b} \sin^3 t$$

۷-۶-۲۶ ناحیه محدود به حلقه منحنی $x=at^3$; $y=a\left(t-\frac{t^3}{3}\right)$ ، حول

محور x ها دوران می کند، حجم حاصل را بیابید.

جواب: $\frac{4}{3}\pi a^3$

۷-۶-۲۷ حجم جسمهای حاصل از دوران لمنسکات

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

و y را حساب کنید.

$$\text{جواب: } \left[\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}; \frac{\pi a^3}{4} \left[\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right] \right]$$

راهنمایی: از محورهای قطبی استفاده کنید.

۷-۶-۲۸ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $\rho = a \cos^2 \varphi$ را

حول محور قطبی حساب کنید.

جواب: $\frac{4}{21}\pi a^3$

۷-۷ محاسبه طول قوس یک منحنی مسطح در مختصات قائم

اگر $y=y(x)$ معادله یک منحنی مسطح و $y'(x)$ مشتق آن، و پیوسته باشد،

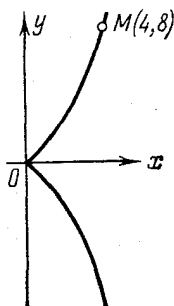
آنگاه طول قوس این منحنی از انتگرال

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

حساب می شود که a و b طولهای ابتدا و انتهای منحنی هستند.

۷-۷-۱ طول قوس منحنی $y^2 = x^3$ را که بین نقاط $(4, 8)$ و $(0, 0)$ واقع اند

حساب کنید (شکل ۹۷ را ببینید).



شکل ۹۷

حل. تابع $y_3(x)$ به ازای $x \geq 0$ تعریف شده است. چون نقاط مفروض در ربع اول قرار دارند پس، $y = x^{\frac{3}{2}}$ را در نظر می گیریم. از آنجا

$$y' = \frac{3}{2} \sqrt{x} \quad \text{و} \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

در نتیجه

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

۷-۷-۲ طول قسمتی از منحنی $y^2 = x^3$ را که بوسیله خط $x = \frac{4}{3}$ جدا

می شود، حساب کنید.

جواب: $\frac{112}{27}$

۷-۷-۳ طول قسمتی از منحنی $y = \ln \cos x$ را بدست آورید که بین

نقاط به طولهای $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ واقع است.

حل. چون $y' = -\tan x$ پس $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\tan^2 x} = \sec x$ بنابر

این

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \tan \frac{3\pi}{8}$$

۷-۷-۴ مطلوب است محاسبه طول قوس منحنی $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ از $x_1=a$

تا $x_2=b$ ($b > a$).

جواب: $\ln \frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$

۷-۷-۵ طول قسمتی از منحنی های $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ را که بین دو نقطه

به عرضهای $y=1$ و $y=2$ واقع است، حساب کنید.

حل. برای راحتی، y را بعنوان متغیر انتخاب می‌کنیم، پس

$$x' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2y} \quad \text{و} \quad \sqrt{1+x'^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right)^2} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}$$

بنابر این

$$l = \int_1^2 \sqrt{1+x'^2} dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right) dy = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

۷-۷-۶ محیط آستروئید $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ را حساب کنید.

حل. می‌دانیم که این منحنی نسبت به محورهای مختصات و نیمسازها، متقارن

است. بنابر این کافی است طول آن قسمت از قوس را حساب کنیم که بین نیمساز

$y = x_3$ و محور x ها واقع است و سپس نتیجه را هشت برابر بکنیم. در ربع اول داریم

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{2}}, \quad \text{و به ازای } x=a \text{ داریم } y=0, \quad \text{و وقتی } x = \frac{a}{2^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{داریم } y=x.$$

$$y' = \frac{3}{2} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}} = -x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

در نتیجه

$$l = 8 \int_{\frac{a}{2^{\frac{3}{2}}}}^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx = 6a.$$

توجه: اگر بخواهیم طول قوسی از آستروئید را که در ربع اول واقع است، حساب کنیم، انتگرال زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx.$$

که وقتی $x \rightarrow 0$ ، تابع زیر علامت انتگرال به بینهایت میل می‌کند.

۷-۷-۷ مطلوب است محاسبه طول مسیر $OABCO$ ، که شامل قسمتهایی از

منحنیهای $y^2 = 2x^3$ و $x^2 + y^2 = 20$ می‌باشد (شکل ۹۸ را ببینید).

حل. کافی است طول قوسهای $\widehat{OA}$ و $\widehat{AB}$ را حساب بکنیم. زیرا مسیر،

نسبت به محور x ها متقارن است، یعنی طول کل میسر برابر است با

$$l = 2(l_{\widehat{OA}} + l_{\widehat{AB}})$$

برای تعیین مختصات A ، دستگاه معادلات زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ y^2 = 2x^3, \end{cases}$$

داریم $A(2, 4)$. برای تعیین $l_{\widehat{OA}}$ به قرار زیر عمل می کنیم:

$$y = \sqrt{2} x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2} \sqrt{2} x, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{2} x}.$$

پس

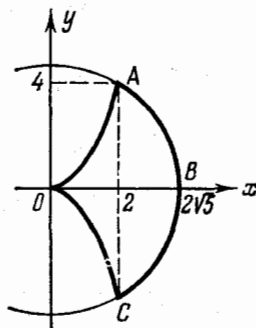
$$l_{\widehat{OA}} = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{2} x} dx = \frac{4}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

چون $l_{\widehat{AB}}$ روی دایره به شعاع $\sqrt{20}$ مقابل به زاویه مرکزی $\arctan 2$ است، پس

$$l_{\widehat{AB}} = \sqrt{20} \arctan 2.$$

بالاخره داریم:

$$l = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) + 4\sqrt{5} \arctan 2.$$



شکل ۹۸

۷-۷-۸ طول قسمتی از قوس یک منحنی را در حالات زیر بیابید:

الف. قسمتی از منحنی $y = \frac{x^2}{2} - 1$ که بوسیله محور x ها جدا می شود،

ب. قسمتی از منحنی $y = \ln(2 \cos x)$ که بین دو نقطه متوالی از نقاط تلاقی منحنی، با محور x ها قرار دارد.

ج. قسمتی از منحنی $3y^2 = x(x-1)^2$ که بین دو نقطه متوالی از نقاط تلاقی منحنی، با محور x ها قرار دارد. (نصف محیط یک حلقه).

جواب: (الف) $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ (ب) $2 \ln(2 - \sqrt{3})$ راهنمایی:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (\text{ج}) \quad x_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{\pi}{3}$$

۷-۷-۹ طول قسمتی از منحنی

$$y = \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]$$

را حساب کنید، که بین $x = a + 1$ و $x = 1$ قرار دارد.

$$\frac{a(a+2)}{2} \quad \text{جواب:}$$

۷-۷-۱۰ طول مسیر محدود به منحنی های $x^2 = (y+1)^3$ و $y = 4$ را

حساب کنید.

$$10 \left(\frac{67}{27} + \sqrt{5} \right) \quad \text{جواب:}$$

۷-۸ محاسبه طول قوس یک منحنی که معادله اش به صورت

پارامتری است

اگر معادلات منحنی به صورت $x = x(t)$, $y = y(t)$ باشند و مشتقات آنها،

یعنی، $x'(t)$, $y'(t)$ در فاصله $[t_1, t_2]$ پیوسته باشند، آنگاه طول قوس آن از رابطه زیر بدست می آید:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

که t_1 و t_2 مقادیر پارامتر t برای ابتداء و انتهای منحنی هستند ($t_1 < t_2$).

۷-۸-۱ طول گسترده دایره

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

را از $t=0$ تا $t=2\pi$ حساب کنید.

حل. از معادلات، نسبت به t مشتق می گیریم:

$$x'_t = at \cos t, \quad y'_t = at \sin t,$$

از آنجا $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = at$ پس

$$l = \int_0^{2\pi} at \, dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2a\pi^2.$$

۷-۸-۲ طول یک قوس از سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

را بدست آورید.

جواب: $8a$

۷-۸-۳ محیط آستروئید

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

را حساب کنید.

حل. از معادلات منحنی نسبت به t مشتق می گیریم:

$$x'_t = -3a \cos^2 t \sin t;$$

$$y'_t = 3a \sin^2 t \cos t.$$

پس

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} = 3a |\sin t \cos t| = \frac{3a}{2} |\sin 2t|$$

چون تابع $|\sin 2t|$ دارای دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$ است، پس

$$l = 4 \times \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, dt = 6a$$

توجه. اگر اشتباهاً بنویسیم

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 3a \sin t \cos t$$

نتیجه درستی بدست نمی آید، زیرا

$$3a \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt = \frac{3a}{2} \sin^2 t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

۷-۸-۴ طول حلقه منحنی

$$x = \sqrt{3}t^2 \text{ و } y = t - t^3$$

را حساب کنید.

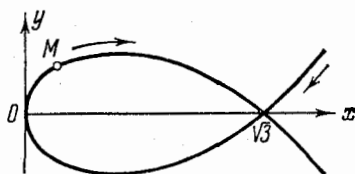
حل. هر دو تابع $x(t)$ و $y(t)$ به ازای تمام مقادیر t معین هستند. چون $x = \sqrt{3}t^2 \geq 0$ ، لذا منحنی در نیم صفحه راست، واقع است، چون با تغییر علامت t ، علامت $x(t)$ ثابت مانده ولی علامت $y(t)$ تغییر می کند، پس منحنی نسبت به محور x ها متقارن است. بعلاوه به ازای دو مقدار مختلف t ، مختصات دو نقطه متعلق بهم از محور x ها بدست می آید، بنابراین منحنی خودش را روی محور x ها قطع می کند. این نقاط با حل معادله $y = 0$ مشخص می شوند (شکل ۹۹ را ببینید).

جهتی روی منحنی که با علامت فلش مشخص شده است، جهت حرکت نقطه $M(x, y)$ را نشان می دهد وقتی که t از $-\infty$ تا ∞ تغییر می کند. ولی از $y = 0$ نتیجه می شود که $t_1 = 0$ ، $t_{2,3} = \pm 1$. چون $x(t_2) = x(t_3) = \sqrt{3}$ ، پس نقطه $(\sqrt{3}, 0)$ ، تنها نقطه ای است که منحنی خودش را قطع می کند. در نتیجه انتگرالگیری باید بین $t_2 = -1$ و $t_3 = 1$ انجام شود. از معادلات نسبت به t مشتق می گیریم، $x'_t = 2\sqrt{3}t$ ، $y'_t = 1 - 3t^2$ و از آنجا

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 1 + 3t^2$$

در نتیجه

$$l = \int_{-1}^1 (1 + 3t^2) dt = 4$$



شکل ۹۹

۷-۸-۵ مطلوب است محاسبه طول قوسی از منحنی $x = \frac{t^6}{6}$ ، $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ که

بین نقاط تلاقی اش با محورهای مختصات قرار دارد.

جواب: $\frac{13}{3}$.

راهنمایی: منحنی محورهای مختصات را در نقاط متناظر به $t_1 = 0$ و

$t_2 = \sqrt[4]{8}$ قطع می کند.

۷-۸-۶ محیط بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را حساب کنید.

حل . از معادلات پارامتری بیضی استفاده می کنیم :

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

از معادلات ، نسبت به t مشتق می گیریم :

$$x'_t = -a \sin t; \quad y'_t = b \cos t$$

از آنجا

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}$$

که e را خروج از مرکز بیضی گویند و مقدارش برابر

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

است ، پس

$$l = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt.$$

که انتگرال $\int_0^t \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt$ قابل تبدیل به توابع مقدماتی نیست که آن را انتگرال

بیضوی (یا الپتیک) از نوع دوم گویند که با فرض $t = \frac{\pi}{2} - \tau$ به صورت زیر نوشته می شود :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tau} d\tau = E(e),$$

که $E(e)$ نمادی برای انتگرال بیضوی کامل نوع دوم است .

در نتیجه برای محاسبه محیط بیضی فرمول $l = 4aE(e)$ مفید است . در عمل

فرض می کنند که $e = \sin \alpha$ ، و از جدول برای محاسبه

$$E_1(\alpha) = E_1(\arcsin e) = E(e).$$

استفاده می شود . مثلاً اگر $a = 10$ و $b = 6$ ، آنگاه

$$e = \frac{\sqrt{10^2 - 6^2}}{10} = 0.8 = \sin 53^\circ$$

با توجه به جدول مقادیر انتگرال بیضوی نوع دوم ، داریم :

$$l = 40E_1(53^\circ) = 40 \times 1.2776 \approx 51.1.$$

۷-۸-۷ طول قسمتی از منحنی

$$x = t^2, \quad y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$$

را که بین نقاط تلاقی اش با محور x ها قرار دارد، حساب کنید.

جواب: $4\sqrt{3}$

۷-۸-۸ محیط کاردیوئید به معادلات زیر را بیابید:

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

جواب: $16a$

۷-۸-۹ محیط منحنی

$$x = 4\sqrt{2}a \sin t; \quad y = a \sin 2t$$

بسته را بیابید.

جواب: $8\pi a$ راهنمایی: شکل ۸۰ را ببینید.

۷-۸-۱۰ محیط گسترده بیضی به معادلات

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, \quad y = -\frac{c^2}{b} \sin^3 t, \quad c^2 = a^2 - b^2$$

را بیابید. جواب: $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$

۷-۸-۱۱ طول قسمتی از منحنی

$$x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$$

$$y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$$

را که بین $t_1 = 0$ و $t_2 = \pi$ واقع است، حساب کنید.

جواب: $\frac{\pi^3}{3}$

۷-۸-۱۲ روی سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t)$$

نقطه ای را تعیین کنید که اولین قوس آن را با نسبت ۱:۳ تقسیم کند.

جواب: به ازای $t = \frac{2\pi}{3}$ نقطه $M \left[a \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \frac{3a}{2} \right]$

۹-۷ طول قوس یک منحنی در مختصات قطبی

اگر معادله منحنی همواری در مختصات قطبی به صورت $\rho = \rho(\varphi)$ باشد، طول قوس آن از رابطه

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$$

بدست می آید که φ_1 و φ_2 مقادیر زاویه قطبی φ برای نقاط انتهایی منحنی است ($\varphi_1 < \varphi_2$).

۹-۷-۱ طول یک دور از پیچ ارشیمیدس $\rho = a\varphi$ را حساب کنید.

حل. وقتی φ از ۰ تا 2π تغییر کند یک دور از منحنی پیچ ارشیمیدس، رسم می شود، پس

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \\ &= a \left[\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}) \right] \end{aligned}$$

۹-۷-۲ طول پیچ لگاریتمی $\rho = ae^{m\varphi}$ را بین نقطه معین (ρ_0, φ_0) و نقطه متحرک (ρ, φ) حساب کنید.

حل. در این حالت داریم (مهم نیست که کدام یک از مقادیر ρ یا ρ_0 بیشتر است):

$$\begin{aligned} l &= \left| \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{a^2 e^{2m\varphi} + a^2 m^2 e^{2m\varphi}} d\varphi \right| = \\ &= a \sqrt{1 + m^2} \left| \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{m\varphi} d\varphi \right| = a \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} |e^{m\varphi} - e^{m\varphi_0}| = \\ &= \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} |\rho - \rho_0| = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} |\Delta\rho|, \end{aligned}$$

یعنی، طول پیچ لگاریتمی با نمودار شعاع قطبی، متناسب است.

۹-۷-۳ محیط کاردیوئید

$$\rho = a(1 + \cos \varphi) \quad (a > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

را حساب کنید.

حل. از معادله منحنی مشتق می گیریم،

$$\rho'_{\varphi} = -a \sin \varphi,$$

از آنجا

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho'^2_{\varphi} + \rho^2} &= \sqrt{2a^2(1 + \cos \varphi)} = \sqrt{4a^2 \cos^2(\varphi/2)} = \\ &= 2a |\cos(\varphi/2)| = \begin{cases} 2a \cos(\varphi/2), & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ -2a \cos(\varphi/2), & \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

پس با استفاده از تقارن داریم

$$l = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a.$$

۷-۹-۴ مطلوب است محاسبه قسمتی از طول قوس لمنسکات

$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ ، که در سمت راست رأس واقع است. و بین نقطه متناظر به $\varphi = 0$ و هر نقطه دلخواه با زاویه قطبی $\varphi < \frac{\pi}{4}$ قرار دارد.

حل. اگر $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}$ ، آنگاه $\cos 2\varphi > 0$. بنابراین

$$\rho = a \sqrt{2 \cos 2\varphi}; \quad \rho'_{\varphi} = -\frac{a \sqrt{2} \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$$\sqrt{\rho'^2 + \rho^2} = \sqrt{2a^2 \left(\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} \right)} = \frac{a \sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

پس

$$l = a \sqrt{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a \sqrt{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \varphi}}.$$

این انتگرال را، انتگرال بیضوی از نوع اول گویند مقدارش به کمک جدولهای خاصی حساب می شود.

۷-۹-۵ طول قوس منحنی $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ را حساب کنید.

جواب: $1.5\pi a$

۷-۹-۶ قسمتی از طول خط راست $\rho = a \sec \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right)$ را که بین نقاط

متناظر به $\varphi = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ واقع است، حساب کنید.

حل.

$$\rho'_{\varphi} = a \sec \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) \tan \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\sqrt{\rho'^2 + \rho^2} = a \sec \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) \sqrt{1 + \tan^2 \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right)} = a \sec^2 \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right)$$

[چون تابع $\sec \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right)$ در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ مثبت است، لذا نماد قدر مطلق حذف

شده است.

$$l = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) d\varphi = \frac{4\sqrt{3}}{3} a$$

۷-۹-۷ طول منحنی بسته $\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ را حساب کنید.

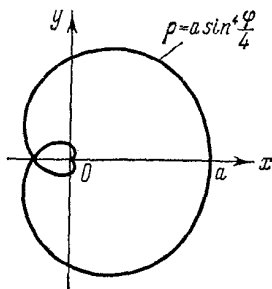
حل. چون تابع زوج است پس منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است، و چون دوره تناوب تابع 4π است بنابراین در نیمه ای از منحنی که φ از ۰ تا 2π تغییر کند شعاع قطبی از ۰ تا a صعود می کند، و نیمه دیگر با توجه به تقارن رسم می شود (شکل ۱۰۰)

بعلاوه، $\rho'_{\varphi} = a \sin^3(\varphi/4) \cos(\varphi/4)$ و اگر $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ آنگاه

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2_{\varphi}} = \sqrt{a^2 \sin^8(\varphi/4) + a^2 \sin^6(\varphi/4) \cos^2(\varphi/4)} = a \sin^3(\varphi/4)$$

پس

$$l = 2a \int_0^{2\pi} \sin^3(\varphi/4) d\varphi = 8a \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = \frac{16}{3} a \quad (\varphi = 4t).$$



شکل ۱۰۰

۷-۹-۸ طول قوس منحنی $\rho = \frac{1}{2}(\rho + 1/\rho)$ را بین $\rho = 2$ و $\rho = 4$ حساب

کنید.

حل. دیفرانسیل قوس، dl برابر است با

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_{\varphi}} d\varphi = \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2} = \sqrt{\rho^2 \left(\frac{d\varphi}{d\rho} \right)^2 + 1} d\rho$$

از معادله منحنی داریم

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right)$$

پس

$$l = \int_2^4 \sqrt{\rho^2 \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)^2 + 1} d\rho = \int_2^4 \sqrt{\frac{1}{4} \left(\rho^2 - 2 + \frac{1}{\rho^2} + 4\right)} d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^4 \sqrt{\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2} d\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2}{2} + \ln \rho\right) \Big|_2^4 = 3 + \frac{\ln 2}{2}.$$

۷-۹-۹ طول پیچ هندلولوی (یا پیچ هیپربولیک) $\rho\varphi = 1$ را بین $\varphi_1 = \frac{3}{4}$ و $\varphi_2 = \frac{4}{3}$ حساب کنید.جواب $\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}$ ۷-۹-۱۰ طول منحنی بسته $\rho = 2a(\sin \varphi + \cos \varphi)$ را حساب کنید.راهنمایی: منحنی $\rho = 2\sqrt{2}a \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ یک دایره است. .. جواب $2\sqrt{2}\pi a$ ۷-۹-۱۱ طول قوس منحنی $\rho = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$ را از $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ تا $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ حساب

کنید.

جواب $p [V^2 + \ln(1 + V^2)]$

۷-۱۰ محاسبه مساحت سطوح دوار

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی L به معادلهاز دستور $y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

بدست می آید. اغلب، این دستور را به صورت زیر می نویسند:

$$P = 2\pi \int_L y dl,$$

که در آن dl دیفرانسیل قوس است.

اگر معادله منحنی به شکل پارامتری یا در مختصات قطبی داده شده باشد. کافی است

در دستور فوق تغییر متغیر دهیم. (بخشهای ۷-۸ و ۷-۹ را ببینید).

۷-۱۰-۱ مساحت سطحی را که از دوران سیکلوئید

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

حول محور x ها حاصل می شود، حساب کنید.

حل. از معادله منحنی مشتق می گیریم:

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} y' = 0,$$

و یا

$$y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

پس

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{|x|^{\frac{1}{3}}}$$

چون منحنی نسبت به محور y ها متقارن است، بنابراین در محاسبه فرض می کنیم

$x \geq 0$ و سپس نتیجه را دو برابر می کنیم، بعبارت دیگر مساحت برابر است با

$$P = 2 \times 2\pi \int_0^a y \sqrt{1+y'^2} dx = 4\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx.$$

از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} &= t^2, \\ -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx &= 2t dt, \end{aligned} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 0 & a^{\frac{1}{3}} \\ a & 0 \\ \hline \end{array}.$$

پس

$$P = 12\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^{a^{1/3}} t^4 dt = \frac{12}{5} \pi a^2.$$

۷-۱۰-۲ مطلوب است محاسبه مساحت سطح حاصل از دوران منحنی

$OABCO$ که بوسیله منحنی های $y = x^2$ و $x = y^2$ بدست آمده است (شکل

۱۰۱) حول محور x ها.

حل. واضح است که منحنی ها در نقاط $O(0, 0)$ و $B(1, 1)$ همدیگر

را قطع می کنند. مساحت مورد نظر را با $P = P_1 + P_2$ نشان می دهیم، که در آن

مساحتی است که از دوران OCB و P_2 مساحتی است که از دوران OAB بدست

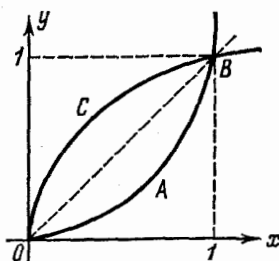
می آیند.

برای محاسبه P_1 از معادله $x = y^2$ استفاده می کنیم، داریم:

$$y = \sqrt{x} \quad \text{و} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

پس

$$\begin{aligned} P_1 &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{4x+1}}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{6} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5}-1). \end{aligned}$$



شکل ۱۰۱

برای محاسبه P_2 داریم:

$$y = x^2, \quad y' = 2x$$

$$P_2 = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1+4x^2} dx.$$

فرض می کنیم

$$x = \frac{1}{2} \sinh t, \quad dx = \frac{1}{2} \cosh t dt$$

از آنجا

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\operatorname{Arsinh} 2} \sinh^2 t \cosh^2 t dt = \frac{\pi}{32} \left(\frac{1}{4} \sinh 4t - t \right) \Big|_0^{\operatorname{Arsinh} 2} = \\ &= \frac{9\sqrt{5}\pi}{16} - \frac{1}{32} \pi \ln(2+\sqrt{5}). \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 = \frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6} + \frac{9\sqrt{5}\pi}{16} - \frac{1}{32} \pi \ln(2+\sqrt{5}) = \\ &= \frac{67\sqrt{5}\pi}{48} - \frac{\pi}{32} \ln(2+\sqrt{5}) - \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

۳-۱۰-۷ مساحت جسم دواری را حساب کنید که در هر یک از حالات زیر ساخته می شود:

(الف) قسمتی از منحنی $y = \frac{x^2}{2}$ که بوسیله خط $y = \frac{3}{2}$ قطع می شود، حول محور y ها دوران می کند.

(ب) قسمتی از منحنی $y^2 = 4 + x$ که بوسیله خط $x = 2$ قطع می شود، حول محور x ها دوران می کند.

جواب: (الف) $\frac{14\pi}{3}$ (ب) $\frac{62\pi}{3}$

۴-۱۰-۷ مساحت بیضوی را حساب کنید که از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ حول محور x ها ساخته می شود ($a > b$) حل. از معادله منحنی داریم:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}; \quad y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}$$

(در اینجا $y \geq 0$ فرض شده است). پس

$$P = 2\pi \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx =$$

$$= \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx = 2\pi ab \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right),$$

که در آن $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{c}{a}$ ، خروج از مرکز بیضی است وقتی $b \rightarrow a$ ، ε به صفر میل می کند، و

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

یعنی بیضوی تبدیل به کره شده و در نتیجه مساحت کره حساب می شود که برابر

$$P = 4\pi a^2$$

است.

۵-۱۰-۷ مساحت سطحی را حساب کنید که از دوران بیضی $4x^2 + y^2 = 4$

حول محور y ها ساخته می شود.

$$\text{جواب: } 2\pi \left(1 + \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

۶-۱۰-۷ قسمتی از منحنی زنجیری

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \cosh \frac{x}{a},$$

را که طول نقاط انتهایی آن بترتیب ۰ و x می باشند، حول محور x ها دوران می دهیم. نشان دهید که بین P و V که بترتیب مساحت و حجم جسم حاصل است رابطه $P = \frac{2V}{a}$ برقرار است.

حل. چون $y' = \sinh \frac{x}{a}$ ، داریم $\sqrt{1+y'^2} = \cosh \frac{x}{a}$. بنابراین

$$P = 2\pi \int_0^x y \sqrt{1+y'^2} dx = 2a\pi \int_0^x \cosh^2 \frac{x}{a} dx = \frac{2}{a} \pi \int_0^x a^2 \cosh^2 \frac{x}{a} dx,$$

ولی

$$\pi \int_0^x a^2 \cosh^2 \frac{x}{a} dx = \pi \int_0^x y^2 dx = V,$$

بنابراین

$$P = \frac{2V}{a}$$

۷-۱۰-۷ مساحت جسمی را حساب کنید که دوران یک حلقه از منحنی $9ax^2 = y(3a-y)^2$ حول محور y ها ساخته می شود. حل. وقتی y از ۰ تا $3a$ تغییر می کند، حلقه رسم می شود. از طرفین معادله نسبت به y مشتق می گیریم:

$$18axx' = (3a-y)^2 - 2y(3a-y) = 3(3a-y)(a-y)$$

از آنجا

$$xx' = \frac{(3a-y)(a-y)}{6a}$$

پس

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1+x'^2} dy = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{x^2 + (xx')^2} dy = \\ &= 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{\frac{y(3a-y)^2}{9a} + \frac{(3a-y)^2(a-y)^2}{36a^2}} dy = \frac{\pi}{3a} \int_0^{3a} (3a^2 + 2ay - y^2) dy = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

۷-۱۰-۸ مساحت جسمی را حساب کنید که از دوران منحنی $8y^2 = x^2 - x^4$ حول محور x ها حاصل می شود.

جواب: $\frac{\pi}{2}$

۷-۱۰-۹ قسمتی از منحنی $x = t^2$; $y = \frac{t}{3}(t^2-3)$ را که بوسیله محور

x ها جدا می شود، حول محور x ها دوران می دهیم، مساحت جسم حاصل را حساب کنید.

حل. از حل معادله $y=0$ داریم $t_1=0$ و $t_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ ، پس $x_1=0$ و $x_{2,3}=3$. معلوم می شود که منحنی در نقاط $(0,0)$ و $(3,0)$ محور x ها را قطع می کند. وقتی t تغییر علامت دهد، علامت تابع $x(t)$ ثابت مانده ولی علامت تابع $y(t)$ تغییر می کند، پس منحنی نسبت به محور x ها متقارن است (شکل ۱۰۲) برای محاسبه مساحت کافی است از منحنی OnB استفاده کنیم که تغییرات پارامتر برای این قسمت از ۰ تا $\sqrt{3}$ + است. از معادلات نسبت به t مشتق می گیریم، داریم:

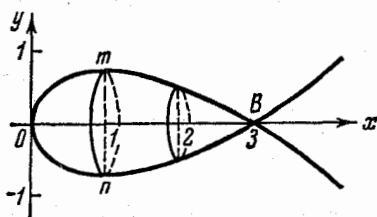
$$x'_t = 2t; \quad y'_t = t^2 - 1$$

و

$$dl = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = (1 + t^2) dt$$

پس

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} -\frac{t}{3} (t^2 - 3)(1 + t^2) dt = -\frac{2}{3} \pi \int_0^{\sqrt{3}} (t^5 - 2t^3 - 3t) dt = 3\pi \end{aligned}$$



شکل ۱۰۲

۱۰-۱۰-۷ مساحت چنبره ای را حساب کنید که از دوران دایره $x^2 + (y-b)^2 = r^2$ ($0 < r < b$) حول محور x ها بدست می آید.

حل. معادله پارامتری این دایره چنین است:

$$x = r \cos t; \quad y = b + r \sin t$$

پس

$$x'_t = -r \sin t; \quad y'_t = r \cos t$$

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{2\pi} (b + r \sin t) \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (b + r \sin t) dt = 4\pi^2 br. \end{aligned}$$

۱۱-۱۰-۷ مساحت سطحی را حساب کنید که از دوران لمنسکات

$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ حول محور قطبی بدست می آید.

حل. مقادیر حقیقی ρ به ازای $\cos 2\varphi \geq 0$ بدست می آیند، یعنی، وقتی

$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ (شاخه سمت راست منحنی). یا به ازای $\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \frac{5}{4}\pi$ (شاخه سمت چپ منحنی). از معادله منحنی داریم:

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \left(\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2} d\varphi = \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

و

$$y = \rho \sin \varphi = a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}$$

مساحت سطحی که از دوران شاخه سمت راست حاصل می شود، برابر است با:

$$P = 2 \times 2\pi \int_L y dl = 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}).$$

۱۲-۱۰-۷ قسمتی از دایره $x^2 + y^2 = a^2$ را که بین نقاط $B(0, a)$ و

$A(a, 0)$ واقع است، حول خط $x + y = a$ دوران می دهیم. مساحت جسم حاصل را

بیابید.

حل. طول MN ، فاصله نقطه متحرک $M(x, y)$ از دایره $x^2 + y^2 = a^2$ تا

خط $x + y = a$ را حساب می کنیم چون به ازای نقاطی از دایره که در ربع اول واقع اند،

$x + y \geq a$ ، پس:

$$MN = \frac{|x + \sqrt{a^2 - x^2} - a|}{\sqrt{2}} = \frac{x + \sqrt{a^2 - x^2} - a}{\sqrt{2}}$$

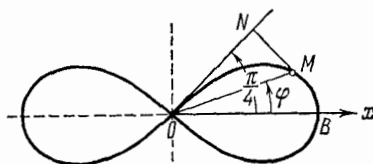
و

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2} dx = \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

پس

$$P = 2\pi \int_0^a \frac{x + \sqrt{a^2 - x^2} - a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ = \sqrt{2} \pi a \left[-\sqrt{a^2 - x^2} + x - a \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} (4 - \pi).$$

۷-۱۰-۱۳ مساحت سطحی را حساب کنید که از دوران یک شاخه از لمنسکات $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ حول خط $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ساخته می شود.



شکل ۱۰۳

حل. در مثلث OMN (شکل ۱۰۳)، MN را حساب می کنیم که فاصله نقطه دلخواه M از شاخه سمت راست تا محور دوران $\varphi = \frac{\pi}{4}$ است

$$MN = \rho \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right) = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right)$$

همچنین

$$dl = \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

بنابراین

$$P = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right) \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2.$$

۷-۱۰-۱۴ قسمتی از منحنی $y = \frac{x^3}{3}$ را که بین $x = -2$ و $x = 2$ واقع است، حول محور x ها دوران می دهیم، مساحت جسم حاصل را بیابید.

$$\text{جواب: } \frac{\pi}{9} (34\sqrt{17} - 2)$$

۷-۱۰-۱۵ منحنی $y = \sin x$ مفروض است، نصف یک موج از منحنی را حول محور x ها دوران می دهیم. مساحت سطح حاصل را حساب کنید.

$$\text{جواب: } 2\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$$

۷-۱۰-۱۶ قوسی از سهمی $x^2 = 4ay$ که بوسیله خط $y = 3a$ جدا می شود حول محور y ها دوران می کند، مساحت سطح حاصل را بیابید.

$$\text{جواب: } \frac{56}{3} \pi a^2$$

۷-۱۰-۱۷ قسمتی از منحنی $x = e^t \sin t$; $y = e^t \cos t$ که بین نقاط متناظر $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ قرار دارد حول محور x ها دوران می کند. مساحت سطح حاصل را حساب کنید.

جواب: $\frac{2\sqrt{2}}{5} \pi (e^{\pi} - 2)$

۷-۱۰-۱۸ قسمتی از منحنی $x = \frac{t^3}{3}$; $y = 4 - \frac{t^2}{2}$ که بین نقاط تلاقی اش با محورهای مختصات قرار دارد حول محور x ها دوران می کند. مساحت سطح حاصل را حساب کنید.

جواب: 29.6π .

۷-۱۰-۱۹ مساحت حاصل از دوران منحنی $\rho = 2a \sin \varphi$ را حول محور قطبی حساب کنید.

جواب: $4\pi^2 a^2$

۷-۱۰-۲۰ کاردیوئید

$$\begin{aligned} x &= a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y &= a(2 \sin t - \sin 2t). \end{aligned}$$

را حول محور x ها دوران می دهیم مساحت جسم حاصل را حساب کنید.

جواب: $\frac{128}{5} \pi a^2$

۷-۱۱ کاربرد هندسی انتگرال معین

۷-۱۱-۱ سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

مفروض است (شکل ۱۰۴ را ببینید). مطلوب است محاسبه:

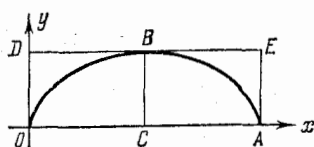
(الف) مساحت سطوحی که از دوران منحنی OBA حول محورهای x و y حاصل می شوند،

(ب) حجم اجسامی که از دوران منحنی $OBAO$ حول محور y ها و حول خط BC ساخته می شوند،

(ج) مساحت سطح حاصل از دوران منحنی BA حول خط BC ،

(د) حجم حاصل از دوران ناحیه $ODBEABO$ حول خط مماس DE .

(ه) مساحت جسم مذکور در قسمت (د) را حساب کنید.



شکل ۱۰۴

حل . (الف) مساحت حاصل از دوران OBA حول محور x ها برابر است با :

$$P_x = 2\pi \int_L y \, dl = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} \, dt =$$

$$= 8a^2\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} \, dt = \frac{64\pi a^2}{3}$$

وقتی منحنی حول محور y ها دوران می کند جسمی به حجم زیر ساخته

می شود

$$P_y = 2\pi \int_L x \, dl = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} \, dt +$$

$$+ 4\pi a^2 \int_{\pi}^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} \, dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} \, dt = 16\pi^2 a^2.$$

(ب) وقتی منحنی $OBAO$ حول محور y ها دوران می کند جسمی به حجم

زیر ساخته می شود

$$V_y = \pi \int_0^{2a} (x_2^2 - x_1^2) \, dy = \pi \int_0^{2a} x_2^2 \, dy - \pi \int_0^{2a} x_1^2 \, dy,$$

که در آن $x = x_1(y)$ معادله منحنی BA ، و $x = x_2(y)$ معادله منحنی OB است .

برای محاسبه انتگرالها از تغییر متغیر $y = a(1 - \cos t)$ استفاده می کنیم که درانتگرال

اول t بین 2π و π ، و درانتگرال دوم بین 0 و π تغییر می کند، درنتیجه

$$V_y = \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 a \sin t \, dt - \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 a \sin t \, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_{2\pi}^0 (t - \sin t)^2 \sin t \, dt =$$

$$= \pi a^3 \left[\int_{2\pi}^0 t^2 \sin t \, dt - \int_{2\pi}^0 t(1 - \cos 2t) \, dt + \int_{2\pi}^0 \sin^3 t \, dt \right] = 6\pi^3 a^3.$$

برای محاسبه حجم جسمی که از دوران ناحیه $OBAO$ حول BC ایجاد می‌شود، نخست مبدا مختصات را به نقطه C منتقل می‌کنیم که معادله منحنی در دستگاه جدید به صورت زیر است:

$$x' = a(t - \pi - \sin t); \quad y' = a(1 - \cos t).$$

در محاسبه کافی است منحنی BA را در نظر بگیریم:

$$V = \pi \int_0^{2a} x'^2 dy' = \pi a^3 \int_{2\pi}^{\pi} (t - \pi - \sin t)^2 \sin t dt.$$

از تغییر متغیر $t - \pi = z$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V &= -\pi a^3 \int_{\pi}^0 (z + \sin z)^2 \sin z dz = \pi a^3 \int_0^{\pi} (z + \sin z)^2 \sin z dz = \\ &= \frac{\pi a^3}{6} (9\pi^2 - 16). \end{aligned}$$

(ج) محوره‌های مختصات را مانند حالت قبل انتخاب می‌کنیم، داریم:

$$dl = 2a \sin \frac{t}{2} |dt| = -2a \sin \frac{t}{2} dt.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2a} 2\pi x dl = -4\pi a^2 \int_{2\pi}^{\pi} (t - \pi - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (z + \sin z) \cos \frac{z}{2} dz = 4 \left(2\pi - \frac{8}{3} \right) \pi a^2. \end{aligned}$$

(د) مبدا مختصات را به نقطه B انتقال می‌دهیم و جهت محور y ها را عوض

می‌کنیم، داریم:

$$x' = a(t - \pi - \sin t), \quad y' = a(1 + \cos t).$$

با فرض $t - \pi = z$ داریم،

$$x' = a(z + \sin z), \quad y' = a(1 - \cos z),$$

در قوس OBA ، متغیر z از $-\pi$ تا π تغییر می‌کند. پس

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} a^3 (1 - \cos z)^2 (1 + \cos z) dz = \pi^2 a^3. \\ P &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} y dl = 4\pi a^2 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos z) \cos \frac{z}{2} dz = \frac{32}{3} \pi a^3. \end{aligned} \quad (\text{هـ})$$

۷-۱۱-۲ مطلوب است محاسبه حجم جسمی که به سطوح $x^2 + y^2 = 2x$ و $z^2 = 8(2-x)$ محدود است.

حل. مولد استوانه اول، با محور y ها موازی است، هادی آن سهمی $z^2 = 8(2-x)$ است که در صفحه xOz واقع است. مولد استوانه دوم موازی محور z ها بوده و هادی آن دایره $x^2 + y^2 = 2x$ است که در صفحه xOy قرار دارد. حجم مطلوب از دستور

$$V = \int_0^2 S(x) dx.$$

حساب می شود که $S(x)$ مساحت مثلثی است که قاعده اش برابر $2y$ و ارتفاعش با $2z$ برابر است، پس

$$S(x) = 2y \times 2z = 4 \sqrt{2x-x^2} \sqrt{8(2-x)}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 4 \sqrt{x(2-x)} 8(2-x) dx = 4 \sqrt{8} \int_0^2 (2-x) \sqrt{x} dx = \\ &= 4 \sqrt{8} \left(\frac{2}{3} 2 \sqrt{x^3} - \frac{2}{5} \sqrt{x^5} \right) \Big|_0^2 = \frac{256}{15}. \end{aligned}$$

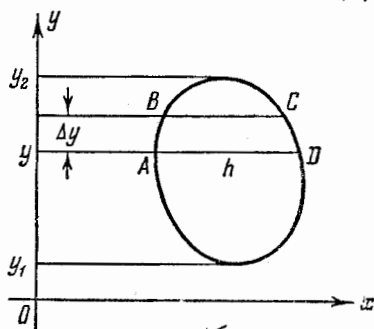
۷-۱۱-۳ اگر S ناحیه محدب واقع بین دو خط به عرضهای y_1 و y_2 باشد (شکل ۱۰۵). این ناحیه را حول محور x ها دوران می دهیم. ثابت کنید حجم جسم حاصل از رابطه زیر بدست می آید:

$$V = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} y h dy,$$

که در آن

$$h = x_2(y) - x_1(y),$$

$x = x_1(y)$ معادله سمت چپ و $x = x_2(y)$ معادله سمت راست مرز ناحیه S است.



شکل ۱۰۵

حل. فاصله $[y_1, y_2]$ را به فاصله‌های جزء تقسیم می‌کنیم و از نقاط حاصل خطوطی به موازات محور دوران رسم می‌کنیم، با این ترتیب ناحیه S به نوارهای موازی تقسیم می‌شود. ناحیه مستطیلی شکل $ABCD$ را در نظر می‌گیریم که قاعده تحتانی آن $AD = h$ که روی خط افقی به عرض y قرار دارد و ارتفاع آن AB ، و آن را با Δy نشان می‌دهیم. حجم جسمی که از دوران مستطیل $ABCD$ حول محور x ها ساخته می‌شود تقریباً برابر است با:

$$\Delta V \approx \pi (y + \Delta y)^2 h - \pi y^2 h = 2\pi y \Delta y h + \pi h (\Delta y)^2$$

اگر از بینهایت کوچک مرتبه دوم نسبت به Δy صرف‌نظر کنیم، باقیمانده قسمت اصلی دیفرانسیل حجم است

$$dV = 2\pi y h dy$$

از آنجا

$$V = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} y h dy.$$

باین ترتیب فرمول دیگری بدست می‌آید که می‌توان برای محاسبه حجم از آن استفاده کرد. ۷-۱۱-۴ ناحیه‌ای که به سهمی $y = 2x^2 + 3$ ، و محور x ها و دو خط قائم $x=0$ و $x=1$ محدود است، حول محور y ها دوران می‌کند، حجم حاصل را بیابید.

حل. ناحیه را به نوارهای موازی با محور y ها تقسیم می‌کنیم. ΔV حجمی است که از دوران یکی از این ناحیه‌ها بدست آمده است

$$\Delta V = \pi (x + \Delta x)^2 y - \pi x^2 y = 2\pi xy \Delta x + \pi y (\Delta x)^2$$

که در آن Δx پهنای نوار است. از بینهایت کوچک مرتبه دوم نسبت به Δx صرف‌نظر می‌کنیم، و دیفرانسیل حجم بدست می‌آید

$$dV = 2\pi xy dx.$$

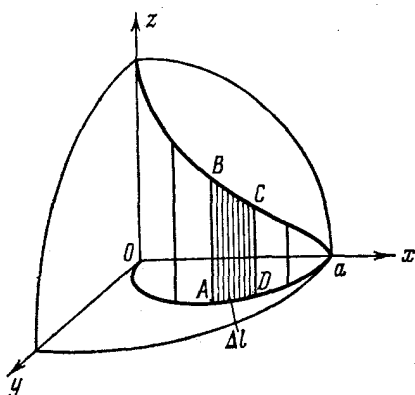
پس

$$V = \int_0^1 2\pi xy dx = 2\pi \int_0^1 x (2x^2 + 3) dx = 4\pi.$$

۷-۱۱-۵ مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = ax$ را که بوسیله کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

محدود می‌شود، حساب کنید.



شکل ۱۰۶

حل. مولد استوانه موازی محور z ها است و دایره هادی آن است (شکل ۱۰۶ یک چهارم مساحت مطلوب را نشان می دهد). آن قسمت از مساحت را که در شکل ۱۰۶ نشان داده شده است به قوسهای کوچک Δl تقسیم می کنیم. بوسیله خطوط موازی با محور z ها سطح استوانه را به نوارهایی تقسیم می کنیم. اگر از بینهایت کوچکهای از مرتبه بالاتر صرف نظر کنیم، مساحت نوار $ABCD$ برابر می شود با

$$CD \cdot \Delta l$$

اگر ρ و φ مختصات قطبی نقطه D باشند، آنگاه $\rho = a \cos \varphi$ و $CD = \sqrt{a^2 - \rho^2} = a \sin \varphi$ و $\Delta l = a \cdot \Delta \varphi$ ، از آنجا دیفرانسیل مساحت بدست می آید:

$$dP = a^2 \sin \varphi d\varphi.$$

پس

$$P = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin \varphi d\varphi = 4a^2.$$

۷-۱۱-۶ استوانه قائمی به قاعده دایره ای شکل، مفروض است. آن را بوسیله صفحه ای که از قطر قاعده می گذرد و با آن زاویه $\frac{\pi}{4}$ درجه می سازد، قطع می دهیم. آن قسمت از مساحت استوانه که بوسیله این صفحه جدا می شود، حساب کنید.

حل. محور z ها را محور استوانه فرض می کنیم و قطر مفروض را محور x ها در نظر می گیریم. بنابر این معادله قاعده $x^2 + y^2 = a^2$ است و صفحه ای که با صفحه

قاعده یعنی با صفحه xOy زاویه $\frac{\pi}{4}$ درجه می سازد، صفحه $y=z$ است. مساحت نوار باریک $ABCD$ برابر $dP = zdl$ است (شکل ۱۰۷ را ببینید)، (از بینهایت کوچک مرتبه بالا تر صرف نظر شده است) که dl عنصر قوس محیط قاعده است. در مختصات قطبی داریم:

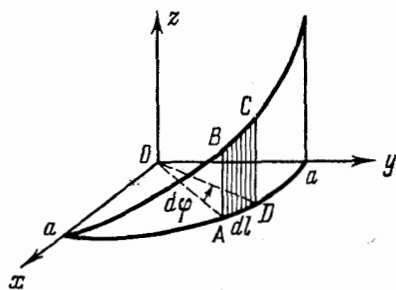
$$z = y = a \sin \varphi; \quad dl = a d\varphi$$

پس

$$dP = a^2 \sin \varphi d\varphi$$

و

$$P = a^2 \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = a^2 [-\cos \varphi]_0^{\pi} = 2a^2$$



شکل ۱۰۷

۷-۱۱-۷ محوروهای دو استوانه که قاعده هایشان دایره های برابر هستند، برهم عمودند. مساحت سطح جسمی را حساب کنید که بوسیله دو استوانه محدود می شود. جواب: $a^2 \pi$ ، $16a^2$ شعاع قاعده استوانه است.

۷-۱۱-۸ ناحیه محدود به سهمی $x^2 = y - 1$ و محور x ها و دو خط $x=1$ و $x=0$ را حول محور y ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را حساب کنید.

جواب: 1.5π

۷-۱۱-۹ مطلوب است محاسبه مساحت بیضی به معادله زیر

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (\delta = AC - B^2 > 0; \quad C > 0)$$

حل. از معادله، y را حساب می کنیم:

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{C - \delta x^2}}{C}; \quad y_2 = \frac{-Bx + \sqrt{C - \delta x^2}}{C},$$

که در آنها مقدار x باید در نامساوی زیر صدق کند

$$C - \delta x^2 \geq 0.$$

این نامساوی را حل می کنیم و حدود انتگرالگیری حساب می شود

$$-\sqrt{\frac{C}{\delta}} \leq x \leq \sqrt{\frac{C}{\delta}}$$

و مساحت بیضی برابر است با

$$S = \int_{-\sqrt{\frac{C}{\delta}}}^{\sqrt{\frac{C}{\delta}}} (y_2 - y_1) dx = \frac{4}{C} \int_0^{\sqrt{\frac{C}{\delta}}} \sqrt{C - \delta x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

۷-۱۱-۱۰ مساحت محدود به هریک از منحنیهای زیر را حساب کنید:

(a) $x = 2t - t^2; \quad y = 2t^2 - t^3;$

(b) $x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}.$

جواب: (a) $\frac{8}{15};$ (b) $\frac{7}{50} - \frac{1}{4} \arctan \frac{1}{2}.$

۷-۱۱-۱۱ مساحت محدود به هریک از منحنیهای زیر را حساب کنید:

(a) $\rho = a \sin 3\varphi$ (رز سه برگی)

(b) $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi} \left[\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right];$

(c) $\rho = 3 \sin \varphi$ و $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi.$

جواب: (a) $\frac{\pi a^2}{4};$ (b) $\frac{p^2}{6} (3 + 4\sqrt{2});$ (c) $\frac{1}{8} (5\pi + 6\sqrt{3}).$

۷-۱۱-۱۲ طول قسمتی از منحنی $y^2 = \frac{4}{9} (2-x)^3$ را حساب کنید که

بوسیله خط $x = -1$ جدا می شود.

۷-۱۱-۱۳ طول قوس OA از منحنی $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$

را حساب کنید که $O(0, 0); A\left(\frac{a}{2}, a \ln \frac{4}{3}\right)$ جواب: $\frac{a}{2} (2 \ln 3 - 1)$

۷-۱۱-۱۴ طول آن قسمت از منحنی $y^2 = \frac{2}{3} (x-1)^3$ را حساب کنید که

درون سهمی $y^2 = \frac{x}{3}$ قرار دارد. جواب: $\frac{\sqrt{2}}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$

۷-۱۱-۱۵ ثابت کنید که طول محیط بیضی

$$x = \sqrt{2} \sin t; \quad y = \cos t$$

با طول یک موج از منحنی $y = \sin x$ برابر است.

۷-۱۱-۱۶ ثابت کنید که طول قسمتی از قوس سهمی $y = \frac{1}{2p} x^2$ متناظر به

فاصله $0 \leq x \leq a$ ، با طول قوس پیچ $\rho = P\varphi$ در فاصله تغییرات $0 \leq \rho \leq a$ برابر است.

۷-۱۱-۱۷ نسبت مساحت حلقه $V\bar{x}$ $y = \pm \left(\frac{1}{3} - x\right)$ به مساحت

دایره ای را تعیین کنید که محیط دایره با محیط حلقه برابر باشد.

جواب: $2\pi \frac{\sqrt{3}}{15}$

۷-۱۱-۱۸ حجم سهموی (یا پارابولونید بیضی شکل) $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$ را

حساب کنید که به صفحه $x = a$ محدود است.

جواب: $\pi a^2 \sqrt{pq}$

۷-۱۱-۱۹ مطلوب است محاسبه حجم محدود به هذلولوی گون (یا هیپربولونید)

$$z = l > c \quad \text{و} \quad z = c \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

جواب: $\pi ab \left(\frac{l^3}{3c^2} - l + \frac{2c}{3} \right)$

۷-۱۱-۲۰ حجم مخروط قائمی با ارتفاع h را حساب کنید که قاعده اش

بیضی با نیم قطرهای a و b باشد.

جواب: $\frac{\pi abh}{3}$

۷-۱۱-۲۱ ناحیه محدود به خطوط $y = x + 1$ و $y = 2x + 1$ و $x = 2$ را حول

محور x ها دوران می دهیم، حجم حاصل را حساب کنید.

جواب: 12π

۷-۱۱-۲۲ ناحیه محدود به هذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ و خط $2ay - bx = 0$

و محور x ها را حول محور x ها دوران می دهیم، حجم حاصل را بیابید.

جواب: $\left(\frac{4\sqrt{3}-6}{9} \right) \pi b^2 a$

۷-۱۱-۲۳ حجم حاصل از دوران منحنی $\rho = a \cos^2 \varphi$ را حول محور قطبی

حساب کنید.

جواب: $\frac{4}{21} \pi a^3$

۷-۱۱-۲۴ مساحت سطح حاصل از دوران هریک از منحنیهای زیر را حساب

کنید:

$$(a) \quad y = \tan x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}) \quad \text{حول محور } x \text{ ها،}$$

$$(b) \quad y = x \sqrt{\frac{x}{a}} \quad (0 \leq x \leq a) \quad \text{حول محور } x \text{ ها،}$$

$$(c) \quad x^2 + y^2 - 2rx = 0 \quad \text{حول محور } x \text{ ها بین } 0 \text{ و } h \text{ واقع است،}$$

$$(a) \quad \pi \left[(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 1) \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right]; \quad \text{جواب:}$$

$$(b) \quad \frac{4\pi a^2}{243} \left(21\sqrt{13} + 2 \ln \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right); \quad (c) \quad 2\pi rh.$$

۱۲-۷ محاسبه فشار، کار و سایر کمیت‌های فیزیکی

بوسیله انتگرال معین

I. برای محاسبه نیروی فشار مایعات از قانون پاسکال استفاده می‌شود که به

صورت

$$P = \gamma h S$$

بیان می‌گردد، که در آن S مساحت سطحی است که فشار بر آن وارد می‌شود و h عمق مایع و γ چگالی آن است.

II. اگر نیروی متغیر $X = f(x)$ ، در امتداد محور x ها عمل کند کار این نیرو در فاصله $[x_1, x_2]$ با انتگرال

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

حساب می‌شود.

III. انرژی جنبشی یک نقطه مادی به جرم m و سرعت v از دستور زیر

حساب می‌شود:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

IV. نیرویی که دوبار الکتریکی فاصله r و بارهای e_1 و e_2 بر یکدیگر

وارد می‌کنند برابر است با:

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

توجه. در حل مسائل عملی، فرض بر این است که تمام اطلاعات در یک سیستم

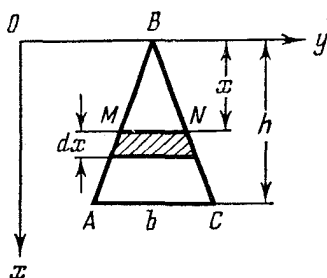
واحدی داده شده است و از ابعاد کمیت‌های متناظر صرف‌نظر می‌کنیم.

۷-۱۲-۱ مطلوب است محاسبه نیروی فشار بر یک مثلث به حالت قائم به قاعده b و ارتفاع h که قاعده‌اش در پایین و رأس آن در سطح آزاد مایع واقع شده باشد. حل. دستگاه مختصات را مطابق شکل ۱۰۸ فرض می‌کنیم و در عمق دلخواه x ، نوار باریک افقی به عرضی dx در نظر می‌گیریم.

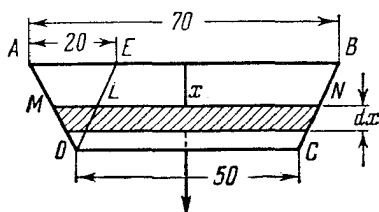
این نوار را یک مستطیل فرض می‌کنیم و دیفرانسیل سطح را حساب می‌کنیم $dS = MN \, dx$. از تشابه دو مثلث ABC و BMN داریم

$$\frac{MN}{b} = \frac{x}{h}$$

که در آن $MN = \frac{bx}{h}$ و $dS = \frac{bx}{h} \, dx$.



شکل ۱۰۸



شکل ۱۰۹

نیروی فشار وارده بر این نوار برابر $dP = x \, dS$ است (توجه کنید که چگالی آب برابر یک است). پس تمام نیروی فشار که به مثلث وارد می‌شود برابر است با:

$$P = \int_0^h x \, dS = \frac{b}{h} \int_0^h x^2 \, dx = \frac{1}{3} b h^3.$$

۷-۱۲-۲ نیم دایره‌ای بشاع R بطور قائم در داخل مایعی طوری قرار گرفته است که قطر آن بر سطح آزاد مایع منطبق است. نیروی فشار وارد بر آن را حساب کنید (چگالی مایع γ است).

جواب: $\frac{2}{3} \gamma R^3$

۷-۱۲-۳ سدی دوزنقه‌ای شکل به حالت قائم، مفروض است که طول قاعده فوقانی آن ۷۰ متر، و طول قاعده تحتانی آن ۵۰ متر و ارتفاعش ۲۰ متر است. نیروی فشار آب وارد به سد را حساب کنید (شکل ۱۰۹).

حل. دیفرانسیل سطح (dS) ، تقریباً برابر $dS = MN dx$ است. از تشابه دو مثلث OAE و OML داریم $\frac{ML}{20} = \frac{20-x}{20}$ ، که در آن $ML = 20 - x$ ، $MN = 20 - x + 50 = 70 - x$

پس

$$dS = MN \times dx = (70 - x) dx$$

و دیفرانسیل نیروی فشار آب برابر است با:

$$dP = x dS = x(70 - x) dx$$

از این عبارت نسبت به x از ۰ تا ۲۰ انتگرال می گیریم:

$$P = \int_0^{20} (70x - x^2) dx = 11\,333 \frac{1}{3}$$

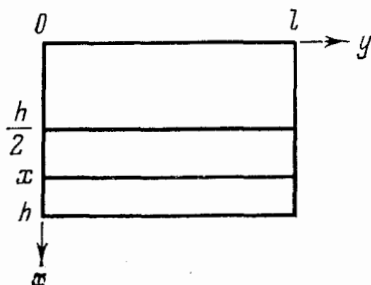
۴-۱۲-۷ مطلوب است محاسبه کار انجام شده از تخلیه یک دیگ بخار نیم

کروی شکل به شعاع R .

$$\text{جواب: } \frac{\pi R^4}{4}$$

۵-۱۲-۷ در یک ظرف مستطیلی شکل، به حجمهای مساوی آب و روغن

ریخته شده است. سنگینی آب با دو برابر سنگینی روغن برابر است. نشان دهید که نیروی فشار وارده بر دیواره طرف یک پنجم نیروی فشاری است که اگر بجای آن، روغن در ظرف ریخته شود.



شکل ۱۱۰

حل. فرض می کنیم h عمق ظرف و l درازای دیواره آن باشد. محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۱۰ انتخاب می کنیم. چون روغن سبکتر از آب است، بنابراین نیمه فوقانی ظرف را اشغال می کند و نیروی فشاری که بر دیواره وارد می شود برابر است با

$$P_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{h}{2}} xl \, dx = \frac{lh^2}{16}$$

فشار در عمق $x > \frac{h}{2}$ ، شامل فشار روغن به ارتفاع $\frac{h}{2}$ که به صورت ستونی وارد می شود باضافه فشار آب که به صورت ستونی به ارتفاع $x - \frac{h}{2}$ وارد می شود، می باشد، بنابراین

$$dP_2 = \left[\frac{h}{2} \times \frac{1}{2} + \left(x - \frac{h}{2} \right) \right] l dx = \left(x - \frac{h}{4} \right) l dx.$$

در نتیجه، نیروی فشاری که از طرف مایع مخلوط در نیمه تحتانی بردیواره وارد می شود، برابر است با

$$P_2 = \int_{\frac{h}{2}}^h l \left(x - \frac{h}{4} \right) dx = \frac{lh^2}{4}$$

تمام نیروی فشار مایع مخلوط به دیواره برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{lh^2}{4} + \frac{lh^2}{16} = \frac{5}{16} lh^2$$

اگر تمام ظرف را فقط با روغن پر بکنیم و نیروی فشار را با $\bar{P}$ نشان دهیم، داریم:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \int_0^h xl dx = \frac{lh^2}{4}$$

پس

$$P - \bar{P} = \frac{1}{16} lh^2 = \frac{1}{5} P$$

۶-۱۲-۷ بار الکتریکی E که در مبداء مختصات متمرکز است بار e را از نقطه $(a, 0)$ تا نقطه $(b, 0)$ دفع می کند. کار انجام شده A را توسط نیروی رانش F حساب کنید.

حل. دیفرانسیل کار در تغییر مکان dx برابر است با

$$dA = F dx = \frac{eE}{x^2} dx$$

پس

$$A = eE \int_a^b \frac{dx}{x^2} = eE \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

وقتی $b \rightarrow \infty$ کار A به $\frac{eE}{a}$ میل می کند.

۷-۱۲-۷ راکتی به وزن P از زمین به طور قائم به طرف بالا تا ارتفاع h پرتاب می شود. کار انجام شده را حساب کنید.

حل. نیروی جاذبه راکت بوسیله زمین را با F ، جرم راکت را با m_R ، و جرم

زمین را با m_E ، نشان می دهیم . طبق قانون نیوتن داریم :

$$F = k \frac{m_R m_E}{x^2}$$

که x فاصله بین راکت و مرکز زمین است . فرض می کنیم $K = km_R m_E$ ، پس

$$F(x) = \frac{K}{x^2}, \quad R \leq x \leq h + R$$

که R شعاع زمین است . به ازای $x = R$ نیروی $F(R)$ با وزن راکت (P) برابر است ، یعنی $F(R) = P = \frac{K}{R^2}$ ، که در آن $K = PR^2$ ، و $F(x) = \frac{PR^2}{x^2}$.
دیفرانسیل کار انجام شده عبارت است از

$$dA = F(x) dx = \frac{PR^2}{x^2} dx.$$

و مقدار کار برابر است با

$$A = \int_R^{R+h} F(x) dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = \frac{PRh}{R+h}$$

و

$$\lim_{h \rightarrow \infty} A(h) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{PRh}{R+h} = PR$$

مقدارکاری است که موتور راکت برای خروج از جاذبه زمین انجام می دهد (از حرکت زمین صرف نظر شده است) .

۸-۱۲-۷ یک کره آهنی به شعاع R حول خودش با سرعت زاویه ای ω

می چرخد . کار لازم برای متوقف کردن آن چقدر است ؟

حل . مقدار کار ، با انرژی جنبشی کره برابر است . برای محاسبه این انرژی ،

کره را به استوانه های توخالی هم مرکز به ضخامت dx ، تقسیم می کنیم . سرعت در هر نقطه استوانه ای به شعاع x با ωx برابر است .

عنصر حجم استوانه برابر

$$dV = 4\pi x \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

است و عنصر جرم با

$$dM = \gamma dV$$

برابر است که γ چگالی آهن است ، و دیفرانسیل انرژی جنبشی برابر است با

$$dK = 2\pi\gamma\omega^2 x^3 \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

پس

$$K = 2\pi\gamma\omega^2 \int_0^R x^3 \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{4\pi\gamma R^3}{3} \cdot \frac{\omega^2 R^2}{5} = \frac{M\omega^2 R^2}{5}$$

۷-۱۲-۹ یک قرص (یا یک دیسک) به جرم M ، و به شعاع R با سرعت زاویه ای ω حول محوری می چرخد که از مرکز آن گذشته و به صفحه قرص عمود است. انرژی جنبشی قرص را حساب کنید.

جواب: $\frac{MR^2\omega^2}{4}$

۷-۱۲-۱۰ از یک هادی با مقاومت R ، در مدت یک سیکل T ، جریان

سینوسی متناوب

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right)$$

می گذرد، حرارت رها شده را حساب کنید.

حل. مقدار حرارت رها شده در واحد زمان بوسیله یک جریان مستقیم از قانون «جول-لنز»^۱

$$Q = 0.24 I^2 R$$

حساب می شود. در جریان متناوب، دیفرانسیل مقدار حرارت برابر است با

$$dQ = 0.24 I^2(t) R dt$$

از آنجا

$$Q = 0.24 R \int_{t_1}^{t_2} I^2 dt$$

در این حالت

$$\begin{aligned} Q &= 0.24 R I_0^2 \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right) dt = \\ &= 0.12 R I_0^2 \left[t - \frac{T}{2\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right)}{2} \right] \Big|_0^T = 0.12 R T I_0^2 \end{aligned}$$

۷-۱۲-۱۱ یک بیضی به اقطار $2a$ و $2b$ بطور قائم در مایعی به چگالی d طوری غوطه ور است که مرکز آن در عمق h ($h \geq b$)، از سطح مایع قرار دارد. فشار

وارد بر بیضی را حساب کنید.

جواب: $\pi abhd$

۷-۱۲-۱۲ استوانه ای با قاعده دایره ای شکل به شعاع r و ارتفاع h ، از مایعی به چگالی d پر شده است فشار وارد بر دیواره آن را حساب کنید.

جواب: $\pi r d h^2$

۷-۱۲-۱۳ یک ظرف مخروطی شکل به ارتفاع H که شعاع قاعده اش R ، راس آن طرف پایین می باشد، پر از آب است. کار لازم جهت تخلیه آن را حساب کنید.

جواب: $\frac{1}{12} \pi R^2 H$

۷-۱۲-۱۴ فنری به اندازه ۶ سانتیمتر کشیده می شود. اگر نیروی لازم برای کشیدن یک سانتیمتر، یک کیلوگرم نیرو باشد، کار لازم را حساب کنید.

۷-۱۳ محاسبه گشتاور استاتیک و گشتاورماند

محاسبه مختصات مرکز ثقل

در تمام مسائل این بخش فرض بر آن است که جرم جسم بطور یکنواخت توزیع شده است (خطی، دو و سه بعدی) و چگالی جسم برابر واحد است.

۱. گشتاور استاتیک یک منحنی مسطح L بترتیب نسبت به محور x ها و محور y ها را با M_x و M_y نشان دهیم، مقدار آنها با فرمولهای زیر حساب می شود:

$$M_x = \int_L y \, dl, \quad M_y = \int_L x \, dl$$

گشتاورماند این منحنی نسبت به مبدا مختصات با دستور زیر بدست می آید:

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \, dl.$$

اگر معادله منحنی L به صورت $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$) باشد، آنگاه dl با $\sqrt{1+y'^2} \, dx$ برابر است.

اگر معادله L با معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2).$$

مشخص شده باشد، dl برابر $\sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ است.

۲. اگر ناحیه ای مسطح محدود به منحنیهای

$$y = y_1(x), y = y_2(x) \text{ و } y_1(x) \leq y_2(x)$$

و خطوط

$$x = a, x = b, b \geq x \geq a$$

باشد، گشتاورهای استاتیک با دستورهایی زیر حساب می شوند:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx; M_y = \int_a^b x (y_2 - y_1) dx$$

۳- مختصات مرکز ثقل یک منحنی مسطح، با فرمولهای زیر حساب می شود:

$$x_c = \frac{M_y}{L}, y_c = \frac{M_x}{L}$$

که L طول منحنی L است.

مختصات مرکز ثقل یک ناحیه مسطح عبارتند از

$$x_c = \frac{M_y}{S}, y_c = \frac{M_x}{S}$$

که S مساحت ناحیه است.

۷-۱۳-۱ گشتاور استاتیک ناحیه فوقانی بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

را نسبت به محور x ها حساب کنید.

حل. داریم:

$$y dl = y \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{y^2 + (yy')^2} dx;$$

چون

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \text{ و } yy' = -\frac{b^2}{a^2} x$$

پس

$$y dl = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2} dx = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx,$$

که در آن $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ خروج از مرکز بیضی است.

$$M_x = \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx = \frac{2b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx =$$

$$= \frac{b}{a} \left(a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} + \frac{a^2}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right) = b \left(b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).$$

در حالت $a = b$ ، بیضی تبدیل به دایره می شود. برای دایره داریم، $M_x = 2a^2$ زیرا $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} = 1$ و $\varepsilon = 0$.
۷-۱۳-۲ گشتاور ماند یک مستطیل به قاعده b و ارتفاع h را نسبت به قاعده اش حساب کنید.

حل. نواری از مستطیل به پهنای dy را در نظر می گیریم که بموازات قاعده و بفاصله y از آن می باشد. جرم این نوار با مساحتش، یعنی، $dS = b dy$ برابر است، فاصله تمام نقاط، تا قاعده برابر y ، یا دقیق تر، برابر dy است. بنابراین

$$dI_x = by^2 dy$$

و

$$I_x = \int_0^h by^2 dy = \frac{bh^3}{3}$$

۷-۱۳-۳ گشتاور ماند قسمتی از دایره $x^2 + y^2 = R^2$ را که در ربع اول واقع است، نسبت به محور y ها بدست آورید.

جواب: $0.25\pi R^3$

۷-۱۳-۴ گشتاور ماند ناحیه محدود به سهمی $y^2 = 4ax$ و خط $x = a$ را نسبت به محور y ها حساب کنید.
حل. داریم.

$$dI_x = x^2 dS$$

که dS مساحت نوار باریک قائمی است که بفاصله x از محور y ها قرار دارد (شکل ۱۱۱ را ببینید):

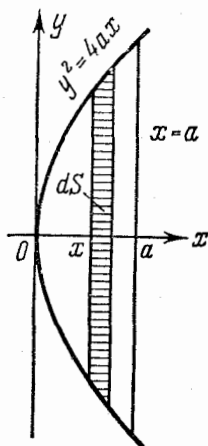
$$dS = 2|y| dx = 2\sqrt{4ax} dx.$$

پس

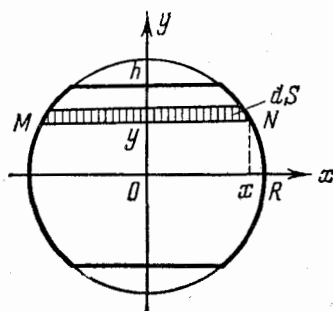
$$I_x = \int_0^a 4x^2 \sqrt{ax} dx = 4\sqrt{a} \int_0^a x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{8}{7} a^{\frac{7}{2}}.$$

۷-۱۳-۵ در طراحی پلهای چوبی، اغلب با الوارهای دوطرف تخت، سروکار

داریم. مقطع چنین الواری در شکل ۱۱۲ نمایش داده شده است. گشتاور ماند (یا اینرسی دورانی) این مقطع را نسبت به محور افقی میانی بدست آورید.



شکل ۱۱۱



شکل ۱۱۲

حل. محورهای مختصات را مطابق شکل انتخاب می کنیم. پس

$$dI_x = y^2 dS \quad \text{که در آن}$$

$$dS = MN dy = 2x dy = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$$

بنابراین

$$I_x = 2 \int_{-h}^h y^2 \sqrt{R^2 - y^2} dy = 4 \int_0^h y^2 \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$y = R \sin t; \quad dy = R \cos t dt; \quad t_1 = 0; \quad t_2 = \arcsin(h/R)$$

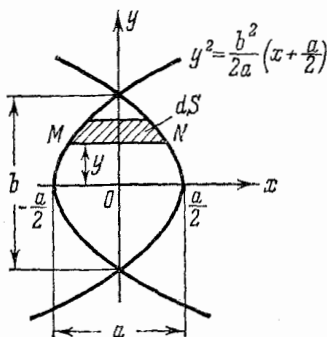
داریم

$$\begin{aligned} I_x &= 4 \int_0^h y^2 \sqrt{R^2 - y^2} dy = 4 \int_0^{\arcsin(h/R)} R^2 \sin^2 t \cdot R \cos t R \cos t dt = \\ &= 4R^4 \int_0^{\arcsin(h/R)} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{R^4}{2} \int_0^{\arcsin(h/R)} (1 - \cos 4t) dt = \\ &= \frac{R^4}{2} \arcsin \frac{h}{R} + \frac{h}{R} (2h^2 - R^2) \sqrt{R^2 - h^2}. \end{aligned}$$

وقتی $h = R$ ، گشتاور مانده دایره مقطع را حول یکی از اقطارش بدست می آوریم که

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4} \quad \text{برابر است با}$$

۷-۱۳-۶ گشتاور ماند ناحیه محدود به دو سهمی را نسبت به محور x ها حساب کنید که در شکل ۱۱۳ مشخص شده است.



شکل ۱۱۳

حل. محوره‌های مختصات را مطابق شکل انتخاب کرده و معادلات را می‌نویسیم. معادله سهمی سمت چپ عبارت است از:

$$y^2 = \frac{b^2}{2a} \left(x + \frac{a}{2} \right)$$

و معادله سهمی سمت راست

$$y^2 = \frac{b^2}{2a} \left(\frac{a}{2} - x \right)$$

است. گشتاور ماند نوار ها شور خورده برابر است با

$$dI_x = y^2 dS = y^2 |MN| dy$$

که در آن

$$\begin{aligned} |MN| &= x_2 - x_1 = 2 \left(\frac{a}{2} - \frac{2a}{b^2} y^2 \right) = \\ &= a - \frac{4a}{b^2} y^2. \end{aligned}$$

پس

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \left(a - \frac{4a}{b^2} y^2 \right) dy = 2 \int_0^{b/2} y^2 \left(a - \frac{4a}{b^2} y^2 \right) dy = \frac{ab^3}{30}$$

۷-۱۳-۷ گشتاور استاتیک قسمتی از سهمی $y^2 = 2x$ را نسبت به

محوره‌های y و x حساب کنید که بین $x=0$ و $x=2$ ($y>0$) قرار دارد.

$$M_x = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1); \quad M_y = \frac{9}{8} \sqrt{5} + \frac{1}{16} \ln(2 + \sqrt{5}). \quad \text{جواب:}$$

۷-۱۳-۸ گشتاور استاتیک قسمتی از خط $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ که دوسر آن روی

محورهای مختصات واقع است، نسبت به محورهای مختصات حساب کنید.

جواب: $M_x = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 + b^2}; M_y = \frac{a}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$

۷-۱۳-۹ گشتاور استاتیکی قسمتی از منحنی $y = \cos x$ را که بین

$x_1 = -\frac{\pi}{2}$ و $x_2 = \frac{\pi}{2}$ قرار دارد نسبت به محور x ها حساب کنید.

جواب: $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

۷-۱۳-۱۰ گشتاور استاتیکی ناحیه‌ای را نسبت به محور x ها حساب کنید

که به سهمی‌های $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ محدود است.

جواب: $\frac{1}{15}$

۷-۱۳-۱۱ گشتاور ماند مثلث محدود به $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) و

$x = 0$, $y = 0$ را نسبت به محورهای مختصات حساب کنید.

جواب: $I_x = \frac{ab^3}{12}; I_y = \frac{a^3b}{12}$

۷-۱۳-۱۲ گشتاور ماند ذوزنقه $ABCD$ را نسبت به قاعده‌اش AD

حساب کنید، در صورتی که $AD = a$, $BC = b$ و ارتفاعش برابر h باشد.

جواب: $\frac{(a+3b)h^3}{12}$

۷-۱۳-۱۳ مختصات مرکز ثقل نیم‌دایره فوقانی دایره $x^2 + y^2 = a^2$ را تعیین کنید

حل. چون این نیم دایره نسبت به محور y ها متقارن است بنابراین مرکز ثقل

روی این محور واقع است، پس $x_c = 0$ ، برای تعیین y_c از نتیجه مسئله ۷-۱۳-۱

استفاده می‌کنیم. در آن مسئله داشتیم $M_x = 2a^2$ ، پس $y_c = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}$ بنابراین

$x_c = 0$, $y_c = \frac{2a}{\pi}$

۷-۱۳-۱۴ مختصات مرکز ثقل قسمتی از منحنی زنجیری

$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$ را که بین دو نقطه $A(0, 1)$ و $B(a, \cosh a)$ واقع

است. تعیین کنید.

حل. داریم:

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \cosh x dx$$

پس

$$l = \int_L dl = \int_0^a \cosh x dx = \sinh a$$

بنابراین

$$M_y = \int_L x \, dl = \int_0^a x \cosh x \, dx = x \sinh x \Big|_0^a - \int_0^a \sinh x \, dx =$$

$$= a \sinh a - \cosh a + 1$$

در نتیجه

$$x_c = \frac{a \sinh a - (\cosh a - 1)}{\sinh a} = a - \frac{\cosh a - 1}{\sinh a} = a - \tanh \frac{a}{2}$$

به طور مشابه

$$M_x = \int_L y \, dl = \int_0^a \cosh^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^a (1 + \cosh 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sinh 2x}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{a}{2} + \frac{\sinh 2a}{4}$$

$$y_c = \frac{\frac{a}{2} + \frac{\sinh 2a}{4}}{\sinh a} = \frac{a}{2 \sinh a} + \frac{\cosh a}{2}$$

۷-۱۳-۱۵ مختصات مرکز ثقل اولین قوس سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

را تعیین کنید.

حل. اولین قوس سیکلوئید نسبت به خط $x = \pi a$ متقارن است. بنابراین مرکز ثقل روی خط واقع است پس $x_c = \pi a$. چون طول این قوس برابر $l = 8a$ است (محاسبه اش راحت است) پس

$$y_c = \frac{1}{l} \int_L y \, dl = \frac{1}{8a} 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} \, dt = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} \, dt = \frac{4}{3} a$$

$$\text{۷-۱۳-۱۶ مختصات مرکز ثقل قسمتی از آستروئید} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad \text{را}$$

که در ربع اول قرار دارد تعیین کنید.

$$\text{جواب: } x_c = y_c = 0.4a$$

$$\text{۷-۱۳-۱۷ مختصات مرکز ثقل قسمتی از کاردیوئید} \quad \rho = a(1 + \cos \varphi) \quad \text{را}$$

که بین $\varphi = 0$ و $\varphi = \pi$ واقع است، تعیین کنید.

حل. معادله منحنی را به صورت پارامتری می نویسیم:

$$x = \rho \cos \varphi = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi;$$

$$y = \rho \sin \varphi = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi.$$

وقتی پارامتر φ بین ۰ و π تغییر می کند، قسمت فوقانی رسم می شود. چون تمام درازای

منحنی برابر $8a$ است و

$$dl = \sqrt{(x'_{\varphi})^2 + (y'_{\varphi})^2} d\varphi = 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

(مسئله ۳-۹-۷ را ببینید) داریم:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{l} \int_L y dl = \frac{1}{4a} \int_0^{\pi} a \sin \varphi (1 + \cos \varphi) 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 2a \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -\frac{4}{5} a \cos^5 \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{5} a \end{aligned}$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{4a} \int_L x dl = \frac{1}{4a} \int_0^{\pi} a \cos \varphi (1 + \cos \varphi) 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= a \int_0^{\pi} \cos \varphi \cos^3 \frac{\varphi}{2} d\varphi = a \int_0^{\pi} \left(2 \cos^5 \frac{\varphi}{2} - \cos^3 \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi \end{aligned}$$

با فرض $\frac{\varphi}{2} = t$ داریم (مسئله ۹-۶-۶ را ببینید):

$$y_c = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^5 t - \cos^3 t) dt = 4a \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} - 2a \frac{2}{3} = \frac{4}{5} a$$

بنابراین

$$x_c = y_c = \frac{4a}{5}$$

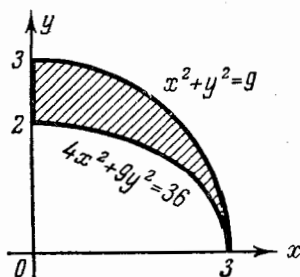
جالب توجه است که مرکز ثقل قوس فوقانی کاردیوئید روی نیمساز ربع اول واقع

است در حالی که این قوس نسبت به نیمساز ربع اول متقارن نیست.

۷-۱۳-۱۸ مختصات مرکز ثقل قسمتی از ناحیه بین بیضی

$4x^2 + 9y^2 = 36$ و دایره $x^2 + y^2 = 9$ که در ربع اول واقع است، تعیین کنید (شکل

۱۱۴).



شکل ۱۱۴

حل نخست گشتاورهای استاتیکی را نسبت به محورهای مختصات حساب

می کنیم:

$$M_y = \int_0^3 x(y_2 - y_1) dx = \int_0^3 x \left[\sqrt{9-x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^3 x \sqrt{9-x^2} dx = 3;$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^3 (y_2^2 - y_1^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left[(9-x^2) - \frac{4}{9} (9-x^2) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 \left(5 - \frac{5}{9} x^2 \right) dx = 5.$$

مساحت ربع دایره به شعاع ۳ برابر $\frac{9\pi}{4}$ و مساحت ربع بیضی به نیم قطرهای $a=3$ و $b=\frac{3\pi}{2}$ برابر است. بنابراین مساحت مطلوب برابر است با

$$S = \frac{9\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

پس

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{4}{\pi}; \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{20}{3\pi}$$

۷-۱۳-۱۹ مختصات مرکز ثقل ناحیه محدود به سهمی $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ و محوره‌های مختصات را تعیین کنید.

$$\text{جواب: } x_c = y_c = \frac{a}{5}$$

۷-۱۳-۲۰ مختصات مرکز ثقل سطح محدود به منحنی $\rho = a \cos^3 \varphi$ ($a > 0$) را تعیین کنید.

حل. چون همیشه $\rho \geq 0$ ، پس تغییرات φ بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ است. با توجه به زوج بودن تابع $\cos \varphi$ ، منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است و به ازای $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ منحنی از مبدا مختصات می‌گذرد. مساحت این ناحیه برابر است با

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = a^2 \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32} \pi a^2$$

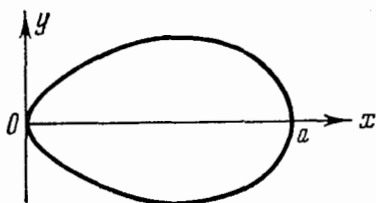
محوره‌های مختصات را مطابق شکل ۱۱۵ در نظر می‌گیریم. معادلات پارامتری منحنی را می‌نویسیم:

$$x = \rho \cos \varphi = a \cos^4 \varphi;$$

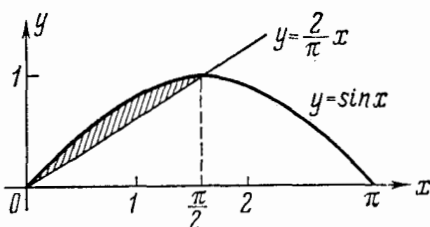
$$y = \rho \sin \varphi = a \sin \varphi \cos^3 \varphi.$$

مرکز ثقل روی محور x ها قرار دارد، یعنی، $y_c = 0$ (چون منحنی نسبت به این محور متقارن است). پس کافی است x_c را حساب کنیم

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{2 \int_0^a xy \, dx}{S} = \frac{8a^3}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{8a^3}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{10} \varphi - \cos^{12} \varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{8a^3}{(5/32)\pi a^2} \left(\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10} - \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{21}{40} a \end{aligned}$$



شکل ۱۱۵



شکل ۱۱۶

۷-۱۳-۲۱ مختصات مرکز ثقل ناحیه محدود به خط $y = \frac{2}{\pi}x$ و منحنی سینوسی $y = \sin x$ ($x \geq 0$) را تعیین کنید (شکل ۱۱۶).

حل. خط مستقیم و منحنی همدیگر را در نقاط $(\frac{\pi}{2}, 1)$ و $(0, 0)$ قطع می کنند. مساحت ناحیه ای که بین خط و منحنی قرار دارد، برابر است با

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx = \frac{4-\pi}{4}$$

پس

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2} x^2 \right) dx}{\frac{4-\pi}{4}} = \frac{2}{4-\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2} x^2 \right) dx = \\ &= \frac{2}{4-\pi} \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{4}{3\pi^2} x^3 \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}; \end{aligned}$$

$$y_c = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx}{\frac{4-\pi}{4}} = \frac{4}{4-\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx -$$

$$-\frac{8}{\pi(4-\pi)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \frac{4}{4-\pi} - \frac{\pi^2}{3(4-\pi)} = \frac{12-\pi^2}{12-3\pi}.$$

۲۲-۱۳-۷ قضیه های زیر را ثابت کنید (قضیه های گلدین^۱).

قضیه ۱. مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی مسطح حول محوری که در صفحه منحنی واقع بوده و او را قطع نکند، با حاصلضرب درازای منحنی در محیط دایره ای برابر است که مرکز ثقل منحنی در دوران ایجاد می کند.

قضیه ۲. حجم حاصل از دوران یک ناحیه مسطح حول محوری که در صفحه شکل (یا ناحیه) واقع است و ناحیه را قطع نمی کند، با حاصلضرب مساحت ناحیه در طول محیط دایره ای برابر است که مرکز ثقل در دوران می سازد.

برهان. (۱) دستور محاسبه مساحت سطح دوار حاصل از دوران منحنی L حول محور x ها، یعنی

$$P = 2\pi \int_L y dl$$

(بخش ۷-۱۰ را ببینید) را باعرض مرکز ثقل این منحنی، یعنی

$$y_c = \frac{M_x}{l} = \frac{1}{l} \int_L y dl$$

مقایسه می کنیم، داریم:

$$P = 2\pi l y_c = l \cdot 2\pi y_c.$$

l درازای منحنی است که دوران می کند و $2\pi y_c$ محیط دایره به شعاع y_c است، یعنی، محیط دایره ای است که مرکز ثقل در دوران حول محور x هائی سازد.

(۲) دستور محاسبه حجم جسم حاصل از دوران یک شکل (یا ناحیه) مسطح حول

محور x ها یعنی

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx.$$

(بخش ۷-۶ را ببینید) را باعرض مرکز ثقل این ناحیه، یعنی،

$$y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{2S} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx.$$

مقایسه می کنیم، داریم:

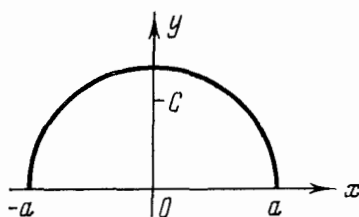
$$V = \pi \cdot 2S y_c = S \cdot 2\pi y_c$$

که S مساحت ناحیه ای است که دوران می کند و $2\pi y_c$ طول محیط دایره ای است که مرکز ثقل در دوران حول محور x ها می سازد.

۲۳-۱۳-۷ با استفاده از قضیه اول گلدین، مرکز ثقل نیم دایره به شعاع a را بدست آورید.

حل. محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۱۷ انتخاب می کنیم. با توجه به تقارن $x_c = 0$ ، حال y_c را حساب می کنیم. اگر این نیم دایره حول محور x ها دوران کند مساحت سطح حاصل برابر $4\pi a^2$ می شود، و درازای منحنی برابر $l = \pi a$ است. بنابراین، مطابق اولین قضیه گلدین داریم:

$$4\pi a^2 = \pi a \cdot 2\pi y_c; \quad y_c = 2 \frac{a}{\pi}$$



شکل ۱۱۷

۲۴-۱۳-۷ قضیه دوم گلدین را بکار برده مختصات مرکز ثقل ناحیه محدود به محور x ها و یک قوس سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t)$$

را تعیین کنید.

حل. چون ناحیه مورد نظر نسبت به خط $x = \pi a$ متقارن است. پس مرکز تقارن روی این خط قرار دارد، در نتیجه $x_c = \pi a$

V حجم جسم دوار حاصل از دوران این شکل حول محور x ها برابر $5\pi^2 a^3$ است (مسئله ۱۴-۶-۷ را ببینید) و S مساحت شکل برابر $3\pi a^2$ است (مسئله ۳-۴-۷ را ببینید). با توجه به قضیه دوم گلدین داریم:

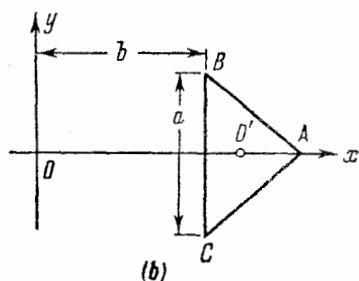
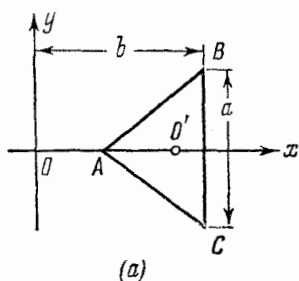
$$y_c = \frac{V}{2\pi S} = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5a}{6}$$

۷-۱۳-۲۵ مثلث متساوی الضلاع به ضلع a را حول خطی به موازات قاعده

به فاصله $b > a$ از آن دوران می دهیم، حجم جسم حاصل را حساب کنید.

حل. می توان مثلث را به دو حالت مطابق شکل ۱۱۸ در نظر گرفت. ارتفاع مثلث

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و مساحت آن برابر $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است. O' مرکز تقارن مثلث، محل لاقی سه میانه است که فاصله اش تا محور تقارن، در حالت اول $b - \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ، و در حالت دوم $b + \frac{a\sqrt{3}}{6}$ است.



شکل ۱۱۸

توجه به قضیه دوم گلدین

$$V_1 = \frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{4} \left(b - \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) = \pi \left(\frac{a^2 b \sqrt{3}}{2} - \frac{a^3}{4} \right),$$

$$V_2 = \frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{4} \left(b + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) = \pi \left(\frac{a^2 b \sqrt{3}}{2} + \frac{a^3}{4} \right).$$

۷-۱۳-۲۶ مطلوب است تعیین مختصات مرکز ثقل قسمتی از قوس دایره ای به

نوع R ، که مقابل به زاویه مرکزی 2α باشد.

$$\text{جواب: } x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; y_c = 0$$

۷-۱۳-۲۷ مختصات مرکز ثقل ناحیه ای را تعیین کنید که محدود به منحنی

کسینوسی $y = \cos x$ و خط $y = \frac{1}{2}$ بوده و بین $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = -\frac{\pi}{3}$ قرار دارد.

۷-۱۳-۲۸ مختصات مرکز ثقل ناحیه ای محدود به منحنی $y^2 = ax^3 - x^4$ را

تعیین کنید.

$$\text{جواب: } x_c = \frac{5a}{8}; y_c = 0$$

۷-۱۳-۲۹ مختصات مرکز ثقل پیچ لگاریتمی $\rho = ae^{\varphi}$ را که بین $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

و $\varphi_2 = \pi$ قرار دارد، تعیین کنید.

$$x_c = -\frac{0.2(2e^{2\pi} - e^\pi)}{e^\pi - e^{\frac{\pi}{2}}}; \quad y_c = \frac{0.2a(e^{2\pi} - 2e^\pi)}{e^\pi - e^{\frac{\pi}{2}}} \quad \text{جواب:}$$

۷-۱۳-۳۰ شش ضلعی منتظمی به ضلع a را حول یکی از اضلاعش دوران

می دهیم. حجم جسم دوار حاصل را حساب کنید.

جواب: $4.5\pi a^3$.

۷-۱۳-۳۱ مختصات مرکز ثقل نیم دایره فوقانی به شعاع R را با استفاده از

قضیه گلدین تعیین کنید.

$$\text{جواب: } x_c = 0; \quad y_c = \frac{4R}{3\pi}$$

۷-۱۴ چند مسئله اضافی

۷-۱۴-۱ مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه ای که در ربع اول واقع بوده و

به منحنی های $y^n = x^m$ و $y^m = x^n$ محدود است (m و n اعداد صحیح و مثبت هستند). در مورد وابستگی تمام مساحت به فرد و یا زوج بودن اعداد m و n بحث کنید.

راهنمایی: منحنی ها همدیگر را در ربع اول در نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ قطع

می کنند. مساحتی که در ربع اول قرار دارد از رابطه

$$\left| \int_0^1 \left(x^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{m}{n}} \right) dx \right|$$

بدست می آید. اگر m و n هر دو زوج باشند، ناحیه نسبت به مبدا مختصات متقارن

است. اگر m و n یکی فرد و دیگری زوج باشد، ناحیه فقط در ربع اول قرار دارد.

جواب: اگر m و n هر دو زوج باشند

$$\left| \frac{m-n}{m+n} \right|; \quad 4 \left| \frac{m-n}{m+n} \right|$$

اگر m و n هر دو فرد باشند

$$2 \left| \frac{m-n}{m+n} \right|$$

و اگر m و n یکی فرد و دیگری زوج باشد، $\left| \frac{m-n}{m+n} \right|$

(الف) ثابت کنید که مساحت دوزنقه منحنی الضلع محدود به محور x ها و خطوط $x=a$, $x=b$ و سهمی $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ را می توان با استفاده از دستور زیر، موسوم به دستور چیشف، حساب کرد:

$$S = \frac{b-a}{3} \left[y \left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{b-a}{2} \right) + y \left(\frac{a+b}{2} \right) + y \left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{b-a}{2} \right) \right]$$

(ب) ثابت کنید که مساحت محدود به منحنی

$$y = f(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

را می توان از دستور زیر، موسوم به فرمول گوس بدست آورد:

$$S = \frac{b-a}{9} \left[5f \left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{b-a}{2} \right) + 8f \left(\frac{a+b}{2} \right) + 5f \left(\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{b-a}{2} \right) \right].$$

۷-۱۴-۳ نشان دهید که مساحت محدود به بیچ لگاریتمی $\rho = ae^{m\varphi}$ و دو شعاع حامل دلخواه با تفاضل مربعات این شعاعها، متناسب است.

راهنمایی: بکمک دستور محاسبه مساحت در مختصات قطبی، عمل کنید.

۷-۱۴-۴ دو جسم بین دو صفحه موازی P و Q قرار دارند. اگر این دو جسم بوسیله هر صفحه R که همواره با آنها موازی است، بریده شود و مقطع های برابر بسازد. ثابت کنید که حجم این دو جسم برابر است. (اصل کاوالری)

راهنمایی: چون مقطع ها برابرند، اگر مساحت آنها را با تابع $S(x)$ نشان دهیم،

داریم

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

که برابر حجم هر کدام از دو جسم است.

۷-۱۴-۵ اگر تابع $S(x)$ ($0 \leq x \leq h$) مساحت مقطع جسمی

را با صفحه عمود به محور x ها را نشان دهد که چند جمله ای است که درجه اش از سه بیشتر نیست، آنگاه حجم این جسم برابر است با

$$V = \frac{h}{6} \left[S(0) + 4S\left(\frac{h}{2}\right) + S(h) \right]$$

با استفاده از این فرمول، دستورهای برای محاسبهٔ حجم: کره — قطعه کره یا دو قاعده (یعنی، قطعه‌ای از کره که با یک یا دو صفحه موازی قطع شود) مخروط، مخروط ناقص، بیضوی (الپسوتید) و پارابولوتید دوار (یا سهمی) بیابید.

راهنمایی: فرمول، مستقیماً از دستور سیمپسون نتیجه می‌شود:

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{6} \left[f(0) + 4f\left(\frac{h}{2}\right) + f(h) \right]$$

که در کره $S(x) = \pi(r^2 - x^2)$ و در مخروط $S(x) = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}$. و در پارابولوتید دوار $x = 2\pi p x$ و غیره می‌باشد.

۷-۱۴-۶ ثابت کنید که حجم حاصل از دوران شکل محدود به $a \leq x \leq b$ ، $0 \leq y \leq y(x)$ که تابعی یک به یک و پیوسته است، حول محور y ها برابر است با

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x) dx$$

راهنمایی: ذوزنقه منحنی الضلع را به نوارهایی به پهنای Δx تقسیم کنید و سپس عنصر حجم را که برابر $\Delta V = 2\pi xy \Delta x$ است، بنویسید.

۷-۱۴-۷ ثابت کنید که حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi$ ، $0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)$ حول محور قطبی برابر است با

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi$$

۷-۱۴-۸ ثابت کنید که طول قوس منحنی

$$\begin{aligned} x &= f''(t) \cos t + f'(t) \sin t, \\ y &= -f''(t) \sin t + f'(t) \cos t \end{aligned} \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

برابر است با

$$[f(t) + f''(t)]_{t_1}^{t_2}$$

راهنمایی: از دستور محاسبهٔ طول قوس وقتی، معادلهٔ منحنی به صورت پارامتری است استفاده کنید.

۷-۱۴-۹ منحنی با معادلات پارامتری

$$x = \int_1^t \frac{\cos z}{z} dz, \quad y = \int_1^t \frac{\sin z}{z} dz$$

مشخص شده است. طول قوسی از این منحنی را بدست آورید که بین مبداء تا نزدیکترین

نقطه که خط مماس قائم دارد، واقع است.

جواب: $\ln \frac{\pi}{2}$ راهنمایی: مبداء مختصات به ازای $t=1$ و نزدیکترین نقطه تا مبداء که مماس قائم دارد به ازای $t=\frac{\pi}{2}$ بدست می آید.

۷-۱۴-۱۰ دستور محاسبه طول قوس در مختصات قطبی را با استفاده از

تعریف، بدون اینکه از تبدیل مختصات قائم به قطبی استفاده کنید، بدست آورید.

۷-۱۴-۱۱ ثابت کنید طول قوس منحنی زنجیری $y = \cosh x$ از نقطه

$(0, 1)$ تا نقطه دلخواه از دستور

$$l(x) = \sinh x$$

بدست آید. از دستور محاسبه طول قوس منحنی وقتی معادله به صورت پارامتری باشد استفاده کرده معادلات پارامتری منحنی زنجیری را تعیین کنید.

۷-۱۴-۱۲ نخى انعطاف پذیر که وزن تمام نقاطش یکسان است. بین دو

نقطه A و B معلق است. اگر فاصله دو نقطه برابر $AB = 2b$ باشد و انحراف نخ برابر f باشد و شکل نخ معلق یک سهمی باشد، نشان دهید که طول نخ برابر

$$l = 2b \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{b^2} \right)$$

است که در آن $\frac{f}{b}$ بقدر کافی کوچک است.

۷-۱۴-۱۳ نسبت مساحت حلقه منحنی $y = \pm \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x}$ به مساحت

دایره ای را تعیین کنید که محیط دایره و محیط حلقه برابر باشند.

جواب: $2\pi \frac{\sqrt{3}}{15}$

۷-۱۴-۱۴ طول قسمتی از منحنی محل تلاقی استوانه

$$(y+z)^2 = 4ax$$

با مخروط

$$\frac{4}{3}x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

را تعیین کنید که بین مبداء مختصات و نقطه $M(x, y, z)$ واقع است.

جواب: $\sqrt{2} \cdot z$.

۷-۱۴-۱۵ ثابت کنید که مساحت بیضی

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (AC - B^2 > 0)$$

برابر است با

$$S = -\frac{\pi \Delta}{(AC - B^2)^{3/2}}$$

که در آن

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

۱۶-۱۴-۷ مطلوب است محاسبه

(الف). S مساحت ناحیه محدود به هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ و قسمت مثبت محور x ها و خطی که مبداء مختصات را به نقطه $M(x, y)$ واقع بر روی هذلولی وصل می کند.

(ب). Q مساحت ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 1$ و محور x ها و خطی که مبداء مختصات را به نقطه $N(x, y)$ وصل می کند حساب کنید و نشان دهید که مختصات نقاط M و N از دستوره‌های زیر بدست می آیند:

$$x_M = \cosh 2S, \quad y_M = \sinh 2S, \quad x_N = \cos 2Q, \quad y_N = \sin 2Q$$

جواب: (الف) $0.5 \ln(x+y)$ (ب) $\frac{\pi}{4} - 0.5 \arcsin x$

۱۷-۱۴-۷ با استفاده از قضیه گلدین^۱ ثابت کنید که مرکز ثقل مثلث بفاصله یک سوم ارتفاع از قاعده اش می باشد.

۱۸-۱۴-۷ اگر ξ مرکز ثقل دوزنقه منحنی الضلع محدود به منحنی پیوسته $y=f(x)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ باشد، آنگاه درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\int_a^b (ax+b) f(x) dx = (a\xi+b) \int_a^b f(x) dx$$

(دستور ورشچگین^۲)

۱۹-۱۴-۷ قطاعی محدود به منحنی پیوسته $\rho=f(\varphi)$ و دوشعاع حامل دلخواه، مفروض است. ثابت کنید که مختصات مرکز ثقل از دستوره‌های زیر حاصل می شوند

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos \varphi d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi}; \quad y_c = \frac{2}{3} \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin \varphi d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi}.$$

۷-۱۴-۲۰ ثابت کنید مختصات مرکز ثقل قوسی از منحنی $\rho = f(\varphi)$ در دستگاه مختصات قائم، با فرمولهای زیر حساب می شود:

$$x_c = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos \varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi}; \quad y_c = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi}$$

فصل هشتم

انتگرالهای غیر عادی^(۱) (یا توسعی)

۸-۱ انتگرالهای غیر عادی با حدود بینهایت

تابع $f(x)$ به ازای $x \geq a$ معین و در فاصله $[a, A]$ انتگرالپذیر است. در این

صورت

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

را انتگرال غیر عادی تابع $f(x)$ در فاصله $[a, +\infty]$ گویند و آن را با نماد

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

نشان می دهند. همین طور انتگرالهای

$$\int_{-\infty}^B f(x) dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

تعریف می شوند. پس

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx;$$

$$\int_{-\infty}^B f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^B f(x) dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^C f(x) dx + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_C^B f(x) dx$$

اگر حدهای بالا موجود و متناهی باشند، انتگرال را همگرا (یا متقارب) گویند و در غیر این صورت آن را واگرا (یا متباعد) نامند.

آزمون مقایسه: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای تمام مقادیر $x \geq a$ معین و در فاصله $[a, A]$ ، $A \geq a$ انتگرالپذیر باشند و به ازای تمام مقادیر $x \geq a$ داشته

باشیم $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ، آنگاه از همگرایی انتگرال $\int_a^\infty g(x) dx$ همگرایی انتگرال $\int_a^\infty f(x) dx$ نتیجه می شود و

$$\int_a^\infty f(x) dx \leq \int_a^\infty g(x) dx$$
 و همچنین از واگرایی انتگرال $\int_a^\infty f(x) dx$ ، واگرایی انتگرال $\int_a^\infty g(x) dx$ نتیجه می شود.

آزمون مقایسه ویژه: اگر وقتی $x \rightarrow \infty$ تابع $f(x) \geq 0$ یک بینهایت

کوچک از مرتبه $\lambda > 0$ در مقایسه با $\frac{1}{x}$ باشد، آنگاه به ازای $\lambda > 1$ انتگرال $\int_a^\infty f(x) dx$ همگرا و به ازای $\lambda \leq 1$ انتگرال واگرا است.

همگرایی مطلق و همگرایی مشروط: فرض می شود که تابع $f(x)$ به ازای تمام

مقادیر $x \geq a$ معین است. اگر انتگرال $\int_a^\infty |f(x)| dx$ همگرا باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^\infty f(x) dx$ هم همگرا است و آن را همگرای مطلق گویند. در این حالت

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx$$
 اگر $\int_a^\infty f(x) dx$ همگرا باشد در حالی که $\int_a^\infty |f(x)| dx$ واگرا است، آنگاه $\int_a^\infty f(x) dx$ را همگرای مشروط گویند.

تغییر متغیر در انتگرال غیرعادی بر اساس قضیه زیر انجام می گیرد:

قضیه: فرض می کنیم تابع $f(x)$ به ازای $x \geq a$ معین و پیوسته است. اگر

تابع $x = \varphi(t)$ در فاصله $\alpha < t < \beta$ و α و β می توانند $-\infty$ و ∞ باشند)

معین و یکنواخت، و مشتق پیوسته $\varphi'(t) \neq 0$ را داشته باشد و

$$\lim_{t \rightarrow \alpha+0} \varphi(t) = a \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = +\infty$$

آنگاه

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

انتگرالگیری به روش جزء بجزء را می توان بدون هیچ مشکلی انجام داد.

۸-۱-۱ بکمک تعریف، انتگرالهای غیر عادی زیر را حساب و یا واگرایی آنها

را ثابت کنید:

$$(a) \int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x \ln^3 x}; \quad (b) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}; \quad (c) \int_0^\infty x \sin x dx$$

حل. (a) بنا به تعریف

$$\begin{aligned} \int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x \ln^3 x} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{e^2}^A \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2 \ln^2 x} \Big|_{e^2}^A \right) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2 \ln^2 A} \right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

(b) بنابه تعریف

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

(می توان به جای $x=0$ هر نقطه متناهی از محور x ها را انتخاب کرد).

طرف اول را حساب می کنیم:

$$\lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_B^0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_0^A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}.$$

پس

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{\pi}{2}.$$

(c) بنابه تعریف،

$$\int_0^{\infty} x \sin x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x \sin x \, dx.$$

فرض می کنیم $u = x$, $dv = \sin x \, dx$ ، و از روش جزء بجزء استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x \sin x \, dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-x \cos x \Big|_0^A + \int_0^A \cos x \, dx \right) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-A \cos A + \sin A). \end{aligned}$$

ولی حد آخری وجود ندارد. در نتیجه انتگرال $\int_0^{\infty} x \sin x \, dx$ واگراست.

۲-۱-۸ انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_2^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}; \quad \text{(b)} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}; \quad \text{(c)} \quad \int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}} \\ \text{(d)} \quad & \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}; \quad \text{(e)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}; \quad \text{(f)} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx \end{aligned}$$

حل. (a) بنابه تعریف

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{(x^2-3)^{-1/2}}{-1/2} \Big|_2^A \right] = \\ &= - \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{A^2-3}} - 1 \right] = 1 \end{aligned}$$

جواب: (b) $\frac{1}{2} \ln 2$; (c) 1; (d) $1 - \ln 2$; (e) π ; (f) $\frac{1}{2}$

۳-۱-۸ ثابت کنید که انتگرالهای

$$\int_a^{+\infty} e^{-px} \, dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^b e^{px} \, dx$$

به ازای هر ثابت $p > 0$ همگرا و به ازای هر $p < 0$ واگرا است.

۴-۱-۸ انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+2x^2+3x^4}$$

را برای همگرایی بررسی کنید.

حل. تابع

$$f(x) = \frac{1}{1+2x^2+3x^4}$$

مثبت است و وقتی $x \rightarrow \infty$ ، در مقایسه با $\frac{1}{x}$ یک بینهایت کوچک از مرتبه

$\lambda = 4$ است. چون $4 > 1$ ، بنابه آزمون مقایسه ویژه، انتگرال همگراست.

۸-۱-۵ ثابت کنید که

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$$

همگراست

حل. تابع $f(x) = \frac{1}{x + \sin^2 x}$ به ازای $x \geq 1$ مثبت و پیوسته است. وقتی $x \rightarrow \infty$ ، تابع در مقایسه با $\frac{1}{x}$ یک بینهایت کوچک از مرتبه $\lambda = 1$ است. مطابق آزمون مقایسه ویژه، انتگرال واگراست.

۸-۱-۶ نوع انتگرالهای زیر تعیین کنید:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx; \quad (b) \int_1^{\infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} dx;$$

$$(c) \int_1^{\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx; \quad (d) \int_2^{\infty} \frac{3+\arcsin \frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} dx; \quad (e) \int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$$

جواب: (a) واگراست. **راهنمایی:** برای $x > \sqrt{e-1}$ داریم

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x} > \frac{1}{x}$$

(b) همگراست. (c) واگراست.

راهنمایی: از $\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ استفاده کنید. (d) همگراست، (e) واگراست.

۸-۱-۷ نوع انتگرال زیر را تعیین کنید

$$\int_1^{\infty} \frac{(x + \sqrt{x+1}) dx}{x^2 + 2\sqrt[5]{x^4+1}}$$

حل. انتگران به ازای $x \geq 1$ تابعی مثبت و پیوسته است. مرتبه بینهایت کوچکی آن را نسبت به $\frac{1}{x}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ ، تعیین می کنیم. چون

$$\frac{x + \sqrt{x+1}}{x^2 + 2\sqrt[5]{x^4+1}} = \frac{1}{x} \times \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + 2\sqrt[5]{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^{10}}}}$$

پس $\lambda = 1$. مطابق آزمون مقایسه ویژه، انتگرال واگراست.

۸-۱-۸ نوع انتگرال زیر را تعیین کنید،

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$$

حل . چون تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right)}}$$

وقتی $x \rightarrow +\infty$ یک بینهایت کوچک از مرتبه $\lambda = \frac{3}{2}$ در مقایسه با $\frac{1}{x}$ است، پس انتگرال همگراست.

۹-۱-۸ نوع انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}} dx$$

حل . انتگران به ازای $x \geq 2$ مثبت و پیوسته است. حال مرتبه بینهایت

کوچکی آن را نسبت به $\frac{1}{x}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ تعیین می کنیم:

$$\frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}} = \frac{1}{x^{\frac{11}{35}}} \times \frac{\sqrt[7]{2+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{x^3}}}$$

چون $\lambda = \frac{11}{35} < 1$ ، پس انتگرال واگراست.

۱۰-۱-۸ نوع انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_1^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$$

حل . تابع

$$f(x) = 1 - \cos \frac{2}{x} = 2 \sin^2 \frac{1}{x}$$

به ازای $x \geq 1$ مثبت و پیوسته است. چون

$$2 \sin^2 \frac{1}{x} \sim 2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{2}{x^2}$$

پس بنابه آزمون مقایسه ویژه انتگرال همگراست.

۱۱-۱-۸ نوع انتگرال زیر را تعیین کنید

$$\int_1^{\infty} \ln \frac{e^{\frac{1}{x}} + (n-1)}{n} dx, \quad n > 0$$

حل . انتگران را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = \ln \frac{e^{\frac{1}{x}} + (n-1)}{n} = \ln \left[1 + \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{n} \right]$$

چون وقتی $x \rightarrow \infty$ تابع $\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{n}$ یک بینهایت کوچک است. پس

$$f(x) \sim \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{n} \sim \frac{1}{nx}$$

به عبارت دیگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1/x} = \frac{1}{n}$ پس انتگرال واگراست.

۱۲-۱-۸ نوع انتگرال زیر را مشخص کنید:

$$\int_1^{\infty} \frac{1 - 4 \sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx$$

حل. علامت تابع

$$f(x) = \frac{1 - 4 \sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}}$$

با تغییر علامت صورت عوض می شود (زیرا علامت مخرج همیشه مثبت است). لذا نوع انتگرال زیر را تعیین می کنیم:

$$\int_1^{\infty} \frac{|1 - 4 \sin 2x|}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx$$

چون

$$\frac{|1 - 4 \sin 2x|}{x^3 + \sqrt[3]{x}} < \frac{5}{x^3}$$

و انتگرال

$$\int_1^{\infty} \frac{5dx}{x^3}$$

همگراست، پس انتگرال

$$\int_1^{\infty} \frac{|1 - 4 \sin 2x|}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx$$

بنابه آزمون مقایسه همگراست. بنابراین انتگرال مورد نظر همگرای مطلق است.

۱۳-۱-۸ ثابت کنید انتگرال زیر موسوم به انتگرال دیریکله بطور مشروط همگرا است.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

حل. انتگرال را به مجموع دو انتگرال به صورت زیر می نویسیم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

انتگرال اول یک انتگرال عادی است (زیرا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$). انتگرال دوم را به روش جزء بجزء حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{\sin x}{x} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{\cos x}{x} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^A - \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right] = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

ولی انتگرال غیرعادی $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ همگرایی مطلق است، زیرا

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ همگراست. پس انتگرال } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ همگراست. و } \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

به طور مشابه، به راحتی ثابت می شود که

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

هم همگراست. حال ثابت می کنیم که

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

واگراست. درحقیقت

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x},$$

ولی انتگرال

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A - \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx \end{aligned}$$

واگراست، زیرا $\lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty$ و انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ همگراست.

۱۴-۱-۸ همگرایی انتگرالهای زیر را ثابت کنید:

$$(a) \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx; \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx; (b) \int_0^{\infty} 2x \cos(x^4) dx.$$

حل . (a) با فرض $x = \sqrt{t}$ داریم:

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

انتگرال طرف دوم را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

چون $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$ ، پس اولین انتگرال طرف دوم یک انتگرال عادی است. برای

محاسبه انتگرال دوم، روش جزء بجزء را بکار می بریم:

$$u = 1/\sqrt{t}, \quad \sin t dt = dv,$$

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = -\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \Big|_{\pi/2}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t dt}{t^{3/2}} = -\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt.$$

چون $\frac{|\cos t|}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$ و انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ همگراست، بنابراین انتگرال اخیر

همگرای مطلق است. بطور مشابه، ثابت می شود که انتگرال $\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$ همگرا است. دوانتگرال فوق را، انتگرالهای فرنه^۱ گویند. این انتگرالها برای توجیه شکست نور بکار می روند.

(b) این انتگرال با تغییر متغیر $x^2 = t$ ، به انتگرال

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt$$

تبدیل می شود و دیدیم که این انتگرال همگراست.

توجه. انتگرالهای فرنه نشان می دهند حتی وقتی $x \rightarrow \infty$ ، و انتگرال صفر نشود، انتگرال می تواند همگرا شود. انتگرال (b) نشان می دهد که انتگرال غیرعادی می تواند همگرا شود حتی اگر انتگران بیکران باشد. در واقع، به ازای

$$x = \sqrt[n]{n\pi} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

مقادیر تابع برابر $\pm \sqrt[n]{n\pi}$ است، یعنی تابع بیکران می باشد.

۸-۱-۱۵ انتگرال غیرعادی زیر را حساب کنید

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad n \text{ عددی طبیعی است.}$$

حل. تغییر متغیر $x = \tan t$ را بکار می بریم که در آن $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. پس وقتی $x=0$ داریم $t=0$ و اگر $x \rightarrow +\infty$ آنگاه $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ و در نتیجه بنابه قضیه تغییر متغیر در انتگرال غیرعادی، داریم:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sec^{2n} t} \times \sec^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t \, dt$$

که این انتگرال در ۹-۶-۶ حساب شده است پس

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} \pi/2, & n=1, \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}, & n > 1 \end{cases}$$

۸-۱-۱۶ انتگرال زیر را حساب کنید

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} \, dx$$

حل. تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$x = 1/t; \quad dx = -(1/t^2) \, dt; \quad t_1 = \infty, \quad t_2 = 0$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} \, dx = \int_0^{\infty} \frac{(1/t^4) \, dt}{1+1/t^4} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^4+1}.$$

به طرفین انتگرال I را اضافه می کنیم:

$$2I = \int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} \, dt = \int_0^{\infty} \frac{1/t^2+1}{t^2+1/t^2} \, dt.$$

دوباره تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$z = t - 1/t, \quad (1 + 1/t^2) \, dt = dz, \quad t \rightarrow +\infty, \quad z \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +0, \quad z \rightarrow -\infty$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2} \left[\lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^A \frac{dz}{z^2+2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dz}{z^2+2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{B \rightarrow -\infty} \arctan \frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan \frac{A}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

۱۷-۱-۸ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx; \quad (b) \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2m+1} dx$$

جواب: (a) راهنمایی: انتگرال را بصورت زیر بنویسید

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

برای انتگرال دوم از تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ استفاده کنید و نشان دهید

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx; \quad (b) \frac{m!}{2}$$

۱۸-۱-۸ انتگرال زیر را با دقت دو رقم اعشار حساب کنید:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1} dx$$

حل. انتگرال را به مجموع دو انتگرال زیر می نویسیم:

$$I_1 = \int_1^N \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1} dx, \quad I_2 = \int_N^{\infty} \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1} dx$$

چون $x \geq 1$ داریم:

$$0 < \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1} < \frac{x^{3/2}}{x^6} = x^{-7/2}$$

پس

$$0 < I_2 = \int_N^{\infty} x^{-7/2} dx = \frac{2}{5} N^{-5/2}$$

به ازای $N = 7$ داریم:

$$I_2 < \frac{2}{5} \times \frac{1}{49 \sqrt{7}} < 0.0031$$

انتگرال

$$I_1 = \int_1^7 \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1} dx$$

را بکمک دستور سیمپسون وقتی $h = 1$ حساب می کنیم

$$S_1 = 0.2155$$

و به ازای $\frac{h}{2} = 0.5$ داریم

$$S_{0.5} = 0.2079$$

چون تفاضل دو مقدار $0.0076/0.0005$ است انتگرال I_1 مقدار $S_{0.5} = 0.2079$ را با دقت

بیشتر، با خطای $\frac{0.0076}{15} \cong 0.0005$ حساب کنید.

در نتیجه مقدار تقریبی انتگرال برابر

$$I \approx 0.208$$

با خطای کمتر از 0.04% است یا $I = 0.21$ با دو رقم اعشار می باشد.

۲-۸ انتگرالهای غیر عادی توابع بیکران

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $a \leq x < b$ تعریف شود و در هر فاصله $[a, b - \varepsilon]$ انتگرالپذیر باشد و در چپ نقطه b بیکران باشد، آنگاه بنابه تعریف

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

اگر حد موجود و متناهی باشد، انتگرال غیر عادی را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا گویند.

بطور مشابه، اگر تابع $f(x)$ در راست نقطه a بیکران باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

بالاخره اگر تابع در یک نقطه داخلی c از فاصله $[a, b]$ بیکران باشد، آنگاه بنابه تعریف

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ بجز در چند نقطه متناهی پیوسته باشد.

اگر تابع پیوسته ای مانند $F(x)$ در فاصله $[a, b]$ وجود داشته باشد که در آن

$$F'(x) = f(x)$$

بجز در چند نقطه متناهی برقرار باشد، آنگاه دستور نیوتن-لایبنیتز

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

برقرار است.

گاهی تابع $F(x)$ را تابع اولیه تعمیم یافته $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ گویند

برای توابعی که در فاصله $a \leq x < b$ تعریف شده و مثبت باشند آزمونهای همگرایی (آزمونهای مقایسه)، مشابه آزمونهای مقایسه در انتگرالهای غیر عادی با حدهای بینهایت

می باشند.

آزمون مقایسه. فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $a \leq x < b$ معین و در هر فاصله $[a, b-\varepsilon]$ $0 < \varepsilon < b-a$ انتگرالپذیر باشند. اگر

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ ، آنگاه از همگرایی $\int_a^b g(x) dx$ همگرایی $\int_a^b f(x) dx$ نتیجه می شود و $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. همچنین از واگرایی $\int_a^b f(x) dx$ واگرایی $\int_a^b g(x) dx$ نتیجه می شود.

آزمون مقایسه ویژه: اگر تابع $f(x) \geq 0$ در فاصله $a \leq x < b$ معین و پیوسته باشد و وقتی $x \rightarrow b-0$ یک بینهایت بزرگ از مرتبه λ در مقایسه با $\frac{1}{b-x}$ باشد، آنگاه به ازای $\lambda < 1$ انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ همگرا و به ازای $\lambda \geq 1$ انتگرال واگراست.

بویژه، انتگرال

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

وقتی $\lambda < 1$ ، همگرا و وقتی $\lambda \geq 1$ واگراست.

همگرایی شرطی و همگرایی مطلق اگر تابع $f(x)$ در فاصله $a \leq x < b$

معین و در هر فاصله $[a, b-\varepsilon]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه از همگرایی $\int_a^b |f(x)| dx$ همگرایی $\int_a^b f(x) dx$ نتیجه می شود. در این حالت می گویند که $\int_a^b f(x) dx$ همگرای مطلق (یا بطور مطلق همگرا) است. اما اگر انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ همگرا ولی انتگرال $\int_a^b |f(x)| dx$ واگرا باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ را همگرای شرطی (یا بطور مشروط همگرا) گویند.

آزمون مشابهی برای انتگرال غیرعادی $\int_a^b f(x) dx$ که $f(x)$ در راست نقطه a بیکران باشد، بکار می رود.

۸-۲-۱ انتگرال غیرعادی زیر را حساب کنید (یا واگرایی آنها را ثابت کنید):

(a) $\int_1^e \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}$;

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$;

$$(c) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}; \quad (d) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}};$$

$$(e) \int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}} dx; \quad (f) \int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}.$$

حل. (a) تابع $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ در همسایگی نقطه $x=1$ بیکران است.

چون تابع در فاصله $[1+\varepsilon, e]$ پیوسته است. لذا در این فاصله انتگرالپذیر است. پس

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 x} \right]_{1+\varepsilon}^e =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)} \right] = \frac{3}{2}.$$

(b) تابع $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ در همسایگی نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ بیکران است و در فاصله

$\left[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ پیوسته می باشد در نتیجه در این فاصله انتگرالپذیر است. بنابراین

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \infty.$$

پس انتگرال واگرا است.

(c) انتگرال در همسایگی نقاط $x=1$ و $x=3$ بیکران است، پس بنابه

تعریف

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

(به جای نقطه $x=2$ می توان هر نقطه داخلی $[1, 3]$ را انتخاب کرد). هر کدام از انتگرالها را جداگانه حساب می کنیم.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin(x-2) \Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [0 - \arcsin(\varepsilon-1)] = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin(x-2) \Big|_2^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\arcsin(1-\varepsilon) - 0] = \frac{\pi}{2}.$$

پس

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(d) تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ در همسایگی نقطه $x=1$ بیکران است، که

این یک نقطه داخلی فاصله انتگرالگیری است، بنابراین، بنابه تعریف

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

هر یک از انتگرالها را حساب می کنیم. اگر $0 \leq x < 1$ ، آنگاه

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\arcsin(1-\varepsilon) - 0] = \frac{\pi}{2}.$$

اگر $1 < x \leq 2$ آنگاه

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(1 + \varepsilon + \sqrt{(1+\varepsilon)^2-1})] = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

پس

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}).$$

(e) انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \int_0^1 x^{12/5} dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^{4/15}} - 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/5}}$$

انتگرال اول یک انتگرال عادی است که بکمک دستور نیوتن - لایبنیتز حساب می شود

$$\int_0^1 x^{12/5} dx = \frac{5}{17} x^{17/5} \Big|_0^1 = \frac{5}{17}$$

توابع انتگرالهای دوم و سوم در طرف راست نقطه $x=0$ بیکران هستند. بنابراین

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{4/15}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^{4/15}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left. \frac{15}{11} x^{11/15} \right|_{\varepsilon}^1 = \frac{15}{11};$$

بطور مشابه

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/5}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^{3/5}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left. \frac{5}{2} x^{2/5} \right|_{\varepsilon}^1 = \frac{5}{2}.$$

پس

$$\int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \frac{5}{17} + \frac{15}{11} - 2 \cdot \frac{5}{2} = -\frac{625}{187}$$

(f) کسر $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$ را به مجموع کسرهای جزئی معادل می نویسیم:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{x+2}{1+x+x^2} \right]$$

پس

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x+2}{1+x+x^2} dx$$

چون

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln(1-x) \Big|_0^{1-\varepsilon} = \infty,$$

پس انتگرال واگراست دیگر نیازی به محاسبه انتگرال دوم که یک انتگرال عادی است، نمی باشد.

توجه: در محاسبه انتگرالهای مسئله ۱-۲-۸ می توان از تابع اولیه تعمیم یافته

استفاده کرده و فرمول نیوتن - لایبنتز را بکار برد. مثلاً در مسئله (a) ۱-۲-۸ تابع

$$F(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 x} \quad \text{در فاصله} [1, e] \quad \text{پیوسته و در هر نقطه فاصله} 1 < x \leq e$$

مشتمل پذیر است، و در این فاصله $F'(x) = f(x)$. پس

$$\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 x} \Big|_1^e = \frac{3}{2}$$

۲-۲-۸ بکمک تعریف، انتگرالهای زیر را محاسبه یا واگرایی آنها را ثابت

کنید:

$$(a) \int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{2/3}}; \quad (b) \int_0^{2/\pi} \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2};$$

$$(c) \int_0^1 \cos \frac{\pi}{1-x} \cdot \frac{dx}{(1-x)^2}; \quad (d) \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}};$$

$$(e) \int_{-1}^{-2} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}; \quad (f) \int_1^2 \frac{dx}{x \ln^p x}.$$

جواب: $9a^{\frac{2}{3}}$ (a)، (b) واگراست، (c) واگراست، (d) $6\sqrt[3]{2}$ ، (e) $\frac{\pi}{3}$ ؛

(f) به ازای $p < 1$ همگرا و به ازای $p \geq 1$ واگرا است.

۸-۲-۳ انتگرالهای غیر عادی زیر را حل کنید:

$$(a) \int_{-3}^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}; \quad (b) \int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$$

حل (a) انتگرال را به صورت نامعین حل می‌کنیم.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2} \left(9 \arcsin \frac{x}{3} - x \sqrt{9-x^2} \right) + C$$

تابع $F(x) = \frac{1}{2} \left(9 \arcsin \frac{x}{3} - x \sqrt{9-x^2} \right)$ تابع اولیه تعمیم یافته تابع

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

در فاصله $[-3, 3]$ است، زیرا این تابع در این فاصله پیوسته است و در هر نقطه فاصله

$(-3, 3)$ داریم $F'(x) = f(x)$ با استفاده از دستور نیوتن - لایبنتز داریم:

$$\int_{-3}^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2} \left(9 \arcsin \frac{x}{3} - x \sqrt{9-x^2} \right) \Big|_{-3}^3 = \frac{9}{2} \pi.$$

(b) انتگران را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

انتگرال را به صورت نامعین حل می‌کنیم:

$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + C$$

تابع $F(x) = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$ تابع اولیه تعمیم یافته $f(x)$ در فاصله $[0, 2]$

است، زیرا این تابع در این فاصله پیوسته است و در فاصله $[0, 2]$ داریم $F'(x) = f(x)$

بنابراین، دستور نیوتن - لایبنتز را بکار برده، داریم:

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx = \left(2 \arcsin \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} \right) \Big|_0^2 = \pi + 2.$$

۸-۲-۴ نوع انتگرال

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{x}}$$

را تعیین کنید.

حل. در نقطه $x=0$ انتگرال به بینهایت میل می کند. چون $\lambda = \frac{4}{3} > 1$ ،

پس هر دو انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{x}}$ و $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{x}}$ واگرا هستند. در نتیجه انتگرال واگراست. اگر بیکران بودن تابع را نادیده بگیریم و فرمول نیوتن-لایبنتیز را برای محاسبه بکار ببریم به نتیجه غلط

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{x}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{x}} \right) \Big|_{-1}^1 = -6.$$

می رسمیم. نادرست بودن نتیجه واضح است زیرا انتگرال تابعی مثبت است.

۸-۲-۵ انتگرالهای غیرعادی زیر را: برای همگرایی بررسی نمائید:

$$(a) \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} dx; \quad (b) \int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}} dx.$$

حل (a) انتگرال وقتی $x \rightarrow +0$ ، یک بینهایت بزرگ است. چون وقتی

$x \rightarrow +0$ داریم

$$\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \sim \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

تابع زیر علامت انتگرال در مقایسه با $\frac{1}{x}$ یک بینهایت بزرگ از مرتبه $\lambda = 1$ است. مطابق آزمون مقایسه ویژه، انتگرال واگرا است.

(b) انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1+x+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}$$

این تابع وقتی که $x \rightarrow 1$ یک بینهایت بزرگ است که اگر آن را با $\frac{1}{1-x}$

مقایسه کنیم مرتبه اش $\lambda = \frac{1}{5}$ است (زیرا کسر اول وقتی $x \rightarrow 0$ به یک میل می کند)، بنابراین بنابه آزمون مقایسه ویژه، انتگرال همگراست.

۸-۲-۶ همگرایی انتگرالهای زیر را بررسی نمائید:

$$(a) \int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x} - 1} dx; \quad (b) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}} dx; \quad (c) \int_0^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt[4]{x} - \sin x}$$

حل. (a) تابع $f(x) = \frac{\ln(1 + \sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x} - 1}$ در فاصله $(0, 2)$ مثبت و در نقطه $x = 0$ نامعین است. نشان می دهیم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. چون وقتی $x \rightarrow 0$

$$e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x, \quad \ln(1 + \sqrt[5]{x^3}) \sim \sqrt[5]{x^3}$$

داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \infty$$

همزمان نشان دادیم وقتی $x \rightarrow 0$ داریم $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ ، یعنی اگر $f(x)$ را که یک بینهایت بزرگ است با $\frac{1}{x}$ مقایسه کنیم مرتبه اش $\lambda = \frac{2}{5} < 1$ است. در نتیجه بنابه آزمون مقایسه ویژه، انتگرال همگراست.

(b) مرتبه تابع بینهایت بزرگ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}$ را در نقطه $x=2$ نسبت به $\frac{1}{2-x}$ تعیین می کنیم. برای این منظور $f(x)$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{4+x^2} \sqrt[3]{2+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}$$

پس واضح است که وقتی $x \rightarrow 2$ ، $f(x)$ یک بینهایت بزرگ از مرتبه $\lambda = \frac{1}{3} < 1$ است. مطابق آزمون مقایسه ویژه، انتگرال همگراست.

(c) تابع

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x} - \sin x}$$

در نقطه $x=0$ بیکران است. چون وقتی $x \rightarrow +0$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x} - \sin x} = \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x} \left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x}}\right)} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

و وقتی $x \rightarrow +0$ ، تابع $f(x)$ در مقایسه با $\frac{1}{x}$ بی نهایت بزرگ از مرتبه $\lambda = \frac{1}{4} < 1$ است. پس انتگرال بنابه آزمون مقایسه ویژه همگراست.

۷-۲-۸ نوع انتگرالهای زیر را تعیین کنید:

(a) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x^3}};$

(b) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}};$

(c) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}} dx;$

(d) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3+x^5};$

$$(e) \int_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}; \quad (f) \int_0^2 \frac{\ln(\sqrt[4]{x} + 1)}{e^{\tan x} - 1} dx$$

جواب: (a) همگرا (b) واگرا (c) همگرا (d) همگرا (e) واگرا (f) همگرا
۸-۲-۸ ثابت کنید که انتگرال زیر همگراست:

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

حل. در فاصله $0 < x \leq 1$

$$0 \leq \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ولی انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست، پس بنابه آزمون مقایسه، انتگرال

$$\int_0^1 \left| \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} \right| dx$$

همگراست و در نتیجه انتگرال مورد نظربه طور مطلق همگراست.

۸-۲-۹ ثابت کنید که انتگرال

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

همگراست و آنرا حساب کنید

حل. از روش جزء بجزء استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $dx = dv$, $u = \ln(\sin x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx.$$

چون

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{x}{\tan x} = 0.$$

انتگرال آخری یک انتگرال عادی است. در نتیجه انتگرال اصلی همگراست.

حال در انتگرال I فرض می‌کنیم $x = 2t$ ، داریم:

$$dx = 2dt \quad x = 0 \text{ at } t_1 = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} \text{ at } t_2 = \frac{\pi}{4}$$

و از آنجا

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx &= 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = 2 \int_0^{\pi/4} (\ln 2 + \ln \sin t + \ln \cos t) dt = \\ &= 2t \ln 2 \Big|_0^{\pi/4} + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t \, dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t \, dt.$$

برای محاسبه انتگرال آخری تغییر متغیر $t = \pi/2 - z$ را بکار می‌بریم، داریم

$$dt = -dz; \quad t = 0 \text{ at } z_1 = \pi/2; \quad t = \pi/4 \text{ at } z_2 = \pi/4.$$

$$2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t \, dt = -2 \int_{\pi/2}^{\pi/4} \ln \cos \left(\frac{\pi}{2} - z \right) dz = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin z \, dz \quad \text{پس}$$

بنابر این

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t \, dt + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin z \, dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin t \, dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I$$

بالاخره

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

۸-۲-۱۰ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$(n \text{ عددی طبیعی است}) \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

حل. وقتی $x \rightarrow 1-0$ ، تابع در مقایسه با $\frac{1}{1-x}$ یک بینهایت بزرگ از مرتبه $\lambda = \frac{1}{2}$ است. بنابر این انتگرال همگراست.

برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $x = \sin t$ استفاده می‌کنیم. آنگاه

$$dx = \cos t \, dt, \quad x = 0 \quad t = 0, \quad x = 1 \quad t = \pi/2$$

پس

$$\int_0^1 \frac{x^n \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t \cdot \cos t \, dt}{\cos t} = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$$

انتگرال حاصل در مسئله ۹-۶-۶ حساب شده است.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{زوج است } n \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} & \text{فرد است } n \end{cases}$$

۸-۲-۱۱ انتگرالهای زیر را محاسبه و یا واگرایی آنها را ثابت کنید:

$$(a) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}; \quad (b) \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}; \quad (c) \int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$\frac{51}{7} (c)$$

$$2 \sqrt{\ln 2} (b)$$

جواب: (a) واگرا

۸-۲-۱۲ انتگرال زیر را حساب کنید

$$I_n = \int_0^1 x^m \ln^n x \, dx \quad (n \text{ و } m > -1 \text{ طبیعی است})$$

حل. به ازای $n=0$ ، انتگرال مستقیماً حساب می شود:

$$I_0 = \int_0^1 x^m \, dx = \left. \frac{x^{m+1}}{m+1} \right|_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

به ازای $n > 0$ ، انتگرال را به روش جزء بجزء حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} u &= \ln^n x; & dv &= x^m \, dx; \\ du &= n \ln^{n-1} x \frac{dx}{x}; & v &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \end{aligned}$$

داریم:

$$I_n = \left. \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x \right|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m \ln^{n-1} x \, dx = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}$$

از این دستور کاهش می توان از I_n به I_0 رسید:

$$I_n = -\frac{n}{m+1} I_{n-1} = +\frac{n(n-1)}{(m+1)^2} I_{n-2} = \dots = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n} I_0$$

وبالآخره

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

۸-۲-۱۳ انتگرال

$$I = \int_{0.3}^{2.0} \frac{e^{-x} \, dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

را بادقت ۰/۰۳ حساب کنید.

حل. چون $2+x-x^2 = (2-x)(1+x)$ ، پس انتگرال در $x=2$ بی کران

است. انتگرال را به صورت مجموع دو انتگرال می نویسیم:

$$I_1 = \int_{0.3}^{2-\varepsilon} \frac{e^{-x} \, dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}, \quad I_2 = \int_{2-\varepsilon}^2 \frac{e^{-x} \, dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

انتگرال اول را بادقت مورد نظر حساب می کنیم و سپس دومی را تخمین می زنیم. به ازای

$\varepsilon \leq 0.1$ داریم:

$$0 < I_2 < \frac{e^{-1.9}}{\sqrt[4]{2.9}} \int_{2-\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}} = 0.115 \times \frac{4}{3} \varepsilon^{\frac{3}{4}} = 0.153 \varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

با فرض $\varepsilon = 0.1$ داریم $I_2 < 0.028$. حال انتگرال

$$I_1 = \int_{0.3}^{1.9} \frac{e^{-x} \, dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

را بوسیله دستور سیمپسون با $h = 0.8$ حساب می کنیم:

$$S_{0.8} = 0.519$$

و با $h/2 = 0.4$ داریم:

$$S_{0.4} = 0.513$$

بنابر این، مقدار انتگرال I_1 با دقت بیشتر و با خطای کمتر از 0.001 برابر 0.513 است. چون I_2 مثبت است پس مقدار انتگرال بعد از گرد کردن، با خطای کمتر از 0.03 تقریباً برابر 0.52 است.

توجه: با فرض $\varepsilon = 0.01$ داریم $I_2 < 0.005$ ولی محاسبه

$$I_1 = \int_{0.3}^{1.99} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

خیلی پر زحمت است.

۱۴-۲-۸ نوع انتگرالهای زیر را تعیین کنید:

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}; \quad (b) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x};$$

$$(c) \int_0^1 \frac{\cos^2 x dx}{(1-x)^2}; \quad (d) \int_0^1 \frac{\tan x dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (e) \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{6}{5}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{|1-x^2|}}.$$

جواب: (a) همگرا (b) واگرا (c) واگرا (d) همگرا (e) همگرا

۳-۸ کاربردهای فیزیکی و هندسی انتگرالهای غیر عادی

۱-۳-۸ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = \frac{1}{1+x^2}$ و مجانب اش را

حساب کنید.

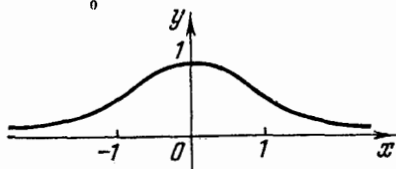
حل. تابع $y = \frac{1}{1+x^2}$ در تمام محور حقیقی پیوسته است و $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$.

پس محور x ها مجانب منحنی است که در شکل ۱۱۹ داده شده است. مساحت مورد نظر بین منحنی و محور x ها که در دو طرف این محور نامحدود است قرار دارد. بعبارت دیگر هدف محاسبه انتگرال غیر عادی

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

است با توجه به تقارن ناحیه نسبت به محور y ها داریم:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^A = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$



شکل ۱۱۹

۲-۳-۸ مساحت سطح حاصل از دوران قسمتی از منحنی $y = e^{-x}$ که بین $x = +\infty$ و $x = 0$ واقع است حول محور x ها را حساب کنید.
حل. مساحت مورد نظر با مقدار انتگرال غیرعادی زیر برابر است:

$$S = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-x} \sqrt{1+e^{-2x}} dx$$

برای محاسبه، از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$e^{-x} = t \quad dt = -e^{-x} dx \quad t = 1, x = 0 \quad t = 0 \quad x = \infty$$

پس

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = 2\pi \cdot \frac{1}{2} [t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})]_0^1 = \pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$$

۳-۳-۸ مساحت محدود به حلقه فلیوم دکارت^۱

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

را بدست آورید.

حل. فلیوم دکارت در شکل ۸۷ نشان داده شده است. معادله منحنی را در مختصات قطبی تعیین می کنیم:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi$$

$$\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi - 3a \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$$

چون مساحت مطلوب، متناظر تغییرات φ بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ است، پس

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi$$

برای محاسبه از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$\tan \varphi = t; \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = dt; \varphi = 0 \quad t = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad t = \infty$$

$$S = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} = \frac{9a^2}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} = -\frac{3a^2}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1+t^3} \right]_0^A = \frac{3}{2} a^2$$

۸-۳-۴ حجم حاصل از دوران منحنی $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ حول مجانب اش $x = 2a$ را بدست آورید.

حل. منحنی در شکل ۱۲۰ نشان داده شده است. مبدا مختصات را بدون تغییر جهت محورهای مختصات به نقطه $O'(2a, 0)$ منتقل می کنیم. در دستگاه مختصات جدید

$$X = x - 2a, Y = y$$

بوده و معادله منحنی به صورت

$$Y^2 = \frac{(X+2a)^3}{-X}$$

است. در دستگاه محورهای مختصات جدید، محور دوران $X = 0$ ، یعنی مجانب منحنی می باشد و مقدار حجم برابر است با

$$V = \pi \int_{-\infty}^{\infty} X^2 dY = 2\pi \int_0^{\infty} X^2 dY$$

برای محاسبه متغیر را با X عوض می کنیم، برای این منظور باید

$dY = Y' dX$ از معادله منحنی در دستگاه جدید حساب شود:

$$2YY' = -\frac{3(X+2a)^2 X - (X+2a)^3}{X^2} = -\frac{2(X+2a)^2 (X-a)}{X^2}$$

که در آن $Y > 0$ و داریم:

$$Y' = -\frac{(X+2a)^2(X-a)}{X^2Y} = -\frac{(X+2a)(X-a)}{X^2\sqrt{-(X+2a)/X}}$$

پس

$$V = -2\pi \int_{-2a}^0 \frac{(X+2a)(X-a)}{\sqrt{-(X+2a)/X}} dX$$

از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$(X+2a)/X = -t^2; \quad X = -2a \quad t=0, \quad X=0 \quad t=\infty$$

بنابر این

$$X = -\frac{2a}{1+t^2}; \quad dX = \frac{4at}{(1+t^2)^2} dt; \quad X+2a = \frac{2at^2}{1+t^2};$$

$$X-a = -\frac{3a+at^2}{1+t^2};$$

از آنجا

$$V = 2\pi \int_0^\infty \frac{2at^2(3a+at^2)4at}{t(1+t^2)(1+t^2)(1+t^2)^2} dt =$$

$$= 48\pi a^3 \int_0^\infty \frac{t^3}{(1+t^2)^4} dt + 16\pi a^3 \int_0^\infty \frac{t^4}{(1+t^2)^4} dt.$$

دوباره تغییر متغیر زیر را بکار می‌بریم:

$$t = \tan z, \quad dt = \sec^2 z \, dz, \quad t=0 \quad z=0, \quad t=\infty \quad z=\pi/2$$

پس

$$V = 48\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 z \cos^4 z \, dz + 16\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 z \sin^4 z \, dz =$$

$$= 48\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 z \, dz - 48\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^6 z \, dz +$$

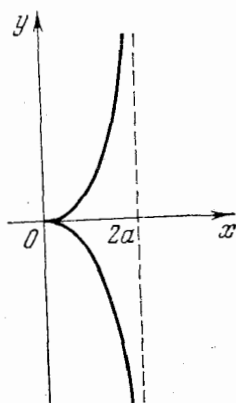
$$+ 16\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^4 z \, dz - 16\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 z \, dz$$

از دستورهای آشنای

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \quad \text{و} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

استفاده می‌کنیم (مسئله ۹-۶-۶ را ببینید)، داریم:

$$V = 64\pi a^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \times 3}{2 \times 4} - 64\pi a^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} = 2\pi^2 a^3$$



شکل ۱۲۰

۵-۳-۸ ثابت کنید که مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و محوره‌های مختصات و مجانب اش $x=1$ ، متناهی است و برابر $\frac{\pi}{2}$ می باشد.

۶-۳-۸ ثابت کنید که مساحت محدود به منحنی $y = \frac{1}{3\sqrt{x^2}}$ و محور x ها و خطوط $x = \pm 1$ برابر ۶ است و همچنین مساحت واقع بین منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ و محور x ها و خطوط $x = \pm 1$ نامتناهی است.

۷-۳-۸ مطلوب است محاسبه حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به خطوط $y = e^{-x}$ ، $x=0$ ، $y=0$ ($0 \leq x < +\infty$)

(الف) حول محور x ها،

(ب) حول محور y ها

جواب: (الف) $\frac{\pi}{2}$ (ب) 2π

۸-۳-۸ مساحت محدود به سیسویئید (یا پیچ وار) $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ و مجانبش را حساب کنید.

جواب: $3\pi a^2$

۹-۳-۸ مساحت محدود به منحنی $y = e^{-2x}$ (به ازای $x > 0$) و محوره‌های مختصات را حساب کنید:

جواب: $\frac{1}{2}$

۱۰-۳-۸ حجم حاصل از دوران شاخه نامحدود به منحنی $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ به ازای $x \geq 1$ ، حول محور x ها را حساب کنید.

جواب: $\frac{4\pi}{3}$

۱۱-۳-۸ جرم m را در O مبداء مختصات در نظر بگیرد. این جرم بوسیله یک نقطه مادی M به جرم واحد که روی محور x ها و در فاصله $x=r$ از مبداء قرار دارد، جذب می شود. این نیرو بنابر قانون نیوتن برابر $F = \frac{m}{x^2}$ است. کار انجام شده توسط نیروی F را حساب کنید در صورتی که نقطه M از $x=r$ تا بینهایت تغییر مکان دهد.

حل چون نیرو در جهت خلاف تغییر مکان است. پس کار منفی است. از این رو

$$A = \int_r^{\infty} -\frac{m}{x^2} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_r^N -\frac{m}{x^2} dx = -\frac{m}{r}$$

در ضمن جابجائی بازگشت نقطه M از بینهایت به $x=r$ نیروی جاذبه نیوتنی، کار مثبتی معادل $\frac{m}{r}$ انجام خواهد داد. این کمیت را پتانسیل نیروی مورد نظر در نقطه $x=r$ می نامند و معیاری برای تعیین انرژی پتانسل ذخیره شده در یک نقطه است.

۱۲-۳-۸ در مطالعه بر روی جریانهای میرا که از تخلیه الکتریکی حاصل می شود گالوانومترهای بالستیکی مورد استفاده قرار می گیرند که درجات آنها بجای

متناسب بودن با شدت جریان I ، با انتگرال شدت جریان، یعنی $g = \int_0^{\infty} I dt$

متناسب هستند، و یا بجای متناسب بودن با مجذور شدت جریان I^2 ، با انتگرال مجذور

شدت جریان، یعنی $S = \int_0^{\infty} I^2 dt$ متناسبند. در این رابطه t زمان بوده و از شروع تخلیه

سنجیده می شود و I شدت جریان متغیری است که تابع زمان t می باشد. گرچه در عمل، شدت جریان پس از زمان محدودی غیر قابل اندازه گیری است، ولی از نظر تئوری، فرآیند همواره ادامه دارد. برای آسان شدن رابطه در تمام محاسبات زمان تخلیه را محدود فرض می کنیم.

g و S را در فرآیندهای زیر حساب کنید:

(الف) $I = I_0 e^{-kt}$ (تخلیه ساده) k ضریب ثابتی است که از صفر بزرگتر

می باشد.

(ب) $I = I_0 e^{-kt} \sin \omega t$ (تخلیه نوسانی ساده) ω و k ضرایب ثابتی هستند.

حل. (الف)

$$g = \int_0^{\infty} I_0 e^{-kt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A I_0 e^{-kt} dt = I_0 \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{-kt}}{k} \right]_0^A = I_0/k;$$

$$S = \int_0^{\infty} I_0^2 e^{-2kt} dt = \frac{I_0^2}{2k};$$

(ب)

$$g = \int_0^{\infty} I_0 e^{-kt} \sin \omega t dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A I_0 e^{-kt} \sin \omega t dt =$$

$$= \frac{I_0}{\omega^2 + k^2} \lim_{A \rightarrow \infty} [(\omega \cos \omega t + k \sin \omega t) e^{-kt}]_0^A = \frac{I_0 \omega}{\omega^2 + k^2};$$

$$S = \int_0^{\infty} I_0^2 e^{-2kt} \sin^2 \omega t dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A I_0^2 e^{-2kt} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt =$$

$$= -\frac{I_0^2}{4k} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{\omega^2 + k^2} (k^2 \cos 2\omega t + \omega k \sin 2\omega t) \right] e^{-2kt} \Big|_0^A =$$

$$= \frac{I_0^2 \omega^2}{4k (k^2 + \omega^2)}.$$

۱۳-۳-۸ فرض کنید یک تیر افقی با طول نا محدود (از دو طرف) بر روی

پایه ای الاستیک (یا کشان) قرار دارد و بوسیله نیروی متمرکز P در نقطه O ، خم شده است. اگر محور x ها را در امتداد تیر (قبل از خم شدن) فرض کنیم و محور y ها را در نقطه O با جهت به طرف پائین رسم کنیم، معادله منحنی تیر خم شده به صورت زیر است

$$y = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\alpha|x|} (\cos \alpha x + \sin \alpha |x|),$$

که در آن α و k ضرایب ثابت معینی هستند. انرژی پتانسیل حاصل از تغییر متغیر شکل الاستیک تیر را بکمک معادله

$$W = Ee \int_0^{\infty} (y'')^2 dx$$

حساب کنید. (E , e ثابتند)

حل. y'' را حساب می کنیم، داریم:

$$y'' = \frac{P\alpha^3}{k} e^{-\alpha x} [(\cos \alpha x + \sin \alpha x) - 2(-\sin \alpha x + \cos \alpha x) +$$

$$+ (-\sin \alpha x - \cos \alpha x)] = \frac{P\alpha^3}{k} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x).$$

پس

$$W = \frac{P^2 \alpha^6 E e}{k^2} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} (1 - 2 \sin \alpha x \cos \alpha x) dx =$$

$$= \frac{P^2 \alpha^6 E e}{k^2} \left[\frac{1}{2\alpha} - \frac{2\alpha}{4\alpha^2 + 4\alpha^2} \right] = \frac{P^2 \alpha^5 E e}{4k^2}.$$

۱۴-۳-۸ چقدر کار لازم است تا جسمی به جرم m را از سطح زمین تا بینهایت دور کنیم؟

جواب: mgR راهنمایی: نیروی جاذبه جسمی توسط زمین بوسیله دستور $f = \frac{mg R^2}{r^2}$ حساب می شود که در آن m جرم جسم، r فاصله جسم تا مرکز زمین، R شعاع زمین است.

۱۵-۳-۸ چقدر کار لازم است تا یک بار الکتریکی $e_2 = 1$ را از بینهایت تا یک واحدی بار الکتریکی e_1 جابجا کنیم؟

جواب: e_1 راهنمایی: نیروی وارده بر همدیگر بوسیله بارها از دستور $\frac{e_1 e_2}{r^2}$ بدست می آید، که در آن e_1 و e_2 مقادیر بارهای الکتریکی و r فاصله بین آنهاست.

۴-۸ چند مسئله اضافی

۱-۴-۸ ثابت کنید که انتگرال

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

به ازای $p > 1$ و $q < 1$ همگراست.

راهنمایی: انتگرال را به صورت زیر بنویسید:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int_1^a \frac{dx}{x^p \ln^q x} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \quad (a > 1)$$

و سپس با توجه به اینکه در انتگرال اول وقتی $x \rightarrow 1$ داریم $\ln x = \ln[1 + (x-1)] \sim x-1$ و در انتگرال دوم وقتی $q < 0$ ، تابع لگاریتمی نسبت به هر تابع نمائی به کندی صعود می کند، از آزمون مقایسه ویژه استفاده کنید.

۲-۴-۸ ثابت کنید که انتگرال

$$\int_0^{\infty} x^p \sin x^q dx, \quad q \neq 0$$

با شرط $-1 < (p+1)/q < 0$ همگرای مطلق و با شرط $0 \leq (p+1)/q < 1$ همگرای شرطی است.

راهنمایی: تغییر متغیر $x^q = t$ را به کار ببرید و انتگرال را به صورت

$$\pm \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} \frac{p+1}{t^{q-1}} \sin t \, dt$$

تبدیل بکنید و سپس

$$\int_0^{+\infty} \frac{p+1}{t^{q-1}} \sin t \, dt$$

را به صورت مجموع دو انتگرال

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2} \, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} \, dt$$

بنویسید که در آن $\alpha = 1 - \frac{p+1}{q}$ و آنگاه نشان دهید که انتگرال به ازای $1 < \alpha < 2$ همگرایی مطلق و به ازای $0 < \alpha \leq 1$ همگرایی شرطی است. توجه داشتهباشید که در $\frac{p+1}{q} = 0$ انتگرال تبدیل به انتگرال $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ می شود که همگراییشرطی است و به ازای $\frac{p+1}{q} = -1$ تبدیل به انتگرال واگرایی $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} \, dt$ می شود.

۳-۴-۸ ثابت کنید که انتگرال زیر موسوم به انتگرال اویلر نوع اول به ازای

 $p > 0$ و $q > 0$ همگراست:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx \quad (\text{تابع beta})$$

راهنمایی: انتگرال را به مجموع دو انتگرال

$$\int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx$$

تبدیل کرده و از آزمون مقایسه ویژه استفاده کنید.

۴-۴-۸ ثابت کنید که اگر $|\alpha| \neq |\beta|$ آنگاه

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx = 0$$

راهنمایی: اگر $|\alpha| \neq |\beta|$ آنگاه

$$\int_0^T \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx$$

کراندار است.

۵-۴-۸ ثابت کنید:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2n+1} \, dx = \frac{n!}{2} \quad (n \text{ طبیعی است})$$

راهنمایی: با تغییر متغیر $t = x^2$ انتگرال تبدیل به تابع گامای اوایلر می شود.

۸-۴-۶ ثابت کنید که اگر به ازای هر عدد مثبت a انتگرال

$$\int_a^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

همگرا باشد و اگر وقتی $x \rightarrow 0$ تابع $f(x)$ به A میل کند، آنگاه انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

همگراست و مقدارش با $A \ln(\beta/\alpha)$ برابر است.

راهنمایی: فرض کنید

$$\int_a^{\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = \int_{a\alpha}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{a\beta}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(x)}{x} dx = A \ln \frac{\beta}{\alpha} + \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(x) - A}{x} dx$$

و سپس قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته را به کار برده و نشان دهید که وقتی $a \rightarrow 0$ آخرین انتگرال به صفر میل می کند.

۸-۴-۷ ثابت کنید که

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

راهنمایی: در انتگرال اول فرض کنید $f(x) = e^{-x}$ و در انتگرال دوم

$f(x) = \cos x$ ، و سپس از نتایج مسئله ۸-۴-۶ استفاده کنید.

۸-۴-۸ به ازای چه مقادیری از m انتگرال

$$\int_0^2 \frac{1 - \cos x}{x^m} dx$$

همگراست؟

جواب: به ازای $m < 3$ همگرا و به ازای $m \geq 3$ واگراست.

راهنمایی: از هم ارزی $\frac{x^2}{2}$ با $1 - \cos x$ وقتی $x \rightarrow 0$ استفاده کنید.

۸-۴-۹ ثابت کنید که انتگرال

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^k}$$

به ازای $k < 1$ همگرا و به ازای $k \geq 1$ واگراست.

راهنمایی: انتگرال

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^k}$$

را به مجموع دو انتگرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x)^k} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^k}$$

تبدیل کرده و با تغییر متغیر $x = \pi - t$ انتگرال دوم را به انتگرال اول تبدیل کنید و آنگاه از هم ارزی $\sin x$ با $x \rightarrow 0$ وقتی استفاده کنید.
۱۰-۴-۸ ثابت کنید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^s} dx$$

وقتی $0 < s < 4$ همگرا و وقتی $1 < s < 4$ همگرای مطلق است.
راهنمایی: فرض کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^s} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^s} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^s} dx$$

در طرف دوم، تابع انتگرال اول، وقتی $x \rightarrow 0$ یک بینهایت بزرگ از مرتبه $s-3$ است. با توجه به آزمون مقایسه ویژه، وقتی $s-3 < 1$ یعنی وقتی $s < 4$ ، انتگرال اول به طور مطلق همگراست و این انتگرال وقتی $s \geq 4$ ، واگرا می باشد. در انتگرال دوم چون تابع $\sin x (1 - \cos x)$ کراندار است در نتیجه به ازای $s > 1$ به طور مطلق همگراست. اما اگر $0 < s \leq 1$ ، انتگرال دوم به طور مشروط همگراست، چون تفاضل دو انتگرال همگرای شرطی

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^s} dx \quad \text{و} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x^s} dx$$

به طور مشروط همگراست (مسئله ۱۳-۱-۸ را ببینید)

۱۱-۴-۸ فرض کنید که

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

همگراست و تابع $\varphi(x)$ کراندار است. آیا انتگرال

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (2)$$

لازم است که همگرا باشد؟ اگر انتگرال (۱) به طور مشروط همگرا باشد در همگرایی انتگرال (۲) چه می توان گفت؟
 راهنمایی: انتگرال (۲) می تواند واگرا باشد. مثلاً

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi, \\ -1, & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi. \end{cases}$$

انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ همگراست (مسئله ۱۳-۱-۸ را ببینید) ولی انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

واگراست (مسئله ۱۳-۱-۸ را ببینید). اما اگر انتگرال $\int_a^{\infty} f(x) dx$ همگرای مطلق باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$ به طور مطلق همگراست. اگر $C > |\varphi(x)|$ آنگاه

$$|f(x) \varphi(x)| < C |f(x)|$$

و سپس از قضیه مقایسه استفاده کنید.

۱۲-۴-۸ درستی رابطه

$$f(x) = 2f(\pi/4 + x/2) - 2f(\pi/4 - x/2) - x \ln 2$$

را وقتی $f(x) = -\int_0^x \ln \cos y dy$ ثابت کنید. و با استفاده از این تساوی انتگرال زیر را حساب کنید:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos y dy.$$

راهنمایی: با تغییر متغیر $y = \frac{\pi}{2} - z$ ، تابع $f(x)$ را به

$$f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin z dz$$

تبدیل کنید. با توجه به $\sin z = 2 \sin \frac{z}{2} \cdot \cos \frac{z}{2}$ انتگرال فوق را به مجموع سه انتگرال تبدیل کنید.

۱۳-۴-۸ یک دستور کاهش برای انتگرال

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx \quad (n \text{ طبیعی است})$$

پیدا کرده و سپس آنرا حساب کنید.

راهنمایی: با استفاده از روش جزء بجزء با فرض

$$u = \ln \cos x, \cos 2nx \, dx = dv$$

داریم

$$I_n = \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx \frac{\sin x}{\cos x} dx, \quad n \neq 0$$

چون

$$\sin 2nx = \sin (2n-2)x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos (2n-2)x,$$

بنابراین

$$I_n = \frac{1}{2n} \left[- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2n-2)x \frac{\sin x}{\cos x} dx + \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2n-2)x \cdot \sin 2x \, dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos (2n-2)x \, dx \right]$$

مستقیماً با محاسبه نشان دهید که اگر $n \geq 2$ عبارتهای دوم و سوم صفر هستند. بنابراین برای $n \geq 2$ داریم:

$$I_n = - \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2n-2)x \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \frac{n-1}{n} I_{n-1}$$

چون

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\pi}{4}$$

پس

$$I_2 = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}; \quad I_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3 \cdot 4}$$

و به استقراء داریم:

$$I_n = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{4n}$$

فصل نهم

سریهای نامتناهی

۹-۱ همگرایی و واگرایی سریهای نامتناهی

سری زیر را در نظر می گیریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (۱)$$

فرض کنید

$$S_1, S_2, S_3, \dots$$

دنباله مجموعهای جزئی سری باشد که در آن

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (۲)$$

اگر این دنباله همگرا باشد، یعنی عددی مانند S وجود داشته باشد طوری که

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ آنگاه سری (۱) را همگرا (یا متقارب) و S را مجموع آن گویند.

اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ وجود نداشته باشد، سری را واگرا (یا متباعد) نامند گاهی سری

نامتناهی (۱) را با $\sum u_n$ نشان می دهیم که u_n جمله عمومی یا جمله n ام سری است.

مثال ۱ : سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

را در نظر می گیریم. در این سری

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

پس این سری همگراست و $S=1$.

مثال ۲: سری

را در نظر می گیریم. در اینجا ۱ یا $S_n = 0$ ، که بستگی به فرد یا زوج بودن n دارد. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ موجود نیست پس سری واگراست.

مطالب بنیادی درباره سریهای نامتناهی

۱- (الف) شرط لازم همگرایی. اگر سری $\sum u_n$ همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

ولی لازم نیست که عکس آن درست باشد، یعنی اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ممکن است که سری $\sum u_n$ همگرا نباشد.

(ب) شرط کافی واگرایی. اگر حد جمله n ام صفر نباشد، سری واگراست.

۲. اگر تمام جملات یک سری را به یک عدد ثابت مخالف صفر ضرب بکنیم، نوع آن (از نظر همگرایی یا واگرایی) تغییر نمی کند.

۳. اگر تعداد متناهی جمله از اول سری حذف کنیم یا تعداد متناهی جمله به آن اضافه کنیم، نوع آن تغییر نمی کند.

سریهای خاص

۱- سری هندسی^۱. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

را یک سری سری هندسی گویند که r و a دو عدد ثابت هستند. وقتی $r < 1$ سری همگرا است و مجموع آن برابر $S = \frac{a}{1-r}$ است و هرگاه $r \geq 1$ ، سری واگراست مجموع n جمله اول آن برابر است با

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

۲- سری p . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

را سری p گویند که در آن p عددی ثابت است، که به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \leq 1$ واگرا می باشد. در حالت $p = 1$ آن را سری همساز یا هارمونیک گویند.

آزمونهای سربهای عددی برای همگرایی و واگرایی

۱- آزمون مقایسه برای یک سری با جملات نامنفی

(الف) همگرایی. فرض کنید به ازای هر $n > N$ داشته باشیم $v_n \geq 0$ و $\sum v_n$ همگرا باشد. آنگاه اگر به ازای هر $n > N$ نامساویهای

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

برقرار باشند، $\sum u_n$ نیز همگراست. توجه کنید که $n > N$ از مرتبه ای به بعد برقرار است. اغلب، این نامساویها از مرتبه $N = 1$ برقرار هستند.

مثال: چون

$$\frac{1}{2^n + 1} \leq \frac{1}{2^n}$$

و $\sum \frac{1}{2^n}$ همگراست، لذا $\sum \frac{1}{2^n + 1}$ نیز همگرا می باشد.

(ب) واگرایی. فرض کنید به ازای هر $n > N$ داریم $v_n \geq 0$ و $\sum v_n$ واگراست. آنگاه اگر به ازای هر $n > N$ ، داشته باشیم $u_n \geq v_n$ ، سری $\sum u_n$ نیز واگراست.

مثال: چون

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

و $\sum \frac{1}{n}$ واگراست، لذا $\sum \frac{1}{\ln n}$ نیز واگرا می باشد.

۲- آزمون خارج قسمت برای یک سری با جملات نامنفی

(الف) اگر $v_n \geq 0$ و $u_n \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$$

آنگاه $\sum v_n$ و $\sum u_n$ یا هر دو واگرا هستند و یا هر دو همگرا می باشند، یعنی این دو سری از یک نوع می باشند.

(ب) اگر در قسمت (الف) $A = 0$ و $\sum v_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum u_n$ نیز

همگراست.

(ج) اگر در قسمت (الف) $A = \infty$ ، و سری $\sum v_n$ واگرا باشد. آنگاه $\sum u_n$

نیز واگرا است. (مسئله ۸-۱-۹) را ببیند)

این آزمون در رابطه با آزمون مقایسه است و اغلب در تشخیص نوع سریها خیلی مفید است. در حالت خاص هر گاه $v_n = 1/n^p$ ، سری مجهول با سری p مقایسه می شود.

قضیه ۱. فرض کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = A$ آنگاه

(i) وقتی $p > 1$ و A عددی متناهی باشد. سری $\sum u_n$ همگراست.

(ii) اگر $p \leq 1$ و $A \neq 0$ می تواند بینهایت باشد، سری $\sum u_n$ واگراست.

چند مثال: ۱. $\sum \frac{n}{4n^3 - 2}$ همگراست، زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{n}{4n^3 - 2} = \frac{1}{4}.$$

۲. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \cdot \frac{\ln n}{(n+1)^{1/2}} = \infty.$$

لذا $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ واگراست.

۳. آزمون انتگرال برای یک سری با جملات نامنفی

اگر $f(x)$ تابعی مثبت، و به ازای $x \geq N$ نزولی باشد و به طوری که

$$f(n) = u_n, \quad n = N, N+1, N+2, \dots,$$

آنگاه $\sum u_n$ وقتی همگرا یا واگراست که

$$\int_N^\infty f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_N^M f(x) dx$$

همگرا یا واگرا باشد. در حالت خاص، ممکن است $N = 1$ باشد.

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، زیرا

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$$

موجود است.

۴- آزمون سریهای متناوب

تعریف: سری را متناوب گویند که علامت جملات آن یک در میان منفی و

مثبت باشد.

یک سری متناوب وقتی همگراست که دارای دو شرط زیر باشد.

$$(a) \quad |u_{n+1}| \leq |u_n| \quad n \geq 1$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (\text{یا} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0)$$

(قضیه لایبنتز) مسئله ۱۵-۱-۹ را ببیند .

مثال : در سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

داریم $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ که در آن

$$|u_n| = \frac{1}{n}, \quad |u_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$$

پس به ازای $n \geq 1$ داریم $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ ، بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0.$$

سری همگراست .

قضیه ۲ .

اگر یک سری متناوب دارای دو شرط (a) و (b) باشد. جملات آن را تا

جمله ای بنویسیم، خطای عددی از قدر مطلق جمله بعدی کمتر است .

مثال : اگر جملات سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

را تا جمله چهارم بنویسیم خطا از $0.2 = \frac{1}{5}$ کمتر است

۵ . همگرایی مطلق و همگرایی شرطی

سری $\sum u_n$ را همگرایی مطلق گویند اگر سری $\sum |u_n|$ همگرا باشد. اگر $\sum u_n$

همگرا ولی $\sum |u_n|$ واگرا باشد. آنگاه $\sum u_n$ را همگرای شرطی گویند.

قضیه ۳

اگر $\sum |u_n|$ همگرا باشد $\sum u_n$ نیز همگرا است . بعبارت دیگر، یک سری همگرای

مطلق، همگراست (مسئله ۱۷-۱-۹ را ببیند).

مثال ۱ . سری

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

همگرای مطلق است پس همگراست زیرا

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

همگراست .

مثال ۲ . سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

همگراست ولی سری

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

واگراست. پس سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

به طور مشروط همگراست.

تمام آزمونهایی که در تشخیص نوع سریهای نامنفی به کار می روند در تشخیص همگرایی مطلق نیز به کار می روند.

۶. آزمون نسبت (یا قاعده دالامبر) فرض کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$$

آنگاه سری $\sum u_n$

(الف) (به طور مطلق) همگراست اگر $L < 1$

(ب) واگراست اگر $L > 1$

اگر $L = 1$ نوع سری با این آزمون مشخص نمی شود (مسئله ۲۰-۱-۹ را ببینید).

۷. آزمون ریشه n ام (یا قاعده کوشی) اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$$

آنگاه سری $\sum u_n$

(الف) به طور مطلق همگراست اگر $L < 1$

(ب) واگراست هرگاه $L > 1$

وقتی $L = 1$ نوع سری با این روش مشخص نمی شود.

توجه. اگر نوع یک سری با آزمون نسبت مشخص نشود، نوع آن با آزمون ریشه نیز مشخص نخواهد شد و بالعکس.

۸. آزمون را به ۱ اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = L$$

آنگاه سری $\sum u_n$

(الف) (به طور مطلق) همگراست اگر $L < 1$

(ب) واگراست یا بطور مشروط همگراست اگر $L > 1$

اگر $L = 1$ نوع سری با این آزمون مشخص نمی شود. اغلب، این آزمون وقتی بکار می رود که نوع سری با آزمون نسبت قابل تشخیص نیست.

۹. آزمون گوس

اگر

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1 - \frac{L}{n} + \frac{c_n}{n^2}$$

که در آن به ازای هر $n > N$ داریم $|c_n| < P$ ، آنگاه سری $\sum u_n$

(الف) (به طور مطلق) همگراست اگر $L > 1$

(ب) واگراست یا بطور مشروط همگراست اگر $L \leq 1$

اغلب از این آزمون وقتی استفاده می شود که نوع سری با آزمون «را به» قابل تشخیص نیست.

چند قضیه درباره همگرایی مطلق سربها

قضیه ۴

می توان ترتیب جملات یک سری همگرای مطلق را بدلتخواه عوض کرد و همه سربهای حاصل همگرا هستند و یک مجموع دارند. حال آن که اگر جملات یک سری همگرای شرطی را به طور مناسب تغییر دهیم سری حاصل می تواند واگرا و یا همگرا به مجموع دلخواه باشد (مسئله ۱-۴-۹ را ببینید).

قضیه ۵.

مجموع، تفاضل و حاصلضرب دوسری همگرای مطلق، همگرای مطلق است. این عملیات را می توان برای تعداد متناهی سری انجام داد.

۱-۱-۹ (الف) ثابت کنید سری

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

همگراست

(ب) مجموع سری (الف) را حساب کنید.

حل.

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

پس

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

پس سری همگراست و مجموع آن برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲-۱-۹. (الف) ثابت کنید که سری

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

همگراست

(ب) مجموع آن را بیابید.

حل. داریم

$$S_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{2}{3} S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

از آنجا

$$\frac{1}{3} S_n = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \text{یا} \quad S_n = 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) = 2$$

پس سری همگراست و مجموع آن برابر ۲ است.

روش دیگر: این سری یک سری هندسی است که در آن

پس مجموع آن برابر است با $a = \frac{2}{3}, r = \frac{2}{3}$

$$a/(1-r) = \frac{2/3}{(1-2/3)} = 2$$

۳-۱-۹. ثابت کنید که سری

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

واگراست.

حل. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

پس سری واگراست (زیرا شرط کافی واگرایی در سری موجود است).

۹-۱-۴ نشان دهید سری با جمله عمومی

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

واگراست با اینکه $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

حل. براحتی تحقیق می شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

می نویسیم

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{1} \end{aligned}$$

چون S_n بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد لذا سری واگراست.

این مسئله نشان داد که $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ یک شرط لازم برای همگرایی سری $\sum u_n$ است نه یک شرط کافی.

مسائل مربوط به آزمون مقایسه و آزمون خارج قسمت

۹-۱-۵ اگر

$$0 \leq u_n \leq v_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

و اگر $\sum v_n$ همگرا باشد، ثابت کنید $\sum u_n$ نیز همگراست (اثبات همگرایی در آزمون مقایسه).
حل. فرض کنید

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

چون $\sum v_n$ همگراست پس $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ موجود و مثلاً برابر T است. همچنین، چون

$$v_n \geq 0, \quad T_n \leq T$$

پس

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq T$$

یا

$$0 \leq S_n \leq T$$

پس S_n کراندار و صعودی است لذا دارای حد است یعنی سری $\sum u_n$ همگراست.

۹-۱-۶ با استفاده از آزمون مقایسه ثابت کنید

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

واگراست.

حل. داریم.

$$1 \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{15} \geq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} \text{ (جمله ۸)} = \frac{1}{2}$$

پس

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7}\right) + \dots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

چون طرف راست از هر عدد مثبتی بزرگتر است پس مجموع آن بهایست، بنابراین سری واگراست

با روشی که دیدیم می توان نشان داد که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ به ازای $p \leq 1$ واگرا و به ازای $p > 1$ همگراست.

۷-۱-۹ نوع سری زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$$

حل. چون

$$\ln n < n \quad \text{و} \quad \frac{1}{2n^3 - 1} \leq \frac{1}{n^3}$$

پس

$$\frac{\ln n}{2n^3 - 1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، بنابراین سری مفروض نیز همگرا می باشد. ۸-۱-۹ فرض کنید که u_n و v_n مثبت هستند. اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0, \quad (A \text{ بینهایت نیست})$$

ثابت کنید $\sum u_n$ و $\sum v_n$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند.

حل. بنابه فرض، به ازای هر $\epsilon > 0$ می توان عدد طبیعی N را طوری بدست آورد که وقتی $n > N$ داشته باشیم

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - A \right| < \epsilon$$

پس به ازای تمام مقادیر $n = N+1, N+2, \dots$ داریم:

$$- \epsilon < \frac{u_n}{v_n} - A < \epsilon \quad \text{یا} \quad (A - \epsilon)v_n < u_n < (A + \epsilon)v_n \quad (۱)$$

اگر n را از $N+1$ تا بینهایت تغییر دهیم و سپس نامساویهای حاصل را جمع کنیم (یا دقیقتر به n از $N+1$ تا M ، مقدار دهیم و سپس M را به بینهایت میل دهیم). نتیجه

می شود.

$$(A - \epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} v_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq (A + \epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (2)$$

اگر فرض کنیم $A - \epsilon > 0$ به کلیت مسئله خللی وارد نمی شود. پس از طرف راست رابطه (۲) نتیجه می شود که هرگاه $\sum v_n$ همگرا باشد $\sum u_n$ نیز همگراست. از طرف چپ نامساوی (۲) چنین نتیجه می شود که هرگاه $\sum v_n$ واگراست، $\sum u_n$ نیز واگرا می باشد.

۹-۱-۹ نوع سربهای زیر را تعیین کنید

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2 + 3}$$

حل. (a) برای n های بزرگ، $\frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$ تقریباً با $\frac{4}{n^3}$ برابر است.

با فرض

$$u_n = \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{4}{n^3}$$

داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ چون $\sum v_n = 4 \sum 1/n^3$ واگراست، لذا $\sum u_n$ نیز واگراست.

توجه کنید که از رفتار u_n برای n های بزرگ سری مقایسه مناسب v_n نتیجه

می شود. در مثال فوق با توجه به این مطلب $v_n = 1/n$ بدست آمد.

روش دیگر:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n} \right) = 4$$

بنابه قضیه ۱، سری واگراست.

(b) برای n بزرگ، $u_n = \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}$ تقریباً برابر $\frac{1}{2n^2}$ است. $v_n = \frac{1}{2n^2}$

چون $\sum v_n = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n^2}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ همگراست (بنابه سری p که $p = 2$). در نتیجه سری مفروض نیز همگراست.

روش دیگر:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

بنابه قضیه ۱، سری همگراست.

(c) بنابه دستور هوییتال داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \left(\frac{\ln n}{n^2 + 3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \left(\frac{\ln n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$$

پس بنابه قضیه یک به ازای $p = 3/2$ سری همگراست.

توجه کنید که نامساوی

همواره برقرار است. ولی نمی توان به استناد آزمون مقایسه بدلیل اینکه سری $\sum 1/n$ واگرا است نتیجه بگیریم که سری مفروض هم واگراست.

۹-۱-۱۰ همگرایی سریهای

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$$

را بررسی نمائید.

حل. (a) بنابه دستور هوپیتال و یا هر روش مناسب دیگر داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^2} = 0$$

پس بنابه قضیه ۱ چون $p = 2$ سری همگراست.

(b) برای مقادیر بزرگ n عبارت $\sin(1/n)$ تقریباً با $1/n$ برابر است. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \sin^3\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin(1/n)}{1/n} \right\}^3 = 1$$

پس بنابه قضیه ۱، چون $p = 3$ سری همگراست.

۹-۱-۱۱ آزمون انتگرال را ثابت کنید.

حل. آزمون را به ازای $N = 1$ ثابت می کنیم و سپس می توان براحتی آنرا به ازای $N > 1$ ثابت کرد.

با توجه به یکنواختی $f(x)$ داریم:

$$u_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = u_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

با توجه به خواص انتگرال معین در فاصله $x = n$ تا $x = n+1$ داریم:

$$u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq u_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

اگر به n مقادیر از ۱ تا $M-1$ را بدسیم و سپس طرفین نامساویها را جمع کنیم داریم:

$$u_2 + u_3 + \dots + u_M \leq \int_1^M f(x) dx \leq u_1 + u_2 + \dots + u_{M-1} \quad (1)$$

اگر $f(x)$ اکیداً نزولی باشد علامت تساوی در (۱) را می توان حذف کرد.

اگر

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx$$

موجود و برابر S باشد از طرف چپ نامساوی (۱) نتیجه می شود که

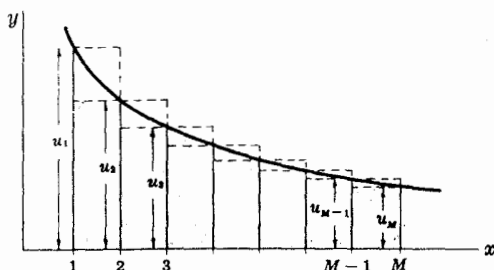
$$u_2 + u_3 + \dots + u_M$$

به طور یکنواخت صعودی از بالا به S محدود است پس $\sum u_n$ همگراست .
اگر

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx$$

بینهایت باشد طرف راست نامساوی (۱) نشان می دهد که $\sum u_n$ واگراست . و بدین ترتیب اثبات تمام می شود .

۹-۱-۱۲ اثبات مسئله ۹-۱-۱۱ را به طور هندسی تفسیر کنید .



شکل ۱۲۱

حل . به طور هندسی

$$u_2 + u_3 + \dots + u_M$$

مجموع مساحات تمام مستطیلهای را نشان می دهد که در شکل ۱۲۱ سایه دار نشان داده شده است ، در حالی که

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{M-1}$$

تمام مساحات مستطیلهائی می باشد که در شکل به صورت سایه دار یا غیر سایه دار می باشند . مقدار مساحت منحنی $y = f(x)$ از $x = 1$ تا $x = M$ بین دو مجموعه مساحتی که در نتیجه (۱) مسئله ۹-۱-۱۱ مشخص شده ، واقع است .

۹-۱-۱۳ نوع سریهای زیر را تعیین کنید :

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, (p \text{ ثابت است}), (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}; (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}; (d) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

حل . (a) با توجه به

$$\int_1^M \frac{dx}{x^p} = \int_1^M x^{-p} dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^M = \frac{M^{1-p} - 1}{1-p} \quad p \neq 1$$

اگر $p < 1$ داریم:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{1-p} - 1}{1-p} = \infty$$

پس انتگرال واگراست و در نتیجه سری واگرا می باشد.

اگر $p > 1$ داریم

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{1-p} - 1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

پس انتگرال همگراست و در نتیجه سری همگرا می باشد.

اگر $p = 1$ داریم

$$\int_1^M \frac{dx}{x^p} = \int_1^M \frac{dx}{x} = \ln M$$

و

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \ln M = \infty$$

پس انتگرال واگرا بوده و نتیجتاً سری واگراست.

بنابر این اگر $p > 1$ سری همگرا و اگر $p \leq 1$ سری واگراست.

(b) چون

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{x dx}{x^2 + 1} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right|_1^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \ln(M^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln 2 \right\} = \infty$$

پس سری واگراست.

(c) چون

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_2^M \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left. \ln(\ln x) \right|_2^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \{ \ln(\ln M) - \ln(\ln 2) \} = \infty$$

پس سری واگراست.

(d) چون

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M x e^{-x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right|_1^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-M^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-1}$$

پس سری واگراست.

توجه داشته باشید وقتی سری همگراست، مقدار متناظر آن (در حالت کلی) با مقدار سری برابر نیست. در هر صورت، اغلب می توان مجموع سری را با انتگرال تقریب زد (مسئله ۹-۱-۴۰ را ببینید).

۹-۱-۱۴ ثابت کنید

$$\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

حل. بنابه مسئله ۱۱-۱-۹ داریم

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^M \frac{1}{n^2+1} < \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2+1} < \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{M-1} \frac{1}{n^2+1}$$

یعنی

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

پس

$$\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

چون

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4}$$

با اضافه کردن $\frac{1}{2}$ به طرفین نامساوی نتیجه می شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

پس درستی نامساویها ثابت می شود.

۱۵-۱-۹ (قضیه لایبنتز) سری متناوب

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

مفروض است که در آن $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ثابت کنید:

(الف) سری همگراست.

(ب) اگر تعداد متناهی جمله از سری را بنویسیم خطای حاصل از قدر مطلق جمله

مابعد، کمتر است.

حل. (الف): مجموع $2M$ جمله از سری برابر است با

$$\begin{aligned} S_{2M} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2M-1} - a_{2M}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2M-2} - a_{2M-1}) - a_{2M} \end{aligned}$$

چون مقدار هر پرانتز نامنفی است پس

$$S_{2M} \geq 0, \quad S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq S_8 \leq \dots \leq S_{2M} \leq a$$

پس $\{S_{2M}\}$ دنباله ای کراندار و به طور یکنواخت صعودی است پس حدی مانند S دارد. از طرفی

$$S_{2M+1} = S_{2M} + a_{2M+1}.$$

چون

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_{2M} = S \quad \text{و} \quad \lim_{M \rightarrow \infty} a_{2M+1} = 0$$

(بنابه فرض $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ است). نتیجه می شود که

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_{2M+1} = \lim_{M \rightarrow \infty} S_{2M} + \lim_{M \rightarrow \infty} a_{2M+1} = S + 0 = S.$$

پس حد مجموعهای جزئی برابر S است، یعنی سری همگراست.

(ب) خطای بعد از $2M$ جمله برابر است با

$$(a_{2M+1} - a_{2M+2}) + (a_{2M+3} - a_{2M+4}) + \dots = a_{2M+1} - (a_{2M+2} - a_{2M+3}) - \dots$$

چون مقدار هر پرانتز نامنفی است پس اگر همه جملات حذف شوند مجموع از a_{2M+1} کمتر یا با آن مساوی است.

به طور مشابه، خطای حاصل بعد از $2M+1$ اول برابر است با

$$-a_{2M+2} + (a_{2M+3} - a_{2M+4}) + \dots = -(a_{2M+2} - a_{2M+3}) - (a_{2M+4} - a_{2M+5}) - \dots$$

که این نامثبت بوده بزرگتر از $-a_{2M+2}$ است.

۱۶-۱-۹ (الف) ثابت کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

همگراست.

(ب) ما گزیم خطای بعد از ۸ و ۹ جمله اول سری را تعیین کنید.

(ج) چند جمله اول سری را انتخاب کنیم تا قدر مطلق خطای حاصل از ۰/۰۰۱ کمتر باشد.

حل. (الف) سری عبارت است از.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

اگر $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ ، آنگاه.

$$a_n = |u_n| = \frac{1}{2n-1}, \quad a_{n+1} = |u_{n+1}| = \frac{1}{2n+1}$$

چون

$$\frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n-1} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

پس بنابه مسئله ۱۵-۱-۹ (الف) سری همگراست.

(ب) از نتایج مسئله ۱۵-۱-۹ (ب) استفاده می کنیم. خطای ۸ جمله اول

سری یعنی

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$$

مثبت بوده و از $\frac{1}{17}$ بیشتر نیست.

۹ جمله اول سری عبارت است از

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17}$$

و خطا منفی بوده و بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{10}$ است یعنی قدر مطلق نا بیشتر $\frac{1}{10}$ است.

(ج) قدر مطلق خطای حاصل بعد از M جمله اول کمتر از $1/(2M+1)$ است. برای رسیدن به دقت مورد نظر باید

$$1/(2M+1) \leq .001$$

شود. از آنجا $M \geq 499.5$ پس حداقل ۵۰۰ جمله لازم است

مسائل مربوط به همگرایی شرطی و همگرایی مطلق

۱۷-۱-۹ ثابت کنید یک سری همگرای مطلق، همگراست.

حل. فرض کنید $\sum |u_n|$ همگراست، باید نشان دهیم که $\sum u_n$ همگراست. فرض می کنیم

$$S_M = u_1 + u_2 + \dots + u_M$$

و

$$T_M = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_M|$$

آنگاه

$$\begin{aligned} S_M + T_M &= (u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \dots + (u_M + |u_M|) \\ &\leq 2|u_1| + 2|u_2| + \dots + 2|u_M| \end{aligned}$$

چون $\sum |u_n|$ همگراست و چون به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ داریم $u_n + |u_n| \geq 0$ نتیجه می شود که $S_M + T_M$ دنباله ای کراندار و صعودی یکنواخت است پس $\lim_{M \rightarrow \infty} (S_M + T_M)$ موجود است.

همچنین چون $\lim_{M \rightarrow \infty} T_M$ وجود دارد (زیرا بنابه فرض سری همگرای مطلق است)،

پس

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M = \lim_{M \rightarrow \infty} (S_M + T_M - T_M) = \lim_{M \rightarrow \infty} (S_M + T_M) - \lim_{M \rightarrow \infty} T_M$$

وجود دارد بنابراین سری همگراست.

۱۸-۱-۹ نوع سری

$$\frac{\sin \sqrt{1}}{1^{3/2}} - \frac{\sin \sqrt{2}}{2^{3/2}} + \frac{\sin \sqrt{3}}{3^{3/2}} - \dots$$

را تعیین کنید.

حل. چون قدر مطلق هر جمله سری، کمتر یا مساوی جمله متناظرش از سری

$$\frac{1}{1^{3/2}} + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \dots,$$

که همگراست می باشد. پس سری همگرای مطلق است و بنابه مسئله ۱۷-۱-۹ همگراست.

۱۹-۱-۹ همگرایی و همگرایی مطلق سریهای زیر را بررسی نمائید:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2 n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$$

حل. (a) اگر

$$a_n = |u_n| = \frac{n}{n^2 + 1} \quad \text{و} \quad a_{n+1} = |u_{n+1}| = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1}$$

آنگاه به ازای $n \geq 1$ داریم $a_{n+1} \leq a_n$ و همچنین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$$

پس سری بنابه مسئله ۱۵-۱-۹ همگراست.

سری با قدر مطلق جملات عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

پس بنابه مسئله (b) ۱۳-۱-۹ واگراست. بنابر این سری مفروض همگرای مطلق نبوده بلکه همگرای شرطی است.

(b) سری با قدر مطلق جملات $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ است. بنابه آزمون انتگرال، این سری وقتی همگراست که انتگرال

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_2^M \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

موجود باشد و وقتی که واگراست که این انتگرال وجود نداشته باشد.

اگر

$$u = \ln x, \quad \int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\ln x} + c.$$

پس

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_2^M \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln M} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

بنابر این انتگرال وجود دارد، پس سری همگراست.

بنابر این $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2 n}$ به طور مطلق همگراست، پس همگرا می باشد.

روش دیگر

چون

$$\frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)} \leq \frac{1}{n \ln^2 n} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln^2 n} = 0$$

بنا به مسئله ۱۵-۱-۹ (الف) این سری متناوب همگراست. برای اثبات همگرایی مطلق به صورت فوق عمل می کنیم.

(c) چون $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ که در آن $u_n = \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$ ، بنابراین سری مفروض نمی تواند همگرا شود. برای نشان دادن $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ کافی است ثابت کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} \neq 0$$

این را می توان بکمک دستور هوپیتال یا هر روش دیگر ثابت کرد [مسئله ۲۱-۱-۹ (b) را ببینید]

مسائل مربوط به آزمون نسبت

۲۰-۱-۹ دستور نسبت را ثابت کنید.

حل. سری

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

را در نظر بگیرید که هر جمله آن نامنفی است. باید ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$$

آنگاه سری همگراست.

بنابه فرض می توان عدد طبیعی و بقدر کافی بزرگ N را طوری تعیین کرد که به

ازای هر $n \geq N$ داشته باشیم $(u_{n+1}/u_n) < r$ که در آن $0 < L < r < 1$ پس

$$u_{N+1} < r u_N$$

$$u_{N+2} < r u_{N+1} < r^2 u_N$$

$$u_{N+3} < r u_{N+2} < r^3 u_N$$

از جمع این نامساویها داریم:

$$u_{N+1} + u_{N+2} + \dots < u_N (r + r^2 + r^3 + \dots)$$

چون $0 < r < 1$ پس سری بنابه آزمون مقایسه همگراست.

اگر سری جملات منفی هم داشته باشد سری

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

را در نظر می گیریم. با توجه به استدلال فوق و مسئله ۱۷-۱-۹ اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$$

آنگاه سری $\sum u_n$ (به طور مطلق) همگراست.

به طور مشابه می توان ثابت کرد که اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$$

آنگاه سری $\sum u_n$ واگراست، حال آنکه اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L = 1$$

آنگاه نوع آن با آزمون نسبت مشخص نمی شود [مسئله (c) ۲۱-۱-۹ را ببینید].

۲۱-۱-۹ نوع سریهای زیر را تعیین کنید.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$$

حل. (a) در اینجا $u_n = n^4 e^{-n^2}$ پس

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 e^{-(n^2+2n+1)}}{n^4 e^{-n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 e^{-2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n-1} = \\ 1 \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

چون $0 < 1$ پس سری همگراست.

(b) در اینجا $u_n = \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$ پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(-1)^{n-1} 2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2$$

چون $2 > 1$ پس سری واگراست. با مسئله (c) ۱۹-۱-۹ مقایسه کنید.

(c) در این مسئله $u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$ پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+1)^2 + 1} \cdot \frac{n^2 + 1}{(-1)^{n-1} n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n^2 + 1)}{(n^2 + 2n + 2)n} = 1$$

بنابراین این آزمون نوع سری را مشخص نمی کند. ولی با استفاده از آزمونهای دیگر (مسئله (a) ۱۹-۱-۹ را ببینید). معلوم می شود که سری همگراست.

مسائل مربوط به آزمونهای گوناگون

۲۲-۱-۹ نوع سری

$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + \dots$$

را وقتی $r = 4/3$ (c)، $r = -2/3$ (b)، $r = 2/3$ (a) مشخص کنید.

حل. چون $|r| \leq \frac{1}{2}$ یا $|r| = 2$ $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 2|r|$ و به فرد یا زوج بودن n بستگی ندارد پس نمی توان از آزمون نسبت استفاده کرد.
بهر حال از آزمون ریشه استفاده می کنیم، داریم:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{2|r|^n} = \sqrt[n]{2}|r| & \text{وقتی } n \text{ فرد است} \\ \sqrt[n]{|r|^n} = |r| & \text{وقتی } n \text{ زوج است} \end{cases}$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = |r|$ چون $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} = 1$

بنابراین اگر $|r| < 1$ سری همگرا و اگر $|r| > 1$ سری واگراست. پس در حالات (b) و (a) سری همگرا و در حالت (c) سری واگراست.

۲۳-۱-۹ نوع سری

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots (3n)}\right)^2 + \dots$$

را تعیین کنید.

حل. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3} \right)^2 = 1$$

پس نمی توان از آزمون نسبت استفاده کرد. بنابه آزمون رابه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ 1 - \left(\frac{3n+1}{3n+3} \right)^2 \right\} = \frac{4}{3} > 1$$

پس سری همگراست.

۲۴-۱-۹ همگرایی سری زیر را بررسی نمائید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}\right)^2 + \dots$$

حل. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 = 1$$

پس آزمون نسبت نوع آن را مشخص نمی کند. همچنین آزمون رابه نیز نوع آن را مشخص نمی کند زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ 1 - \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 \right\} = 1$$

به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 = 1 - \frac{1}{n} + \frac{5-4/n}{4n^2+8n+4} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^2}$$

که در آن $|c_n| < P$ ، پس بنابه آزمون گوس سری واگراست.

۹-۱-۲۵ (الف) ثابت کنید که سری

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$$

همگراست.

(ب) مجموع این سری را حساب کنید.

جواب: (ب) $1/12$

۹-۱-۲۶ ثابت کنید که نوع یک سری تغییر نمی کند اگر:

(الف) تمام جملات آن به یک عدد ثابت غیر صفر ضرب شود،

(ب) تعداد متناهی جمله از اول سری حذف یا به آن اضافه شود.

۹-۱-۲۷ ثابت کنید که اگر سریهای $\sum v_n$ و $\sum u_n$ بترتیب به A و B

همگرا باشند آنگاه $\sum (u_n + v_n)$ به $A+B$ همگراست.

۹-۱-۲۸ ثابت کنید که سری

$$\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \dots = \sum \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

واگراست.

۹-۱-۲۹ مورد اشتباه محاسبات زیر را بیابید:

فرض کنید

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

آنگاه

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

و

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0.$$

پس $1 = 0$.

۹-۱-۳۰ نوع سریهای زیر را تعیین کنید:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 3}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 5^n},$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-3}, \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(3n+2)n^{4/3}}.$$

جواب: (a) همگراست. (b) واگراست. (c) واگراست. (d) همگراست. (e) واگراست. (f) همگراست.

۹-۱-۳۱ نوع سریهای زیر را تعیین کنید:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 5n - 2}{n(n^2 + 1)^{3/2}}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n - \ln n}{n^2 + 10n^3}}$$

جواب: (a) همگراست. (b) واگراست

۹-۱-۳۲ واگرایی را در آزمون مقایسه ثابت کنید.

۹-۱-۳۳ از آزمون مقایسه استفاده کرده ثابت کنید:

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ وقتی $p > 1$ همگرا و وقتی $p \leq 1$ واگراست

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n}$ واگراست

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ همگراست

۹-۱-۳۴ نوع سریهای زیر را تعیین کنید:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n \tan^{-1}(1/n^3)}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sin n}{n(1 + e^{-n})}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin^2(1/n).$$

جواب: (a) همگراست (b) واگراست (c) واگراست (d) واگراست.

۹-۱-۳۵ اگر $\sum u_n$ همگرا باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$$

۹-۱-۳۶ بکمک آزمون انتگرال نوع سریهای زیر را تعیین کنید:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n^3 - 1}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}, \quad (e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}, \quad (f) \sum_{n=10}^{\infty} \frac{2^{\ln(\ln n)}}{n \ln n}.$$

جواب:

(a) واگراست (b) همگراست (c) همگراست (d) همگراست (e) واگراست (f) واگراست.

۹-۱-۳۷ بکمک آزمون انتگرال ثابت کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p \text{ ثابت است.}$$

(الف) به ازای $p > 1$ همگرا و (ب) به ازای $p \leq 1$ واگراست

۹-۱-۳۸ ثابت کنید

$$\frac{9}{8} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$$

(می توانید از آزمون انتگرال استفاده بکنید).

۹-۱-۳۹ نوع سری زیر را تعیین کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\tan^{-1} n}}{n^2 + 1}$$

جواب: همگراست.

۹-۱-۴۰ ثابت کنید:

$$\frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{3} \leq \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \leq \frac{2}{3}n^{3/2} + n^{1/2} - \frac{2}{3} \quad (\text{الف})$$

(ب) از (الف) استفاده کرده مقدار تقریبی

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{100}$$

را حساب کنید و بیشترین خطا را بدست آورید.

جواب: (ب) $671/5 = 134.2$

۹-۱-۴۱ نوع سریهای زیر را تعیین کنید:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 2n + 2}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3n - 1},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^{-1} \frac{1}{n}, \quad (e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}.$$

جواب:

(a) همگراست، (b) همگراست، (c) واگراست، (d) همگراست، (e) واگراست.

۹-۱-۴۲ (الف) ثابت کنید:

$$S = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots \right)$$

(ب) درست راست برای محاسبه S تا سه رقم اعشار حداقل چند جمله از اول

سری لازم است؟

جواب: (ب) حداقل ۱۰۰ جمله

۹-۱-۴۳ همگرایی مطلق و همگرایی شرطی سریهای زیر را بررسی نمایید:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 1} \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n^2 + 1)^{4/3}} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n - 1}$$

جواب: (a) همگرای مطلق (b) همگرای شرطی (c) همگرای شرطی (d) واگرا

(e) همگرای مطلق (f) همگرای مطلق.

۹-۱-۴۴ ثابت کنید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi a}{x^2 + n^2}$$

به ازای هر ثابت a و هر x حقیقی همگرای مطلق است.

۹-۱-۴۵. بکمک آزمون نسبت نوع سریهای زیر را تعیین کنید:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{2n}}{(2n-1)!}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{3^{2n}}, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$$

جواب: (a) همگرای (مطلق) (b) همگراست (c) واگرا، (d) همگرای (مطلق)، (e) واگراست.

۹-۱-۴۶. نشان دهید که آزمون نسبت را نمی توان در تعیین نوع یک سری همگرای شرطی بکاربرد.

۹-۱-۴۷. ثابت کنید که:

(الف) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ همگراست.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad (\text{ب}).$$

۹-۱-۴۸. آزمون ریشه را ثابت کنید.

۹-۱-۴۹. از آزمون ریشه استفاده کنید نوع سریهای مسئله ۹-۱-۴۵ را بجز قسمت (b)، تعیین نماید.

۹-۱-۵۰. ثابت کنید که سری

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots$$

همگراست.

۹-۱-۵۱. نوع سریهای زیر را تعیین کنید.

$$(الف) \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots, \quad (ب) \frac{2}{9} + \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 12} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{9 \cdot 12 \cdot 15} + \dots$$

جواب: (الف) واگرا، (ب) همگراست

۹-۲. دنباله تابعی و سری تابعی — همگرایی یکنواخت

فرض کنید

$$\{u_n(x)\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

یک دنباله تابعی باشد که در فاصله $[a, b]$ تعریف شده است. دنباله را همگرا به $F(x)$ گویند یا گویند دارای حد $F(x)$ در $[a, b]$ است، اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ و هر x از $[a, b]$

بتوان $N > 0$ طوری یافت که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم

$$|u_n(x) - F(x)| < \epsilon$$

در این حالت می نویسیم:

$$\lim u_n(x) = F(x)$$

N می تواند به x بستگی داشته باشد، همان طوری که به ϵ بستگی دارد. اگر فقط به ϵ بستگی داشته باشد نه به x ، می گویند که دنباله به $F(x)$ در $[a, b]$ به طور یکنواخت همگراست یا در $[a, b]$ همگرای یکنواخت است.

سری تابعی

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \quad (3)$$

را در $[a, b]$ همگرا گویند اگر دنباله مجموعهای جزئی

$$\{S_n(x)\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

همگرا باشند که در آن

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x),$$

در $[a, b]$ همگراست. در این حالت می نویسیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

و $S(x)$ را مجموع سری گویند.

$\sum u_n(x)$ را همگرا به $S(x)$ در $[a, b]$ گویند اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ و هر x از

$[a, b]$ بتوانیم عددی مانند $N > 0$ بیابیم طوری که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

اگر N فقط به ϵ بستگی داشته باشد نه به x ، سری را در $[a, b]$ همگرای یکنواخت گویند.

چون

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

باقیمانده بعد از n جمله است، لذا می توانیم بگوییم که $\sum u_n(x)$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ ، N وابسته به ϵ را (بدون این که به x بستگی داشته باشد) طوری می توان یافت که

$$|R_n(x)| < \epsilon$$

به ازای هر $n > N$ و هر x از $[a, b]$ برقرار باشد. این تعاریف را می توان برای هر فاصله

غیر از $a \leq x \leq b$ مانند $a < x < b$ و غیره تنظیم نمود.

فاصله همگرایی (مطلق یا یکنواخت) یک سری مجموعه مقادیری از x است که به ازای آنها سربهای حاصل همگرایی (مطلق یا یکنواخت) باشند.

چند آزمون ویژه برای سربهای همگرایی یکنواخت

۱. آزمون M و ایرشتراس^۱. اگر بتوان دنباله مثبت،

$$M_1, M_2, M_3, \dots$$

را طوری یافت که در فاصله ای

$$(a) \quad |u_n(x)| \leq M_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(b) \quad \sum M_n \text{ همگرا باشد.}$$

آنگاه $\sum u_n(x)$ به طور یکنواخت در این فاصله همگرایی مطلق است.

مثال: چون

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

و $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ به طور یکنواخت در فاصله $[0, 2\pi]$ همگرایی مطلق است.

شرایط این آزمون برای همگرایی یکنواخت کافی است ولی لازم نیست، یعنی ممکن است یک سری همگرایی یکنواخت باشد ولی این آزمون برای آن برقرار نباشد. مسئله ۶-۲-۹ را ببینید.

۲. آزمون دیریکله^۲

(الف) فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی یکنواخت با جملات مثبت ثابت باشد

که دارای حد صفر است.

(ب) به ازای $a \leq x \leq b$ عدد ثابت P موجود باشد که به ازای هر $n > N$

$$|u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)| < P$$

آنگاه سری

$$a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$$

در $a \leq x \leq b$ همگرایی یکنواخت است.

چند قضیه درباره سریهای یکنواخت

اگر یک سری تابعی نامتناهی، همگرایی یکنواخت باشد، خواص مجموع سری تابعی متناهی را دارد، که در قضیه های زیر آمده است:

قضیه ۶.

$$\{u_n(x)\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

در $[a, b]$ پیوسته باشند و اگر $\sum u_n(x)$ همگرایی یکنواخت در $|a, b|$ به $S(x)$ باشد، آنگاه $S(x)$ در $[a, b]$ پیوسته است.

یا ساده تر، این قضیه می گوید که سری همگرایی یکنواخت از توابع پیوسته، تابعی پیوسته است. اغلب از این نتیجه در اثبات اینکه یک سری همگرایی یکنواخت نیست، استفاده می شود که در این حالت نشان می دهند که مجموع $S(x)$ در نقطه ای منفصل است (مسئله ۶-۲-۹ را ببینید).

در حالت خاص اگر x_0 در $[a, b]$ باشد قضیه می گوید

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

در آن حدهای چپ و راست وقتی که x_0 یک نقطه انتهایی فاصله $[a, b]$ باشد، بکار می رود.

قضیه ۷.

$$\{u_n(x)\}, n = 1, 2, 3, \dots,$$

در $[a, b]$ پیوسته باشند و اگر $\sum u_n(x)$ در $[a, b]$ به $S(x)$ همگرایی یکنواخت باشند، آنگاه

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \quad (4)$$

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \quad (5)$$

ساده تر یک سری همگرایی یکنواخت از توابع پیوسته، جمله به جمله انتگرالپذیرند.

قضیه ۸.

$$\{u_n(x)\}, n = 1, 2, 3, \dots,$$

در $[a, b]$ پیوسته باشند و مشتقهای پیوسته داشته باشند و اگر $\sum u_n(x)$ به $S(x)$ همگرا

باشد در حالی که $\sum u'_n(x)$ در $[a, b]$ همگرایی یکنواخت است، آنگاه در $[a, b]$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad (۶)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x) \quad (۷)$$

این قضیه شرایطی را نشان می دهد که تحت آن شرایط یک سری می تواند جمله به جمله دیفرانسیل پذیر باشد.

قضیه های مشابهی را می توان برای دنباله ها بیان کرد. مثلاً اگر

$$\{u_n(x)\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

در $[a, b]$ همگرایی یکنواخت باشد آنگاه،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) dx \quad (۸)$$

که این مشابه قضیه ۷ است.

سریهای توانی

سری به صورت

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (۹)$$

یک سری توانی نسبت به x گویند که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots$ اعداد ثابتی هستند. اغلب سری (۹) را با $\sum a_n x^n$ نشان می دهند.

در حالت کلی سری به ازای $|x| < R$ همگرا و به ازای $|x| > R$ واگراست که در آن R را شعاع همگرایی سری گویند. به ازای $|x| = R$ سری ممکن است همگرا و ممکن است واگرا باشد.

فاصله $|x| < R$ یا $-R < x < R$ و در صورت امکان به انضمام نقاط انتهایی فاصله را فاصله همگرایی گویند. اگرچه آزمون مقایسه اغلب در تعیین این فاصله موفق است، در صورت ناتوانی این آزمون در تعیین این فاصله می توان از آزمونهای دیگر استفاده کرد (مسئله ۲۲-۱-۹ را ببینید).

دو حالت خاص $R = \infty$ و $R = 0$ پیش می آیند که در حالت اول سری فقط به ازای $x = 0$ همگراست و در حالت دوم سری به ازای هر x همگرا می باشد که در این حالت می نویسیم $-\infty < x < \infty$ (مسئله ۱-۲-۹ را ببینید). وقتی از همگرایی سریهای توانی صحبت می شود فرض بر آن است که $R > 0$ ، در غیر این صورت تذکر داده خواهد شد. مطالبی که در مورد سری (۹) بیان شد، مشابه آنها وقتی x با $(x - a)$

تعویض می گردد، بیان می شود.

چند قضیه درباره سریهای توانی

قضیه ۹. یک سری توانی در هر فاصله که تماماً در داخل فاصله همگرایی قرار دارد، به طور مطلق همگرایی یکنواخت است.

قضیه ۱۰. یک سری توانی می تواند در هر فاصله که تماماً در داخل فاصله همگرایی قرار داشته باشد، جمله به جمله مشتقپذیر یا انتگرالپذیر باشد.

این قضیه را می توان از قضیه ۹ و از قضایائی که درباره همگرایی یکنواخت بیان شده است، نتیجه گرفت. نتایج را می توان طوری تعمیم داد که شامل نقاط انتهایی فاصله همگرایی خودش باشند که در قضایای زیر آمده اند.

قضیه ۱۱. قضیه آبل^۱.

اگر سری توان در یکی از نقاط انتهایی فاصله همگرایی خودش، همگرا باشد، فاصله همگرایی یکنواخت آن شامل این نقطه انتهائی است. مسئله ۱۸-۲-۹ را ببینید.

قضیه ۱۲. قضیه حد آبل^۲.

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به ازای $x = x_0$ همگرا باشد. این نقطه می تواند یکی از نقاط داخلی یا یکی از نقاط انتهائی فاصله همگرایی باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \quad (10)$$

اگر x_0 یکی از نقاط انتهائی باشد در (۱۰) بر حسب اینکه x_0 نقطه سمت راست

یا نقطه سمت چپ فاصله باشد بترتیب از $x \rightarrow x_0 -$ یا $x \rightarrow x_0 +$ استفاده می کنیم.

این مطلب از قضیه ۱۱ و قضیه ۶ که در رابطه با پیوستگی مجموع یک سری همگرایی یکنواخت می باشد، نتیجه شده است.

عملیات با سریهای توانی

در قضیه های زیر فرض بر آن است که تمام سریهای توانی در فاصله ای همگرا هستند.

قضیه ۱۳. دو سری را می توان جمعه به جمله به ازای هر x در فاصله ای که هر دو در آن همگرا هستند جمع یا از هم تفریق کرد.

قضیه ۱۴. دوسری توانی مانند $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را می توان برهم ضرب کرده و سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ را بدست آورد که در آن

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0 \quad (11)$$

عمل ضرب به ازای آن مقادیر x که در فاصله همگرایی مشترک آنها واقع است معتبر می باشد.

قضیه ۱۵. اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را به سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ که $b_0 \neq 0$ تقسیم کنیم، خارج قسمت را می توان به صورت یک سری توانی نوشت که به ازای مقادیر به قدر کافی کوچک x همگرا می باشد.

قضیه ۱۶. اگر $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، آنگاه با تغییر متغیر $x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ می توان ضرایب a_n را نسبت به b_n حساب کرده این فرآیند را عکس سری گویند.

بسط توابع به سری توانی

فرض کنید $f(x)$ و مشتقات آن

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

موجود و در فاصله بسته $a \leq x \leq b$ پیوسته باشند، و $f^{(n+1)}(x)$ در فاصله باز $a < x < b$ وجود داشته باشد. آنگاه (همانطوری که می دانیم) داریم:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \quad (12)$$

که در آن R_n باقیمانده بسط می باشد و به صورت زیر است:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (\text{فرم لاگرانژ}) \quad (13)$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a) \quad (\text{فرم کوشی}) \quad (14)$$

که در آن ξ که بین a و x قرار دارد در حالت کلی در دو فرم بالا یکی نیستند.

اگر n تغییر کند در حالت کلی ξ نیز تغییر می کند. به ازای هر x و ξ در $[a, b]$

داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

آنگاه (۱۲) به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (۱۵)$$

که این رابطه را بسط تیلر یا سری تیلر تابع $f(x)$ گویند وقتی $x=a$ اغلب این رابطه را بسط لاگرانژ یا سری لاگرانژ تابع $f(x)$ نامند.

چند سری توانی مهم

سریهای زیر که به تابع مفروض در فاصله نشان داده شده همگرا هستند در محاسبات خیلی مورد استفاده واقع می شوند.

$$1. \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$2. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$3. \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$4. \quad \ln |1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$5. \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$-1 < x < 1$$

$$6. \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$7. \quad (1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

این سری را سری بینم گویند.

(الف) اگر p عددی طبیعی یا صفر باشد، سری محدود است.

(ب) اگر $p > 0$ ولی صحیح نباشد، سری به ازای

$$-1 \leq x \leq 1$$

(مطلقاً) همگراست.

(ج) اگر $-1 < p < 0$ ، سری به ازای $-1 < x \leq 1$ همگراست.

(د) اگر $p \leq -1$ ، سری به ازای $-1 < x < 1$ همگراست.

در تمام حالات p ، اگر $-1 < x < 1$ سری به طور مطمئن همگراست.

۱-۲-۹ به ازای چه مقادیری از x سریهای زیر همگرا هستند:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} n! (x-a)^n, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}.$$

حل. (a) داریم.

$$u_n = \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$$

فرض می کنیم $x \neq 0$ (چون وقتی $x = 0$ سری همگراست)، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{x^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} |x| = \frac{|x|}{3}$$

بنابر این اگر $\left| \frac{|x|}{3} \right| < 1$ سری همگراست و اگر $\left| \frac{|x|}{3} \right| > 1$ سری واگراست. اگر $\frac{|x|}{3} = 1$

یعنی وقتی $x = \pm 3$ این آزمون مؤثر نیست. نوع سریها را جداگانه بررسی می کنیم

اگر $x = -3$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

بنابه قضیه لایبنتیز همگراست.

اگر $x = 3$ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

حاصل می شود که واگراست.

پس فاصله همگرایی سری، $-3 \leq x < 3$ می باشد. در خارج این فاصله سری واگرا

است.

توجه داشته باشید که در فاصله $-3 < x < 3$ سری همگرای مطلق است. به ازای $x = -3$

سری همگرای شرطی است.

(b) مانند قسمت (a) عمل می کنیم. در این حالت

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

پس

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1} x^{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} x^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n)} = 0 \end{aligned}$$

پس به ازای هر x سری همگرای (مطلق) است. یعنی فاصله همگرایی (مطلق) سری

$$-\infty < x < \infty$$

می باشد.

(c) در این حالت داریم:

$$u_n = n! (x-a)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! (x-a)^{n+1}}{n! (x-a)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x-a|$$

اگر $x \neq a$ حد بینهایت است. پس سری به ازای $x=a$ همگراست.

(d) داریم

$$u_n = \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(3n+2)}$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(3n-1)(x-1)}{2n(3n+2)} \right| = \left| \frac{x-1}{2} \right| = \frac{x-1}{2}$$

بنابراین به ازای $|x-1| < 2$ همگرا و به ازای $|x-1| > 2$ واگراست.

وقتی $|x-1| = 2$ یعنی $x-1 = \pm 2$ یا $x = -1$ و $x = 3$ از این آزمون

نتیجه ای حاصل نمی شود.

به ازای $x = 3$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$$

که این سری بعلت این که جمله n ام به صفر میل نمی کند واگراست.

به ازای $x = -1$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n-1}$$

این سری نیز واگراست چون حد جمله n ام صفر نیست.

پس سری به ازای $|x-1| < 2$ همگراست. یعنی فاصله همگرایی سری

یا $-2 < x-1 < 2$ یا $-1 < x < 3$ می باشد.

۲-۲-۹ به ازای چه مقادیری از x سربهای زیر همگرا هستند:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^n, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$$

حل. (a) چون

$$u_n = \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^n.$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} \left| \frac{x+2}{x-1} \right| = \left| \frac{x+2}{x-1} \right| \quad \text{اگر } x \neq 1, -2$$

اگر $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| < 1$ سری همگراست و اگر $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| > 1$ سری واگراست.
و وقتی $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| = 1$ یعنی وقتی $x = -\frac{1}{2}$ نوع سری با این روش معلوم نیست.

اگر $x = 1$ سری واگراست.

اگر $x = -2$ سری همگراست.

وقتی $x = -\frac{1}{2}$ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

بدست می آید که همگراست.

پس سری در فاصله $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| < 1$ و به ازای $x = -2$ و $x = -\frac{1}{2}$ یعنی به ازای $x \leq -\frac{1}{2}$ همگرا است.

(b) در این حالت

$$u_n = \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$$

پس نمی توان از دستور نسبت استفاده کرد. با توجه به

$$\frac{1}{(x+n)(x+n-1)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$$

ملاحظه می شود که اگر $x \neq 0, -1, -2, \dots, -n$ داریم

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \dots +$$

$$\left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}$$

با شرط اینکه $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ بدست می آید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1/x$$

بنابراین سری به ازای هر x بجز $x = 0, -1, -2, -3, \dots$ همگراست و مجموع آن برابر $1/x$ است.

مسائل مربوط به همگرایی یکنواخت

۳-۲-۹ فاصله همگرایی سری

$$(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \dots$$

را تعیین کنید

روش اول

مجموع n جمله اول سری برابر است

$$\begin{aligned} S_n(x) &= (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \dots + x^{n-1}(1-x) \\ &= 1-x+x-x^2+x^2-x^3+\dots+x^{n-1}-x^n \\ &= 1-x^n \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x^n) = 1 \quad \text{اگر } |x| < 1 \text{ داریم}$$

$$\text{اگر } |x| > 1 \text{ حد } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \text{ وجود ندارد.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0 \quad \text{و} \quad S_n(x) = 0 \quad \text{اگر } x = 1, \text{ داریم}$$

$$\text{اگر } x = -1 \text{ داریم } S_n(x) = 1 - (-1)^n \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \text{ وجود ندارد.}$$

بنابراین سری به ازای $|x| < 1$ و $x = 1$ همگراست یعنی فاصله همگرایی سری $-1 < x \leq 1$

می باشد

روش دوم

از آزمون نسبت استفاده می کنیم در می یابیم که اگر $x \neq 1$ داریم

$$u_n = x^{n-1}(1-x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|$$

پس

بنابراین وقتی $|x| < 1$ سری همگرا و وقتی $|x| > 1$ سری واگراست. اگر $|x| = 1$ این روش نوع

سری را تعیین نمی کند اگر $x = 1$ سری همگرا و اگر $x = -1$ سری واگراست است. بنابراین

فاصله همگرایی سری $-1 < x \leq 1$ می باشد.

۴-۲-۹ همگرایی یکنواخت سری مسئله ۳-۲-۹ را در فاصله های زیر

بررسی نماید:

$$(a) -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, (b) -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, (c) -.99 \leq x \leq .99,$$

$$(d) -1 < x < 1, (e) 0 \leq x < 2$$

حل. (a). بنابه مسئله ۳-۲-۹ داریم:

$$S_n(x) = 1 - x^n, S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1 \quad \text{اگر } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

پس سری در این فاصله همگراست بقایمانده بعد از n جمله برابر است با

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = 1 - (1 - x^n) = x^n$$

سری در این فاصله همگرایی یکنواخت است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ بتوانیم N که مستقل از x وابسته به ϵ را طوری بیابیم که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم

$$|R_n(x)| < \epsilon$$

حال

$$n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |x|} \quad \text{یا} \quad n \ln |x| < \ln \epsilon \quad \text{وقتی} \quad |R_n(x)| = |x^n| = |x|^n < \epsilon$$

چون $|x| < \frac{1}{2}$ لذا $\ln |x|$ منفی است، که وقتی طرفین به آن تقسیم شده است جهت نامساوی تغییر پیدا کرده است.

ولی اگر $|x| < \frac{1}{2}$ ، $\epsilon < \ln(\frac{1}{2})$ و $\ln |x| < \ln(\frac{1}{2})$ و $N > \frac{\ln \epsilon}{\ln |x|} > \frac{\ln \epsilon}{\ln(\frac{1}{2})}$. بنابراین چون N مستقل از x است، پس سری در این فاصله همگرایی یکنواخت است.

(b) در این حالت $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |x|} \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln(\frac{1}{2})} = N$ و $\ln |x| \leq \ln(\frac{1}{2})$ ، $|x| \leq \frac{1}{2}$ بنابراین در فاصله $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ همگرایی یکنواخت است.

(c) مشابه مطالبی که گذشت اگر $1/99$ را با $1/2$ عوض کنیم معلوم می شود که سری در فاصله $-.99 \leq x \leq .99$ همگرایی یکنواخت است.

(d) اگر دلایل فوق را بکار گیریم و اگر $|x|$ را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کنیم می توانیم کسر $\frac{\ln \epsilon}{\ln |x|}$ را بقدر کافی بزرگ کنیم. پس N وجود ندارد، در نتیجه سری در فاصله $-1 < x < 1$ همگرایی یکنواخت نیست.

(e) چون سری در تمام نقاط این فاصله همگرا نیست پس نمی تواند در این فاصله همگرایی یکنواخت شود.

۵-۲-۹ در پیوستگی تابع

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

از مسئله ۳-۲-۹ در فاصله $0 \leq x \leq 1$ بحث کنید.

حل اگر $0 \leq x < 1$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^n) = 1$$

اگر $x = 1$

$$S(x) = 0 \text{ و } S_n(x) = 0.$$

پس

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

بنابر این $S(x)$ در $x = 1$ منفصل و در سایر نقاط فاصله $0 \leq x < 1$ پیوسته است. در مسئله ۱۰-۲-۹ نشان می دهیم که اگر یک سری در فاصله ای همگرای یکنواخت باشد تابع مجموع آن $S(x)$ در این فاصله باید پیوسته شود. این مطلب نشان می دهد که اگر تابع مجموع، در فاصله ای پیوسته نباشد، سری در آن فاصله نمی تواند همگرای یکنواخت شود. اغلب از این حقیقت در اثبات اینکه یک سری (بایک دنباله) همگرای یکنواخت نیست، استفاده می شود.

۹-۲-۶ همگرایی یکنواخت سری.

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots$$

را بررسی کنید.

حل. فرض می کنیم $x \neq 0$ پس سری یک سری هندسی با قدر نسبت $1/(1+x^2)$

می باشد که حد مجموع آن برابر است با

$$S(x) = \frac{x^2}{1 - 1/(1+x^2)} = 1 + x^2.$$

اگر $x = 0$ ، مجموع n جمله اول برابر $S_n(0) = 0$ است پس

$$S(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = 0.$$

چون

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 1 \neq S(0)$$

پس $S(x)$ در $x = 0$ منفصل است، پس سری در فاصله ای که شامل $x = 0$ باشد همگرای یکنواخت نیست (مسئله ۱۰-۲-۹ را ببینید) اگر چه در این فاصله همگرای مطلق باشد.

مسائل مربوط به آزمون M وایرشراس۹-۲-۷ آزمون M . وایرشراس را ثابت کنید، یعنی اگر

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

که در آن M_n ثابتهای مثبتی هستند طوری که $\sum M_n$ همگراست، آنگاه $\sum u_n(x)$ همگرا یکنواخت (و مطلق) است

باقیمانده سری $\sum u_n(x)$ بعد از n جمله برابر است با

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

$$|R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| \leq |u_{n+1}(x)|$$

حال

$$+ |u_{n+2}(x)| + \dots \leq M_{n+1} + M_{n+2} + \dots$$

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \dots$$

ولی

می توان به ازای $n > N$ از ϵ کوچکتر شود چون $\sum M_n$ همگراست. چون آشکار است که N مستقل از x است پس به ازای $n > N$ داریم

$$R_n(x) < \epsilon$$

یعنی سری همگرای مطلق است. همگرایی مطلق را می توان از آزمون مقایسه نتیجه گرفت.

۸-۲-۹ همگرایی یکنواخت سریهای زیر را بررسی نمائید:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}, (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}}, (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

حل. (a) چون

$$\left| \frac{\cos nx}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4} = M_n$$

چون $\sum M_n$ همگراست (بنابه سری p و $p = 4 > 1$)، پس بنابه آزمون وایرستراس سری به ازای هر x همگرای یکنواخت (و مطلق) است.

(b). بنابه آزمون نسبت سری در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ یعنی در فاصله $|x| \leq 1$

همگراست.

به ازای هر x از این فاصله داریم:

$$\left| \frac{x^n}{n^{3/2}} \right| = \frac{|x|^n}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

با فرض $M_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ در می یابیم که $\sum M_n$ همگراست. پس سری مفروض بنابه آزمون M وایرستراس در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ همگرای یکنواخت است.

(c) داریم

$$\left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

چون $\sum M_n = \sum \frac{1}{n}$ همگرا نیست، پس آزمون M وایرستراس را در این حالت نمی توان به کار برد چون هیچ نتیجه ای برای همگرایی یکنواخت با این آزمون حاصل نمی شود (همچنین مسئله ۳۹-۲-۹ را ببینید).

(d) چون

$$\left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

و $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست. پس بنابه آزمون M وایرشراس، سری به ازای هر x همگرایی یکنواخت است.

۹-۲-۹ اگر سری توانی $\sum a_n x^n$ به ازای $x = x_0$ همگرا باشد ثابت کنید:

(الف) در فاصله $|x| < |x_0|$ همگرایی مطلق.

(ب) در فاصله $|x| \leq |x_1|$ که در آن $|x_1| < |x_0|$ همگرایی یکنواخت است.

حل. (الف) چون $\sum a_n x_0^n$ همگراست پس $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ بنابر این می توان n را بقدر کافی بزرگ انتخاب کرد طوری که $|a_n x_0^n| < 1$ یعنی به ازای $n > N$ داریم

$$|a_n| < \frac{1}{|x_0|^n}$$

پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |x|^n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{|x_0|^n} \quad (1)$$

چون آخرین سری در رابطه (۱) به ازای $|x| < |x_0|$ همگراست، پس بنابه آزمون مقایسه اولین سری نیز همگرا خواهد بود یعنی سری مفروض همگرایی یکنواخت است.

(ب) فرض کنید $M_n = \frac{|x_1|^n}{|x_0|^n}$ چون $|x_1| < |x_0|$ ، پس $\sum M_n$ همگراست بنابه

قسمت (الف) به ازای $|x| \leq |x_1|$ ، $|a_n x^n| < M_n$ ، بنابر این با توجه به آزمون M وایرشراس سری $\sum a_n x^n$ همگرایی یکنواخت است.

نتیجه می شود که سری توانی در هر فاصله واقع در داخل فاصله همگرایی خودش، همگرایی یکنواخت است.

اثبات قضایای مربوط به همگرایی یکنواخت

۱۰-۲-۹ قضیه ۶ را ثابت کنید.

حل. باید نشان دهیم که $S(x)$ در $[a, b]$ پیوسته است. از

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

نتیجه می شود

$$S(x+h) = S_n(x+h) + R_n(x+h)$$

از آنجا

$$S(x+h) - S(x) = S_n(x+h) - S_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x) \quad (1)$$

h را طوری انتخاب می کنیم که $x + h$ و x در $[a, b]$ باشند (مثلاً اگر $x = b$ الزاماً $h < 0$) . چون $S_n(x)$ مجموع تعداد متناهی تابع پیوسته است، پس خود پیوسته می باشد. پس به ازای هر $\epsilon > 0$ می توانیم δ را طوری بیابیم که وقتی $|h| < \delta$ داشته باشیم

$$|S_n(x+h) - S_n(x)| < \epsilon/3 \quad (2)$$

چون بنابه فرض سری همگرایی یکنواخت است، می توانیم N را طوری انتخاب کنیم که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم.

$$|R_n(x)| < \epsilon/3 \quad \text{و} \quad |R_n(x+h)| < \epsilon/3 \quad (3)$$

بنابه روابط (۱)، (۲)، (۳)، وقتی $|h| < \delta$ داریم

$$|S(x+h) - S(x)| \leq |S_n(x+h) - S_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)| < \epsilon$$

از این رابطه پیوستگی تابع مجموع نتیجه می شود.

۱۱-۲-۹ قضیه ۷ را ثابت کنید

حل. اگر تابعی در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، در آن فاصله انتگرالپذیر است. چون توابع $S_n(x)$ ، $S(x)$ و $R_n(x)$ پیوسته اند پس

$$\int_a^b S(x) = \int_a^b S_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx$$

برای اثبات قضیه باید نشان دهیم رابطه

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b R_n(x) dx \right|$$

را می توان با انتخاب n بقدر کافی بزرگ، به دلخواه کوچک کرد. چون سری همگرایی یکنواخت است بنابراین به ازای هر $n > N$ مستقل از x در $[a, b]$ داریم..

$$|R_n(x)| < \epsilon/(b-a)$$

پس

$$\left| \int_a^b R_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_n(x)| dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon$$

این رابطه معادل است با

$$\int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx$$

یا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b \{ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \} dx$$

۱۲-۲-۹. قضیه ۸ را ثابت کنید.

حل. فرض کنیم $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ ، بنابه فرض سری درفاصله $[a, b]$ همگرای یکنواخت است، پس می توانیم (بنابه مسئله ۱۱-۲-۹) جمله به جمله آن را انتگرالگیری نماییم، داریم

$$\begin{aligned} \int_a^x g(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \{u_n(x) - u_n(a)\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a) \end{aligned}$$

چون بنابه فرض $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ در $[a, b]$ به $S(x)$ همگراست. از دو طرف

$$\int_a^x g(x) dx = S(x) - S(a)$$

مشتق می گیریم داریم

$$g(x) = S'(x)$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت می شود.

۱۳-۲-۹ فرض کنید

$$S_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad 0 \leq x \leq 1$$

(الف) آیا تساوی زیر برقرار است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx$$

(ب) نتیجه (الف) را شرح دهید.

حل. (الف)

$$\int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-nx^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}).$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2}$$

چون به ازای $x=0$ یا درفاصله $0 < x \leq 1$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nxe^{-nx^2} = 0,$$

پس

$$\int_0^1 S(x) dx = 0$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx$$

یعنی در اینجا نمی توان حد عبارت زیر علامت انتگرال را حساب کرد.

(ب) دلیل برای قسمت (الف) آن است که با اینکه دنباله $S_n(x)$ به صفر همگراست ولی به صفر همگرایی یکنواخت نیست. در اثبات این مطلب، ملاحظه می کنیم که تابع $u(x) = e^{-x^2}$ در نقطه $x = 1/\sqrt{2n}$ ماکزیممی برابر $\sqrt{1/2} n e^{-1/2}$ دارد (با توجه به دستورهای ساده حساب دیفرانسیل واضح است). پس وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $S_n(x)$ نمی تواند به ازای هر x به دلخواه کوچک شود، پس نمی تواند در صفر همگرایی یکنواخت گردد.

۱۴-۲-۹ فرض کنید

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

ثابت کنید.

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

حل. داریم

$$\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

پس بنابه آزمون M و ایرشتراس، سری به ازای هر x بویژه در فاصله $0 \leq x \leq \pi$ همگرایی یکنواخت است، بنابراین می توان از آن جمله به جمله انتگرالگیری کرد. پس

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^3} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^4} = 2 \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \end{aligned}$$

مسائل مربوط به سری توان

۱۵-۲-۹ ثابت کنید که سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و سری توان حاصل از مشتق

آن، یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ دارای یک شعاع همگرایی هستند.

حل. فرض می کنیم $R > 0$ شعاع همگرایی $\sum a_n x^n$ باشد. فرض می کنیم

$0 < |x_0| < R$. پس بنابه مسئله ۹-۲-۹ می توانیم N را طوری تعیین کنیم که اگر

$$n > N \text{ داشته باشیم } \frac{1}{|x_0|^n} < |a_n|$$

پس جملات سری

$$\sum |na_n x^{n-1}| \leq \sum n |a_n| |x|^{n-1}$$

وقتی $n > N$ می توانند کمتر از جملات متناظرشان از سری

$$\sum n \frac{|x|^{n-1}}{|x_0|^n}$$

باشند که این سری بنابه آزمون نسبت به ازای $|x| < |x_0| < R$ همگراست.بنابر این $\sum na_n x^{n-1}$ به ازای تمام نقاط x_0 (فرقی نمی کند که $|x_0|$ چگونه به R میل می کند) همگرایی مطلق است.در هر صورت اگر $|x| > R$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n \neq 0$ و در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n x^{n-1} \neq 0$ و معلوم می شود که $\sum na_n x^{n-1}$ همگرا نیست.

بنابر این R ، فاصله همگرایی $\sum na_n x^{n-1}$ است. توجه کنید که سری مشتق ممکن است به ازای مقادیری از x که $|x| = R$ ، همگرا باشد و ممکن است همگرا نباشد.

۹-۲-۱۶ درستی نتیجه ۹-۲-۱۵ را برای سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$$

نشان دهید.

حل. با استفاده از آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n^2 \cdot 3^n}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3(n+1)^2} |x| = \frac{|x|}{3}$$

سری به ازای $|x| < 3$ همگراست، و به ازای $x = \pm 3$ نیز همگرا می باشد، پس فاصله همگرایی سری $-3 \leq x \leq 3$ است.

سری مشتق عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$$

بنابه مسئله ۹-۲-۱ (a) فاصله همگرایی این سری $-3 \leq x < 3$ می باشد. $R = 3$ شعاع همگرایی هر دو سری است، در حالی که دویک فاصله همگرایی ندارند.

توجه کنید که اگر مجاز به استفاده از آزمون نسبت در مسئله ۹-۲-۱۵ را داشته باشیم می توانیم نتیجه آن را با این آزمون ثابت کنیم. اگر این آزمون قابل اعمال نباشد می توان آن را طوری که در مسئله ۹-۲-۲۲ دیدیم به صورت دیگری ثابت کنیم.

۹-۲-۱۷ ثابت کنید که یک سری توان در هر فاصله واقع در داخل فاصله

همگرایی خودش:

(الف) تابعی پیوسته مانند $f(x)$ را نمایش می دهد،

(ب) می توان آن را جمله به جمله انتگرالگیری کرد تا انتگرال $f(x)$ حاصل شود،

(ج) می توان جمله به جمله از آن مشتق گرفت تا مشتق $f(x)$ بدست آید.

حل. اثبات را برای سری توان $\sum a_n x^n$ انجام می دهیم و می توان آن را برای سری

$\sum a_n (x-a)^n$ تعمیم داد.

(الف) درستی این مطلب از مسائل ۹-۲-۹ و ۹-۲-۱۰ و از پیوستگی

جملات سری نتیجه می شود.

(ب) درستی این قسمت از مسائل ۹-۲-۹ و ۹-۲-۱۱ و از انتگرالپذیری هر

جمله $a_n x^n$ از سری نتیجه می شود.

(ج) بنابه مسئله ۹-۲-۱۵ سری مشتق هر سری توانی همیشه در هر فاصله واقع

در داخل فاصله همگرایی خودش، همگراست، و بنابراین در نقاط داخلی این فاصله همگرای یکنواخت است. پس نتیجه مطلوب از مسائل ۹-۲-۹ و ۹-۲-۱۲ حاصل می شود.

اگر سری توانی در یک (یا دو نقطه) انتهائی فاصله همگرایی خودش، همگرا باشد، ممکن است (الف) و (ب) در این نقطه (یا این نقاط) برقرار باشند، مسئله ۹-۲-۱۸ را ببینید.

۹-۲-۱۸ قضیه آبل را ثابت کنید:

اگر سری توانی در یکی از نقاط انتهائی فاصله همگرایی خودش، همگرا باشد، آنگاه فاصله همگرایی یکنواخت آن شامل این دو نقطه انتهائی است.

حل. برای سادگی اثبات، سری توانی را به صورت $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ در نظر می گیریم

که $x=1$ یک نقطه انتهائی فاصله همگرایی آن است طوری که سری به طور مطمئن در فاصله $0 \leq x \leq 1$ همگرا می باشد.

فرض کنیم

$$R_n(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots, \quad R_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

برای اثبات باید نشان دهیم که به ازای هر $\epsilon > 0$ می توان عدد N را طوری تعیین کرد که رابطه

$$|R_n(x)| < \epsilon$$

به ازای هر $n > N$ که بویژه مستقل از هر x فاصله $0 \leq x \leq 1$ است، برقرار باشد. حال در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
 R_n(x) &= (R_n - R_{n+1})x^n + (R_{n+1} - R_{n+2})x^{n+1} + (R_{n+2} - R_{n+3})x^{n+2} + \dots \\
 &= R_n x^n + R_{n+1}(x^{n+1} - x^n) + R_{n+2}(x^{n+2} - x^{n+1}) + \dots \\
 &= x^n \{R_n - (1-x)(R_{n+1} + R_{n+2}x + R_{n+3}x^2 + \dots)\}
 \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $0 \leq x < 1$ داریم

$$|R_n(x)| \leq |R_n| + (1-x)(|R_{n+1}| + |R_{n+2}|x + |R_{n+3}|x^2 + \dots) \quad (۱)$$

چون بنابه فرض $\sum a_k$ همگراست، نتیجه می شود که به ازای هر $\epsilon > 0$ می توان N را طوری یافت که به ازای هر $k \geq n$ داشته باشیم $|R_k| < \epsilon/2$. پس به ازای هر $n > N$ از (۱) داریم:

$$|R_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + (1-x)\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}x + \frac{\epsilon}{2}x^2 + \dots\right) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (۲)$$

زیرا وقتی $0 \leq x < 1$ داریم:

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\dots) = 1$$

همچنین وقتی $x=1$ ، به ازای $n > N$ داریم

$$|R_n(x)| = |R_n| < \epsilon$$

پس به ازای هر $n > N$ داریم

$$|R_n(x)| < \epsilon$$

که در آن N مستقل از مقدار x از فاصله $0 \leq x \leq 1$ می باشد و بدین ترتیب نتیجه مطلوب بدست می آید.

تعمیم این قضیه برای هر سری توانی دیگر براحتی انجام می گیرد.

۹-۲-۱۹ قضیه حد آبل را ثابت کنید

حل. بر اساس مسئله ۹-۲-۱۸ سری توان را به صورت $\sum a_k x^k$ در نظر می گیریم

که در فاصله $0 \leq x \leq 1$ همگراست.

پس باید نشان دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

در اثبات این رابطه از مسئله ۹-۲-۱۸ که می گوید $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ در فاصله $0 \leq x \leq 1$

همگرای یکنواخت است و همچنین از مسئله ۹-۲-۱۰ که بیان می کند که $\sum a_k x^k$ در $x=1$ پیوسته است، استفاده می شود.

تعمیم به سایر سریهای توانی براحتی انجام میگیرد.

۹-۲-۲۰ (الف) ثابت کنید

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

که در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ همگرایی یکنواخت است
(ب) ثابت کنید:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

حل (الف) بنابه بسط توابع داریم

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad -1 < x < 1 \quad (۱)$$

با استفاده از مسائل ۹-۲-۹ و ۹-۲-۱۱ از طرفین (۱) در فاصله $-1 < x < 1$ از x انتگرال می گیریم:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (۲)$$

چون سری (۲) به ازای $x = \pm 1$ همگراست بنابه مسئله ۹-۲-۱۸ در فاصله $-1 \leq x \leq 1$

همگرایی یکنواخت است. پس $\tan^{-1} x$ در این فاصله همگرایی یکنواخت است.
(ب) بنابه مسئله ۹-۲-۱۹ و قسمت (الف) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \tan^{-1} x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

یا

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

۹-۲-۲۱ مطلوب است محاسبه

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

با دقت سه رقم اعشار.

حل. داریم:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \dots, \quad -\infty < u < \infty.$$

اگر فرض کنیم $u = -x^2$ بدست می آید:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty.$$

پس

$$\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \frac{x^8}{5!} - \dots$$

چون سری به ازای هر x همگراست، در نتیجه در فاصله $0 \leq x \leq 1$ همگرایی یکنواخت می باشد؛ با انتگرال گیری جمله به جمله آن داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 2!} + \frac{x^5}{5 \cdot 3!} - \frac{x^7}{7 \cdot 4!} + \frac{x^9}{9 \cdot 5!} - \dots \Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3 \cdot 2!} + \frac{1}{5 \cdot 3!} - \frac{1}{7 \cdot 4!} + \frac{1}{9 \cdot 5!} - \dots \\ &= 1 - 0.16666 + 0.03333 - 0.00595 + 0.00092 - \dots \quad 0.862 \end{aligned}$$

توجه کنید خطای جمع چهار جمله اول در سری متناوب از قدر مطلق جمله پنجم کمتر است، یعنی خطا از 0.001 کمتر است مسئله ۹-۲-۱۵ را ببینید.

۹-۲-۲۲ فاصله همگرایی هریک از سریهای زیر را تعیین کنید.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (3n-1)}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x^2)^n},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2 - n + 1}$$

جواب: (a) $-1 \leq x \leq 1$, (b) $-1 < x < 3$, به ازای هر (c) $x \neq 0$, (d) $x > 0$, (e) $x \leq 0$.

۹-۲-۲۳ ثابت کنید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n$$

در فاصله $-1 \leq x < 1$ همگراست.

۹-۲-۲۴ یا استفاده از تعریف، همگرایی یکنواخت سری زیر را بررسی کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[1 + (n-1)x][1 + nx]}$$

راهنمایی: جمله n ام را به کسرهایی جزئی تجزیه کرده و نشان دهید

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{1 + nx}$$

جواب: در هر فاصله که شامل $x=0$ باشد همگرایی یکنواخت نیست و در سایر

فاصله ها همگرایی یکنواخت می باشد.

۹-۲-۲۵ مسئله ۹-۲-۶ را مستقیماً با بدست آوردن $S_n(x)$ حل کنید.

۹-۲-۲۶ در همگرایی و همگرایی یکنواخت سریهای زیر بحث کنید:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{2^n - 1}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}, \quad x \geq 0$$

جواب: (a) به ازای $|x| < 3$ همگرا و به ازای $|x| \leq r < 3$ همگرایی یکنواخت،

(b) به ازای هر x همگرایی یکنواخت، (c) به ازای $x \geq 0$ همگراست ولی همگرایی

یکنواخت نیست، و به ازای $x \geq r > 0$ همگرایی یکنواخت است.

۹-۲-۲۷ اگر

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

ثابت کنید:

(الف) $F(x)$ به ازای هر x پیوسته است

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 \quad (\text{ب})$$

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (\text{ج})$$

۹-۲-۲۸ ثابت کنید

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right) dx = 0$$

۹-۲-۲۹ ثابت کنید

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sinh n\pi}$$

به ازای هر x از هر مرتبه ای مشتقپذیر است.

۹-۲-۳۰ همگرایی یکنواخت دنباله

$$u_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

را بررسی نمایید

۹-۲-۳۱ ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x/n)^n} = 1 - e^{-1}$$

۹-۲-۳۲ (الف) ثابت کنید

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

(ب) ثابت کنید

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

راهنمایی: از

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

استفاده کنید.

۹-۲-۳۳ ثابت کنید

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1$$

۹-۲-۳۴ انتگرالهای زیر را تا سه رقم اعشار حساب کنید

$$(a) \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx$$

جواب: (a) 0.461, (b) 0.486

۳۵-۲-۹ مقادیر زیر را تا سه رقم اعشار حساب کنید

$$(a) \sin 40^\circ, (b) \cos 65^\circ, (c) \tan 12^\circ$$

جواب: (a) 0.643, (b) 0.423, (c) 0.213

۳۶-۲-۹ بسطهای زیر را بدست آورید:

$$(a) \tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(b) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

۳۷-۲-۹ ثابت کنید.

$$(a) \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(b) \{\ln(1+x)\}^2 = x^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{2x^3}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{2x^4}{4} - \dots \quad -1 < x \leq 1$$

۳۸-۲-۹ ثابت کنید که شعاع همگرایی سری $\sum a_n x^n$ را می توان از حدهای زیر

(در صورت وجود داشتن حد) بدست آورد.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

۳۹-۲-۹ ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ در فاصله که شامل

$$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

نباشد همگراست

راهنمایی: از آزمون دیریکله استفاده کنید

۴۰-۲-۹ ثابت کنید.

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2$$

۴۱-۲-۹ اگر

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

به S همگرا باشد، ثابت کنید

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2}S$$

که این سری از تجدید آرایش سری فوق بدست آمده است.

راهنمایی: سری را به $1/2$ ضرب و سپس آن را به صورت

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \dots$$

بنویسید و آنگاه جمله به جمله با سری اصلی جمع کنید. توجه کنید که $S = \ln 2$ مسئله ۹-۲-۳۲ را ببینید.

۹-۲-۴۲ ثابت کنید

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

در فاصله $|x| < 1$ به $1/(1-x)^2$ همگراست.

۹-۲-۴۳ ثابت کنید

$$(a) \quad \coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots$$

$$(b) \quad \cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \dots$$

$$(c) \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

$$(d) \quad \csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \dots$$

راهنمایی: (a) از $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \left(\coth \frac{x}{2} - 1 \right)$ استفاده کنید

(b) از تعویض x با ix در (a) استفاده کنید.

(c) از $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$ استفاده کنید

$$\text{ // } \quad \text{ // } \quad \csc x = \cot x + \tan x/2 \quad \text{ // } (d)$$