



دانشگاه تهران

بسمه تعالی

آزمون نهایی درس: ریاضی مهندسی

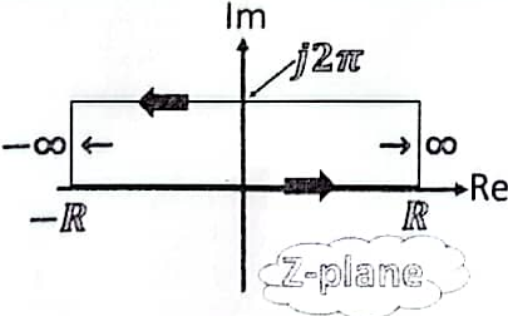
دانشکده علوم مهندسی



دانشکده فنی

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۱/۲ ساعت آزمون: ۸:۳۰ مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه، تعداد سوالات: ۴

نیمسال: اول سال تحصیلی: ۱۴۰۳-۴۰۴ استفاده از کتاب یا جزوه درسی و ماشین حساب مجاز نیست.

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	نمره
	جمال براری	۲۸۹۹۵۰	
	دقت کنید که در سوالات $i = j = \sqrt{-1}$ نماد اعداد مختلط است.		
۱	اگر V_0 و a اعدادی ثابت باشد و بخش حقیقی یک تابع تحلیلی به صورت زیر داده شده باشد، $f(z)$ را بدست آورید (ϕ و r مولفه‌های دستگاه مختصات قطبی را نشان می‌دهد)		
	$u(r, \phi) = V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\phi)$		
۲	بسط لوران تابع زیر را حول نقطه $z = i$ بدست آورید و مقدار مانده تابع در آن نقطه را بیابید.		
	راهنمایی: برای $ a < 1$ داریم: $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$		
	$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$		
۳	تصویر ناحیه بین دو خط $x = 0$ و $x = 1$ را تحت نگاشت زیر بدست آورید.		
	$w = 1 - i + \frac{i}{z + 1}$		
۴	انتگرال ناسره زیر را به کمک انتگرال تابع روی مسیر بسته مستطیلی داده شده در شکل روبرو (که در آن $R \rightarrow \infty$) و نظریه مانده‌ها محاسبه کنید.		
			
	$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx \quad 0 < a < 1$		

با آرزوی موفقیت

میرزایی، امیری و کزازی

شماره دانشجویی: ۵۱۹۹۵۰

رشته تحصیلی: فیزیکی

نام و نام خانوادگی دانشجو: جمال نزاری

تاریخ: ۱۴۰۳/۱۱/۳

نام استاد: دکتر امیری، دکتر سیرانی

عنوان درس: ریاضی فیزیکی

شماره سوال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	نمره نهایی
نمره									

این دفترچه شامل ۴ برگ اصلی (سفید) و ۲ برگ پیش نویس (رنگی) است.

$$u(r, \varphi) = v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad (I)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (II)$$

$$(I) \frac{\partial u}{\partial r} = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \varphi} = v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi$$

$$\Rightarrow v = v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \varphi + g(r)$$

$$(II) \frac{\partial v}{\partial r} = v_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \varphi + g'(r), \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = v_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \varphi$$

$$\Rightarrow g'(r) = 0 \Rightarrow g(r) = C \quad \text{میری ثابت}$$

$$f(z) = u + jv = v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi + j v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \varphi + jC$$

$$= v_0 r [\cos \varphi + j \sin \varphi] + v_0 \frac{a^2}{r} [\cos \varphi - j \sin \varphi] + jC$$

$$= v_0 r e^{j\varphi} + v_0 \frac{a^2}{r} e^{-j\varphi} + jC = v_0 z + \frac{v_0 a^2}{\bar{z}} + jC$$

۱۵

$$z=j \Rightarrow z-j=t \Rightarrow z=t+j \quad \text{راه اول} \quad (2)$$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{z^2}{(z-j)^2(z+j)^2} = \frac{(t+j)^2}{t^2(t+2j)^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2} (t^2 + j^2 + 2jt) \cdot \frac{1}{(t+2j)^2} \rightarrow$$

حل دوم: خواص لایب

$$\frac{1}{(t+2j)^2} = \frac{1}{(2j)^2} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{t}{2j})^2} \quad \left| \frac{t}{2j} \right| < 1 \Rightarrow |t| < 2$$

$$\frac{1}{(t+2j)^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{2j}{t})^2} \quad \left| \frac{2j}{t} \right| < 1 \Rightarrow |t| > 2$$

پس طبق اینها:

$$f(t) = \frac{1}{t^2} (t^2 - 1 + 2jt) \times \begin{cases} -\frac{1}{4} \left(1 - 2 \times \frac{t}{2j} + 3 \times \left(\frac{t}{2j} \right)^2 - 4 \times \left(\frac{t}{2j} \right)^3 + \dots \right) & |t| < 2 \\ \frac{1}{t^2} \left(1 - 2 \times \frac{2j}{t} + 3 \times \left(\frac{2j}{t} \right)^2 - 4 \times \left(\frac{2j}{t} \right)^3 + \dots \right) & |t| > 2 \end{cases}$$

حال به دنبال ضریب $\frac{1}{t}$ در رابطه می گردیم:

$$|t| < 2 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{t^2} + \frac{2j}{t} \right) \times \left(-\frac{1}{4} \right)$$

ضرایب $\frac{1}{t}$

$$-\frac{1}{t^2} \times -\frac{1}{4} \times -\frac{t}{j} + \frac{2j}{t} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4j} \frac{1}{t} - \frac{2j}{4} \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{4} - \frac{j}{2} = -\frac{j}{4}$$

برای $|t| > 2$ نیز ضریب $\frac{1}{t}$ در رابطه می گردیم و اجازه ترکیب $\frac{1}{t}$ می دهیم.

(۲) لایه هم برای محاسبه مانده در $z_0 = j$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-j)^2(z+j)^2} \rightarrow \text{Res}\{f(z)\}_{z=z_0}$$

$$= \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z+j)^2} \right) \Big|_{z=j} = \frac{-z^2 \cdot 2(z+j) + 2(z)(z+j)^2}{(z+j)^4} \Big|_{z=j}$$

$$= \frac{-j^2 \cdot 4j + 2j(2j)^2}{(2j)^4} = \frac{+4j - 8j}{16} = -\frac{j}{4}$$

(۲) لایه هم برای محاسبه سری در $t=1$

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \frac{t^2 - 1 + 2jt}{(t+2j)^2} = \frac{1}{t^2} \frac{t^2 - 1 + 2jt}{t^2 - 4 + 4jt}$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 - 1 + 2jt & t^2 - 4 + 4jt \\ - (t^2 - 4 + 4jt) & 1 - \frac{2j}{t} - \frac{4j}{t^2} + \dots \end{array}$$

$$3 - 2jt$$

$$- (-2jt + \frac{4j}{t} + \dots)$$

$$-\frac{4j}{t} - 5$$

برای سری

(۱۵) مانده

تغییر متغیر $z = t$ و مشتق نرم صفر

(۱۵) تفکیک ریشه ها

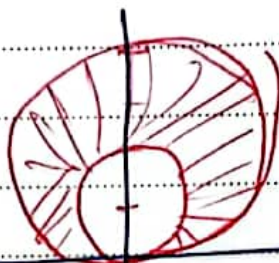
(۱) با لایه ۲ (۱) با خارج

$$W = (1-i) + i W_1$$

حل داریم

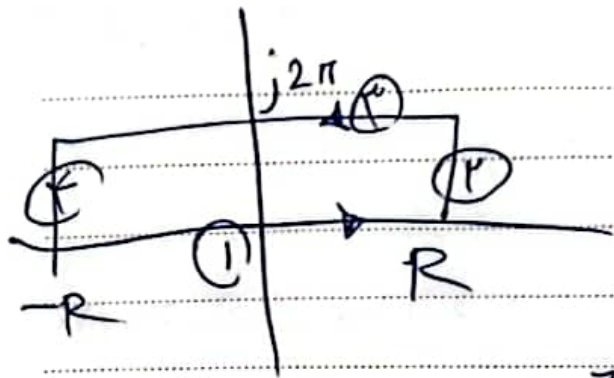
فرض در z تصویر در ناحیه از نظر اندازه انجام نمی دهد فقط

۹۰ می چرخاند



و $z-1$ که جمع شده است، نقطه صفر را به $z-1$ می برد:





$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$$

$$1 + e^z = 0 \Rightarrow e^z = -1 = e^{j(\pi + 2k\pi)} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

نقطه‌های $z = j\pi$ برای $k=0$ در نیمه‌ی بالایی است.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \operatorname{Res}\{f(z)\}_{z=j\pi}$$

$$\operatorname{Res}\{f(z)\}_{z=j\pi} = \left. \frac{e^{az}}{(1 + e^z)'} \right|_{z=j\pi} = \frac{e^{az}}{e^z} \Big|_{z=j\pi} = e^{-j\pi(1-a)}$$

انتقال به x در $z=j\pi$

$$\int_1: z=x, dz=dx \Rightarrow \int_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = I$$

2: $z=R+jy \Rightarrow dz=jdy, y \in [0, 2\pi]$

$$\int_2 = \int \frac{e^{aR+ajy}}{1 + e^{R+jy}} jdy = \int \frac{e^{aR} \cdot e^{jay}}{1 + e^R \cdot e^{jy}} jdy$$

همان صورت هم خارج می‌شود است از پرانتز

$$\int \frac{e^{aR} \cdot e^{jay}}{e^R \cdot e^{jy}} = \int \frac{1}{e^{(1-a)R}} \Rightarrow$$

$a < 1 \rightarrow e^{(1-a)R} = e^\infty = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$

$$\int_{\gamma} : z = x + jy\pi, dz = dx, x \in [+\infty \rightarrow -\infty] \\ R \rightarrow \infty$$

$$(1) \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{a(x+j\pi)} dx}{1 + e^{x+j\pi}} = -e^{j\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = -e^{j\pi a} I$$

$$(1/a) \int_{\gamma} : z = -R + jy, dz = j dy, y: 2\pi \rightarrow 0$$

$$\int_{2\pi}^0 \frac{e^{-Ra} \cdot e^{jya}}{1 + e^{-R+jy}} j dy = \int \frac{0 \times e^{jya}}{1 + 0} j dy = 0$$

$R \rightarrow \infty$

$$I + 0 \rightarrow e^{+j2\pi a} I + 0 = e^{j\pi(a-1)}$$

$$(1 - e^{j2\pi a}) I = 2\pi j e^{j\pi a} e^{-j\pi}$$

$$\cancel{e^{j\pi a}} (e^{-j\pi a} - e^{j\pi a}) I = 2\pi j \cancel{e^{j\pi a}} \cdot (-1)$$

$$-2j \sin(\pi a) I = -2\pi j \Rightarrow I = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

$$(1/a)$$