



پیام نوریها
public channel



✓ کانال پیام نوریها در سال 95 با هدف تهیه جزوات و نمونه سوالات افتتاح و از همان ابتدای تاسیس کوشیده است با تکیه بر تلاش بی وقفه، کارگروهی و فعالیت های بدون چشمداشت کاربران متمایز خود، قدمی کوچک در راه پیشرفت ارائه خدمات به دانشجویان این مرز و بوم بردارد.

@Payamnoria

[telegram.me/Payamnoria](https://t.me/Payamnoria)

رایگان است و همیشه رایگان میماند



اطلاع از اخبار و دانلود جزوات و نمونه سوالات

[برای ورود به کانال تلگرامی پیام نوریها کلیک کنید](#)

" کانال و خانواده تلگرامی پیام نوریها "

با عضویت در کانال و به آرشیو زیر دسترسی پیدا کنید

✓ تمام نمونه سوالات به روز تا آخرین دوره

✓ جزوات درسی

✓ بیش از ۱۰۰ فلش کارت دروس

✓ اخبار به روز پیام نور

✓ فیلم و فایل آموزشی اختصاصی

✓ انجام انتخاب واحد و حذف و اضافه

✓ پاسخگویی به سوالات دانشجویان

✓ معرفی گروه و انجمن های پیام نوری

✓ طنز و توییت دانشجویی

به یکی از بزرگترین کانال های پیام نوری بپیوندید

[برای ورود به کانال تلگرامی پیام نوریها کلیک کنید](#)

" با سلام خدمت شما دوستان گرامی "

تمام کتب موجود در کانال پیام نوریها از سراسر اینترنت که به صورت رایگان قرار گرفته است جمع آوری شده و اینک در اختیار شما دانشجویان عزیز می باشد

موفق و پیروز باشید ☺

" کانال و خوانواده نکرامے پیام نوریها "

@Payamnoria



دانشگاه پیام نور

ساختمانهای گسسته

فاطمه نورانی مریم بازیار قمبوانی زهره حبیبی



@bozorgmehr_ketab

- آپلود نمونه سوال همه رشته ها
- فایل pdf کتاب ها و جزوه ها
- مقاله، تحقیق، پروژه و کارآموزی
- اخبار، تقویم آموزشی و منابع



دانشگاه پیام نور
۱۸۶۵

گروه مهندسی کامپیوتر
(۱۳۹۱)

سرنشانه	نورانی، فاطمه، ۱۳۵۱-
صنوان و نام پدید آور	ساختمان های گسسته / فاطمه نورانی، مریم بازدار قمیوانی، زهره حبیبی.
مشخصات نشر	تهران: دانشگاه پیام نور، ۱۳۹۱.
مشخصات ظاهری	چهارده، ۴۳۴ ص.
فروست	دانشگاه پیام نور، ۱۸۶۵. گروه مهندسی کامپیوتر، ۱۳۹۰
شابک	9 - 909 - 387 - 964 - 978
وضعیت فهرست نویسی	فیبا.
یادداشت	واژه نامه.
یادداشت	کتابنامه.
موضوع	ریاضیات - آموزش برنامه ای.
موضوع	ریاضیات - مسائل، تمرین ها و غیره (عالی).
موضوع	کامپیوتر - ریاضیات - آموزش برنامه ای.
موضوع	کامپیوتر - ریاضیات - مسائل، تمرین ها و غیره (عالی).
شناسه افزوده	بازدار قمیوانی، مریم، ۱۳۵۵-
شناسه افزوده	حبیبی، زهره، ۱۳۶۰-
شناسه افزوده	دانشگاه پیام نور.
رده بندی کنگره	۱۳۹۱ س۲ ۸۴/۲ QA۳۷۲
رده بندی دیویی	۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی	۲۸۳۵۰۴۴



دانشگاه پیام نور

ساختمان های گسسته

مؤلفان: فاطمه نورانی - مریم بازدار قمیوانی - زهره حبیبی

ویراستار علمی: دکتر نازلی بشارتی

تهیه و تولید: مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه پیام نور

شمارگان: ۴۰۰۰ نسخه

نوبت و تاریخ چاپ: چاپ اول مرداد ۱۳۹۱

شابک: ۹ - ۹۰۹ - ۳۸۷ - ۹۶۴ - ۹۷۸

ISBN: 978 - 964 - 387 - 909 - 9

فروش این کتاب فقط از طریق نمایندگی های دانشگاه پیام نور مجاز می باشد و فروش

آن در سایر مراکز فروش کتاب موجب تعقیب قانونی فروشنده خواهد گردید

(کلیه حقوق نشر اعم از چاپی، الکترونیکی، تصویری، صوتی و اینترنتی برای دانشگاه پیام نور محفوظ است)

قیمت: ۶۷۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه های علمی و آموزشی، به چاپ می رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرات اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صورتی جدید چاپ می شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می دهند.

کتاب های فرادرسی (ف) و کمک درسی (ک) به منظور غنی تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست عناوین

فصل ۱: گزاره‌ها

۱-۱- تعریف گزاره	۲
۲-۱- گزاره‌نما	۳
۳-۱- استفاده از روابط منطقی جهت ایجاد گزاره‌های مرکب	۳
۴-۱- برخی تعاریف پیرامون گزاره‌ها	۱۴
۵-۱- خواص گزاره‌ها	۱۷
۶-۱- استلزام منطقی	۱۸
۷-۱- استنتاج	۱۹
۱-۷-۱- قوانین مهم استنتاج	۱۹
۸-۱- روش‌های دیگر اثبات	۲۳
۸-۱-۱- روش غیرمستقیم	۲۳
۸-۱-۲- برهان خلف	۲۴
۸-۱-۳- استقرای ریاضی	۲۵
۹-۱- سورها	۲۸
۹-۱-۱- ترکیب سورها	۳۰
۹-۱-۲- تقیص سور	۳۲
۹-۱-۳- اثبات درستی گزاره‌های سورداز	۳۴
چند نمونه مسأله حل شده	۳۶
تمرین‌های فصل	۵۰

فصل ۲: روابط روی مجموعه‌ها، توابع

۵۸	۱-۲-۱ زوج مرتب و حاصلضرب دکارتی
۵۸	۲-۲-۱ روابط
۶۰	۱-۲-۲ جبر رابطه‌ها
۶۱	۲-۲-۲ ترکیب روابط
۶۴	۳-۲-۲ خواص روابط
۶۸	۴-۲-۲ بستر رابطه
۷۰	۵-۲-۲ رابطه هم‌ارزی
۷۴	۶-۲-۲ کلاس‌های هم‌ارزی
۷۶	۷-۲-۲ افراز و کلاس‌های هم‌ارزی
۸۱	۳-۲ روابط و ماتریس صفر-یک
۸۱	۱-۳-۲ ماتریس‌های صفر-یک و عملیات منطقی روی آن‌ها
۸۳	۲-۳-۲ رابطه و ماتریس‌های صفر-یک
۸۵	۳-۳-۲ بررسی خواص رابطه از روی ماتریس رابطه
۸۷	۴-۳-۲ بستر رابطه با استفاده از ماتریس رابطه
۸۷	۵-۳-۲ بستر متعددی با استفاده از الگوریتم وارشال
۸۹	۴-۲ گراف جهت‌دار برای نمایش روابط
۸۹	۱-۴-۲ ساخت گراف رابطه
۹۱	۲-۴-۲ بررسی خواص رابطه با استفاده از گراف رابطه
۹۱	۳-۴-۲ رسم گراف بستر رابطه
۹۳	۵-۲ تابع و رابطه
۹۴	۱-۵-۲ وارون تابع
۹۶	چند نمونه مسأله حل شده
۱۰۸	تمرین‌های فصل

فصل ۳: ترتیب جزئی، شبکه، جبر بول

۱۱۴	۱-۳-۱ رابطه ترتیب جزئی
۱۱۶	۱-۱-۳-۱ ترتیب قاموسی روی $A_1 \times A_2$
۱۱۶	۱-۱-۳-۱-۱ ترتیب قاموسی
۱۱۶	۲-۱-۳-۱ ترتیب قاموسی حاصلضرب دکارتی $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$
۱۱۷	۳-۱-۳-۱ ترتیب قاموسی روی رشته‌ها
۱۱۷	۲-۱-۳-۲ نمودار هاس
۱۲۰	۳-۱-۳-۲ پیکریختی دو مجموعه مرتب جزئی
۱۲۱	۴-۱-۳-۲ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عناصر - عناصر مینیمال و ماکسیمال
۱۲۴	۵-۱-۳-۲ ترتیب توپولوژیکی
۱۳۱	۶-۱-۳-۲ کران‌های بالا و پایین
۱۳۲	۷-۱-۳-۲ کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران بالا
۱۳۳	۲-۳-۲ شبکه
۱۳۸	۱-۲-۳-۲ زیر شبکه
۱۳۹	۲-۲-۳-۲ خواص شبکه‌ها
۱۳۹	۳-۲-۳-۲ شبکه محدود
۱۴۰	۴-۲-۳-۲ شبکه توزیع‌پذیر
۱۴۳	۵-۲-۳-۲ شبکه متمم‌پذیر
۱۴۴	۳-۳-۳ جبر بول
۱۴۴	۱-۳-۳-۲ خواص جبر بول
۱۴۶	۲-۳-۳-۲ نمایش جبر بول
۱۴۸	۳-۳-۳-۲ تابع بولی
۱۴۹	۱-۳-۳-۳ عبارت بولی
۱۴۹	۲-۳-۳-۳ استفاده از نمودار منطقی برای نمایش عبارات بولی
۱۵۰	۳-۳-۳-۳ استفاده از جداول درستی برای نمایش عبارات بولی

۱۵۱	۴-۳-۳- صورت‌های نرمال نمایش عبارات بولی
۱۵۱	۴-۳-۳- نمایش عبارات بولی به صورت جمع حاصل ضرب‌ها
۱۵۳	۴-۳-۳- نمایش عبارات بولی به صورت ضرب حاصل جمع‌ها
۱۵۸	۵-۳-۳- فرم‌های استاندارد
۱۶۰	۶-۳-۳- ساده سازی عبارات بولی
۱۶۰	۶-۳-۳- ساده سازی عبارات بولی با روش کوپین مک کلاسیکی
۱۶۷	چند نمونه مسأله حل شده
۱۸۴	تمرین‌های فصل

فصل ۴: گراف

۱۹۲	۱-۴- تاریخچه و تعاریف مقدماتی گراف
۲۰۰	۲-۴- گراف‌های ساده خاص
۲۰۵	۳-۴- زیرگراف و انواع آن
۲۰۷	۴-۴- نمایش گراف، یکرختی گراف‌ها
۲۰۷	۴-۴-۱- نمایش گراف
۲۱۳	۴-۴-۲- یکرختی گراف‌ها
۲۱۵	۵-۴- مکمل گراف
۲۱۷	۶-۴- مسیر و دور در گراف
۲۲۰	۶-۴-۱- گراف همبند
۲۲۳	۶-۴-۲- گراف اولیری
۲۲۶	۶-۴-۳- گراف همیتونی
۲۳۲	۶-۴-۱- کاربردهایی از مسیرها و دورهای همیتونی
۲۳۹	۷-۴- گراف مسطح
۲۴۵	چند نمونه مسأله حل شده
۲۶۷	تمرین‌های فصل

فصل ۵: درخت

۲۷۸	۱-۵- درخت
۲۸۱	۲-۵- درخت ریشه دار
۲۸۱	۱-۲-۵- مفاهیم اولیه در درخت ریشه دار
۲۸۴	۳-۵- کاربرد درخت در مدل سازی
۲۸۴	۱-۳-۵- سازماندهی فایل‌های سیستم‌های کامپیوتری
۲۸۴	۲-۳-۵- بازنمایی تشکیلات سازمانی
۲۸۶	۴-۵- درخت m تایی و درخت دودویی
۲۸۷	۵-۵- شیوه‌های پیمایش درخت
۲۸۷	۱-۵-۵- پیمایش پیش‌ترتیب
۲۸۹	۲-۵-۵- پیمایش پس‌ترتیب
۲۹۱	۳-۵-۵- پیمایش میان‌ترتیب
۲۹۱	۶-۵- نمایش عبارات ریاضی با استفاده از درخت دودویی
۲۹۴	۱-۶-۵- عبارات پیشوندی و پسوندی
۲۹۶	۷-۵- درخت فراگیر
۲۹۸	۱-۷-۵- درخت فراگیر با استفاده از روش جستجوی اول عمق
۳۰۱	۲-۷-۵- درخت فراگیر با استفاده از روش جستجوی اول سطح
۳۰۳	۸-۵- درخت فراگیر مینیمم
۳۰۴	۱-۸-۵- الگوریتم کروسکال
۳۰۸	۲-۸-۵- الگوریتم پریم
۳۱۱	چند نمونه مسأله حل شده
۳۳۰	تمرین‌های فصل

۴۱۷	نمادها
۴۲۱	واژه‌نامه فارسی - انگلیسی
۴۲۵	واژه‌نامه انگلیسی - فارسی
۴۲۹	فهرست راهنما

فصل ۶: شمارش و توابع مولد

۳۳۶	۱-۶- قواعد شمارش
۳۳۹	۲-۶- تبدیل (جایگشت) و ترکیب
۳۳۹	۱-۲-۶- تبدیل (جایگشت)
۳۴۱	۲-۲-۶- جایگشت دایره‌ای
۳۴۱	۳-۲-۶- ترکیب
۳۴۳	۳-۶- ضرایب دو جمله‌ای
۳۴۶	۴-۶- اصل لانه کبوتری
۳۵۰	۵-۶- توابع مولد
۳۶۱	چند نمونه مسأله حل شده
۳۷۲	تمرین‌های فصل

فصل ۷: روابط بازگشتی

۳۷۶	۱-۷- مقدمه‌ای بر روابط بازگشتی
۳۷۷	۲-۷- مدل‌سازی با استفاده از روابط بازگشتی
۳۸۴	۳-۷- حل روابط بازگشتی
۳۸۵	۱-۳-۷- حل روابط بازگشتی همگن مرتبه اول با روش تکرار
۳۸۶	۲-۳-۷- حل روابط بازگشتی همگن مرتبه دوم
۳۹۱	۳-۳-۷- حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت
۳۹۶	۴-۷- حل روابط بازگشتی با استفاده از توابع مولد
۴۰۰	چند نمونه مسأله حل شده
۴۱۱	تمرین‌های فصل
۴۱۵	مراجع

ستایش بی حد، خدای را زیبد که هستی او،
اول است، بی آنکه پیش از او اول و ابتدایی باشد،
و آخر است، بی آنکه پس از او آخر و انتهایی باشد.

پیشگفتار

تجربه چندین ساله تدریس درس ساختمان‌های گسسته، نویسندگان را بر آن داشت که کتابی متناسب با بحث روز این درس برای استفاده دانشجویان، به‌خصوص دانشجویان دانشگاه پیام‌نور فراهم آورند. از ویژگی‌های کتاب حاضر می‌توان به بهره‌گیری از منابع روز مورد استفاده در دانشگاه‌های مطرح، بیان مثال‌های کاربردی کامپیوتری و نیز مسائل حل شده در پایان هر فصل اشاره نمود.

این کتاب مشتمل بر ۷ فصل است. در فصل ۱، مقدمه‌ای بر مبحث گزاره‌ها بیان شده است. فصول ۲ و ۳ شامل مباحث رابطه و رابطه ترتیب جزئی می‌باشد. در فصول ۴ و ۵ ساختارهای گراف و درخت بیان شده و فصول ۶ و ۷ به بیان مقدمه‌ای از بحث شمارش، توابع مولد و در نهایت مبحث روابط بازگشتی اشاره می‌نمایند.

روش نگارش کتاب، براین اساس است که ارتباط و انسجام مطالب مندرج در آن حفظ شود، به‌طوری‌که در هر فصل می‌توان کاربردهایی از مطالب فصول قبلی را به‌وضوح مشاهده نمود. همچنین در پایان هر فصل، مسائلی مرتبط با آن فصل تحت عنوان "تمرین‌های حل شده" بیان شده، به‌طوری‌که دانشجو با مطالعه دقیق آن بتواند تمامی مطالب و مفاهیم فصل را درک نماید. سپس تمرین‌هایی جهت خودآزمایی دانشجویان ارائه گردیده است. این سؤالات از متون ساختمان گسسته روز دنیا، برخی از نمونه سؤالات امتحانات و نیز مسائل ابداعی انتخاب شده است.

ذکر این نکته حائز اهمیت است که با توجه به پیشینازی درس ساختمان گسسته، برای دروسی همچون ساختمان داده، مدار منطقی و طراحی الگوریتم، مناسب دیده شد در کتاب حاضر، مثال‌هایی بیان شود تا به دانشجویان عزیز پیش‌زمینه و دیدگاهی روشن از نحوه کاربرد این درس در دروسی که بعداً مطالعه می‌نمایند، ارائه شود. امید است دانشجویان عزیز پس از مطالعه این کتاب بتوانند، مهارت‌های لازم در درس ساختمان گسسته، را کسب نمایند.

در پایان مؤلفین وظیفه خود می‌دانند که از زحمات تمامی اساتید و دوستانی که بی‌شک این کتاب بدون راهنمایی و یاری آن‌ها به ثمر نمی‌رسید، تشکر و قدردانی نمایند؛ همچنین نهایت تشکر و قدردانی خود را از استاد گرامی دکتر محمدابراهیم شیر (هیأت علمی دانشکده ریاضی، علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر) برای رهنمودهایشان، اساتید گرانقدر دکتر علی قاضی‌زاده، دکتر داود کریم‌زادگان و دکتر احمد فراهی برای حمایت بی‌شائبه‌شان، سرکار خانم دکتر نازلی یشارتی به سبب زحمات و رهنمودهایشان در مراحل ویراستاری کتاب، آقای حمیدرضا شریفی به خاطر زحمات و پیگیری‌های مستمری‌شان و نیز سرکار خانم خواجه‌پور برای صبوری و زحمات بی‌دریغ‌شان اعلام می‌داریم.

در آخر، سخن را با تشکر از تمامی اساتید و دانشجویان عزیزی که با ارسال پیشنهادات، انتقادات و نظرات خود به منظور بهتر و پربار کردن این کتاب برای مؤلفین ارسال می‌دارند، تا در چاپ‌های بعدی مورد استفاده قرار گیرد، به پایان می‌رسانیم.

سیده فاطمه نورانی f_noorani@pnu.ac.ir
مریم بازیار قمبوانی baziarm@yahoo.com
زهره حبیبی z_habibi@pnu.ac.ir

تابستان ۱۳۹۱

چهارده

فصل اول

گزاره‌ها

اهداف:

در پایان این فصل انتظار می‌رود:

- دانشجو با مفهوم گزاره و انواع آن آشنا شود.
- توان تجزیه، تحلیل و ترکیب گزاره‌نما را داشته باشد.
- با استفاده از پیوندهنده‌ها بتواند گزاره‌های ترکیبی را ایجاد نماید.
- از جدول درستی به عنوان روشی برای نمایش عبارت‌های منطقی استفاده نماید.
- با گزاره‌های همیشه درست و همیشه نادرست آشنا شود.
- با مفاهیم استلزام و استنتاج منطقی آشنا و قدرت بکارگیری آن را در مسائل روزمره و طبیعی داشته باشد.
- با روش‌های اثبات مانند برهان خلف و استقرا آشنا شود.
- با سورها و نحوه به‌کار بردن آن‌ها آشنا شود.

۱-۱- تعریف گزاره

در ریاضی برای بیان احکام از جملاتی استفاده می‌شود که می‌توان درستی یا نادرستی این جملات را بیان نمود و یا اینکه با داشتن اطلاعات کافی، پیرامون درست یا نادرست بودن آنها نظر داد. این دسته از جملات گزاره نامیده می‌شوند. بنابراین:

☐ گزاره: یک جمله ساده خبری است که به جملات ساده‌تر تجزیه نمی‌شود و دارای ارزش درست یا نادرست است.

جهت نمایش گزاره از حروف کوچک الفبای لاتین مانند p, q, r استفاده می‌شود. برای نمایش ارزش درست گزاره از T (True) یا عدد ۱ و جهت نمایش ارزش نادرست آن از F (False) یا عدد ۰ نیز استفاده می‌شود.

☐ مثال ۱-۱: کدام یک از عبارات زیر گزاره هستند؟ در صورت گزاره بودن، ارزش آن‌ها چیست؟

p مریخ جزء منظومه شمسی است.

z علی حاتمی یک کارگردان ایرانی است.

q آن معادله را حساب کن.

r درس ساختمان گسته آسان است.

حل:

عبارت p گزاره است و ارزش آن درست است.

عبارت q گزاره است و ارزش آن درست است.

عبارت q گزاره نمی‌باشد. زیرا گزاره باید جمله خبری باشد.

عبارت r گزاره نیست، زیرا آسان بودن تعریف نشده است و نمی‌توان درباره درست یا نادرست بودن آن بحث نمود.

۲-۱- گزاره‌نما

☐ گزاره‌نما: اگر گزاره‌ای شامل متغیر باشد و به ازای بعضی مقادیر متغیر، ارزش گزاره T و به ازای برخی دیگر ارزش آن F شود، آن را گزاره‌نما می‌نامند. برای نمایش گزاره‌نمای " x عددی اول است" از نماد $p(x)$ یا $q(x)$ یا $r(x)$ استفاده می‌شود.

☐ مثال ۲-۱: گزاره‌نماهای زیر را در نظر بگیرید:

- " x مؤلف کتاب ساختمان گسته است." در این عبارت اگر x را از مجموعه مؤلفین کتاب ساختمان گسته انتخاب نماییم، این گزاره‌نما تبدیل به گزاره با ارزش T و در غیر اینصورت تبدیل به گزاره با ارزش F می‌شود. بنابراین عبارت فوق یک گزاره نما است.

- $x=11$ (در مجموعه اعداد حقیقی) یک گزاره‌نما است. این گزاره‌نما به ازای بعضی مقادیر حقیقی x ارزش T و به ازای بعضی مقادیر دیگر مانند $x=5$ ، دارای ارزش F است.

- x عدد اول است. در این عبارت، اگر x از مجموعه اعداد اول انتخاب شود، گزاره‌نما دارای ارزش درست است و اگر عددی غیراول انتخاب شود، گزاره‌نما دارای ارزش نادرست خواهد بود.

۳-۱- استفاده از روابط منطقی جهت ایجاد گزاره‌های مرکب

☐ گزاره ساده: گزاره‌ای است که قابل تجزیه به گزاره‌های کوچک‌تر نمی‌باشد. مانند گزاره p در مثال ۱-۱.

☐ گزاره مرکب: گزاره مرکب، گزاره‌ای است که از ترکیب گزاره‌های ساده با استفاده از یک سری روابط و عملگرهای منطقی (الفاظ پیونددهنده) حاصل می‌شود. به گزاره‌های مرکب، فرمول گزاره‌ای نیز گفته می‌شود. در یک گزاره مرکب، هر یک از گزاره‌های ساده موجود، یک مؤلفه نامیده می‌شود.

در ادامه، الفاظ پیونددهنده‌ای که برای ساخت فرمول‌های گزاره‌ای استفاده

می‌شوند، معرفی می‌شوند. قبل از تعریف الفاظ پیونددهنده، جدول درستی به عنوان ابزاری جهت نمایش ارزش گزاره‌ها معرفی می‌شود.

جدول درستی: در فرمول‌های گزاره‌ای با جایگزینی مقادیر F و T بجای هر یک از مؤلفه‌ها، یک نمونه از فرمول استخراج می‌شود. بدیهی است جایگزینی حالت‌های مختلف هر یک از مؤلفه‌ها جهت استخراج تمام نمونه فرمول‌ها کارساده‌ای نیست؛ بدین منظور جدولی تحت عنوان جدول درستی معرفی می‌شود. جدول درستی، روشی برای تحلیل درستی فرمول‌های گزاره‌ای به ازای کلیه حالت‌های مؤلفه‌های آن می‌باشد. تعداد ردیف‌های این جدول با تعداد گزاره‌های پایه مرتبط است. اگر یک گزاره مدنظر باشد، این یک گزاره تنها دارای حالت درست یا نادرست می‌باشد، از این‌رو جدول گزاره آن، دو ردیف بیشتر نخواهد داشت. بدین ترتیب برای n گزاره، 2^n ردیف در جدول وجود خواهد داشت.

نقیض یا نفی یک گزاره: نقیض گزاره p که با علامت $\neg p$ (یا $\sim p$) نشان داده می‌شود، گزاره‌ای است که ارزش آن مخالف ارزش گزاره p است. نقیض گزاره به این صورت بیان می‌شود "چنین نیست که p ".

جدول ۱-۱، جدول درستی نقیض یک گزاره را نشان می‌دهد. برای هر حالت ممکن گزاره p یک ردیف در این جدول قرار گرفته است. در هر ردیف ارزش $\neg p$ به‌ازای ارزش p نشان داده شده است.

جدول ۱-۱. جدول درستی نقیض گزاره

p	$\neg p$
F	T
T	F

که مثال ۳-۱: نقیض گزاره p را بیابید، که در آن:

p متغیر x_{12} یک نام متغیر معتبر در زبان C است.

حل:

"چنین نیست که متغیر x_{12} یک نام متغیر معتبر در زبان C است". یا به عبارت دیگر

"متغیر x_{12} یک نام متغیر معتبر در زبان C نیست".

ترکیب عطفی: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی دو گزاره با $p \wedge q$ نشان داده می‌شود. ارزش گزاره مرکب حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره زمانی درست است که هر دو گزاره دارای ارزش درست باشند؛ در غیر این صورت ارزش گزاره مرکب $p \wedge q$ نادرست خواهد بود. ترکیب عطفی با نماد AND و نیز نشان داده می‌شود. جدول درستی گزاره مرکب $p \wedge q$ در جدول ۲-۱ نشان داده شده است.

جدول ۲-۱. جدول درستی ترکیب عطفی دو گزاره

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

ترکیب فصلی: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب فصلی دو گزاره با $p \vee q$ نشان داده می‌شود. ارزش گزاره مرکب حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره زمانی نادرست است که هر دو گزاره توأمأ دارای ارزش نادرست باشند؛ در غیر این صورت ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ درست خواهد بود. ترکیب فصلی با نماد OR یا $+$ نیز نشان داده می‌شود. جدول درستی گزاره مرکب $p \vee q$ در جدول ۳-۱ نشان داده شده است.

جدول ۳-۱. جدول درستی ترکیب فصلی دو گزاره

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

ترکیب NAND: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب NAND دو گزاره با $p \uparrow q$ نشان داده می‌شود. این ترکیب در حقیقت، ترکیب نقیض عطفی یک گزاره است. یعنی:

$$p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$$

جدول درستی گزاره مرکب $p \uparrow q$ در جدول ۴-۱ نشان داده شده است.

شرطی $p \rightarrow q$ را مقدم و q را تالی نامند و گفته می‌شود "اگر p آن‌گاه q "؛ یا اینکه " p شرط کافی برای q است"؛ یا اینکه " q شرط لازم برای p است".
جدول درستی گزاره شرطی جدول ۷-۱ نشان داده شده است.

جدول ۷-۱. جدول درستی ترکیب $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

توجه:

همان‌طور که در جدول ۷-۱ نشان داده شده است، در صورتی که قسمت مقدم شرط یعنی p نادرست باشد، فارغ از ارزش q گزاره $p \rightarrow q$ دارای ارزش درست خواهد بود. بنابراین در گزاره‌های شرطی اگر قسمت مقدم دارای ارزش نادرست باشد، گزاره شرطی دارای ارزش درست خواهد بود و نیازی به بررسی ارزش قسمت تالی نخواهد بود. در این صورت گوئیم گزاره $p \rightarrow q$ به انتفاء مقدم درست است.

عکس نقیض: گزاره $q \rightarrow p$ عکس گزاره $p \rightarrow q$ و گزاره $p \rightarrow \neg q$ عکس نقیض گزاره $p \rightarrow q$ نامیده می‌شوند. جدول درستی عکس و عکس نقیض دو گزاره p و q در جدول ۸-۱ نشان داده شده است. با توجه به این جدول مشخص می‌شود که ارزش هر گزاره شرطی و عکس نقیض آن با هم برابر است. اما گزاره شرطی و عکس آن وقتی هم‌ارزش هستند که قسمت مقدم و تالی شرط هر دو ارزش درست یا هر دو ارزش نادرست داشته باشند.

جدول ۸-۱. جدول درستی معکوس و عکس نقیض گزاره $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow \neg q$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	F
T	T	T	T	T

جدول ۴-۱. جدول درستی ترکیب NAND

p	q	$p \uparrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

ترکیب NOR: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب NOR دو گزاره با $p \downarrow q$ نشان داده می‌شود. این ترکیب در حقیقت، ترکیب نقیض فصلی یک گزاره است. یعنی:

$$p \downarrow q = \neg(p \vee q)$$

جدول درستی گزاره مرکب $p \downarrow q$ در جدول ۵-۱ نشان داده شده است.

جدول ۵-۱. جدول درستی ترکیب NOR

p	q	$p \downarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

ترکیب XOR: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب XOR دو گزاره با $p \oplus q$ نشان داده می‌شود. به این ترکیب OR انحصاری نیز گفته می‌شود. ارزش این ترکیب وقتی درست است که از بین دو گزاره، منحصراً یکی ارزش درست داشته باشد. بنابراین اگر p و q توأمأً درست یا توأمأً نادرست باشند، ارزش $p \oplus q$ نادرست خواهد بود.

جدول درستی گزاره مرکب $p \oplus q$ در جدول ۶-۱ نشان داده شده است.

جدول ۶-۱. جدول درستی ترکیب $p \oplus q$

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

ترکیب شرطی: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب شرطی دو گزاره با $p \rightarrow q$ نشان داده می‌شود. ارزش گزاره شرطی $p \rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد؛ در مابقی موارد این ترکیب ارزش درست خواهد داشت. در گزاره

ترکیب دوشروطی: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب دوشروطی دو گزاره با $p \leftrightarrow q$ نشان داده می‌شود. اگر دو گزاره p و q تماماً ارزش درست، یا تماماً ارزش نادرست داشته باشند، گزاره دو شرطی $p \leftrightarrow q$ دارای ارزش درست خواهد بود. گزاره دوشروطی به صورت " p اگر و فقط اگر q ؛ یا اینکه " p شرط لازم و کافی برای q است" بیان می‌شود.

جدول درستی گزاره دو شرطی جدول ۹-۱ نشان داده شده است.

جدول ۹-۱. جدول درستی ترکیب $p \leftrightarrow q$

P	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

مثال ۱-۴: گزاره‌های ساده زیر را به همراه ارزش آنها در نظر بگیرید:

• p : هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است (F).

• q : فروردین ۳۱ روز است (T).

• s : کامپایلر پیش‌نیاز مبنای کامپیوتر است (F).

تأثیر عملگرهای ترکیبی به صورت زیر است:

الف) $\neg p$: چنین نیست که هر بایت، از ۷ بیت تشکیل شده باشد (ارزش T).

ب) $p \wedge q$: هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است و فروردین ۳۱ روز است:

در نتیجه ارزش $p \wedge q$ برابر با F است.

$$\left. \begin{array}{l} p: \text{هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است} \equiv F \\ q: \text{فروردین ۳۱ روز است} \equiv T \end{array} \right\} p \wedge q \equiv F \wedge T \equiv F$$

ج) $p \vee s$: هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است یا کامپایلر پیش‌نیاز مبنای کامپیوتر است.

$$\left. \begin{array}{l} p: \text{هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است} \equiv F \\ s: \text{کامپایلر پیش‌نیاز مبنای کامپیوتر است} \equiv F \end{array} \right\} p \vee s \equiv F \vee F \equiv F$$

در نتیجه ارزش $p \vee s$ برابر با F است.

د) $p \oplus q$: یا هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است یا فروردین ۳۱ روز است:

در نتیجه ارزش $p \oplus q$ برابر با T است.

$$\left. \begin{array}{l} p: \text{هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است} \equiv F \\ q: \text{فروردین ۳۱ روز است} \equiv T \end{array} \right\} p \oplus q \equiv F \oplus T \equiv T$$

ه) $p \uparrow q$: هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است و فروردین ۳۱ روز است.

نکته:

عملگرهای منطقی نسبت به یکدیگر دارای اولویت هستند (جدول ۱۰-۱). غیر از این از پرازنگذاری نیز می‌توان برای ایجاد اولویت استفاده نمود. اگر در یک گزاره بیش از یک عملگر از یک نوع باشد، ترتیب عملگرها از چپ به راست در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۱۰-۱. اولویت عملگرهای منطقی

اولویت	عملگر
۱	$\neg$
۲	$\wedge$
۳	$\vee$
۴	$\rightarrow$
۵	$\leftrightarrow$

مثال ۱-۵: اگر ارزش گزاره‌های P, Q, R به ترتیب T, T, F باشند، ارزش گزاره‌های زیر را به دست آورید:

الف) $P \rightarrow Q \vee R$

ب) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

حل:

با توجه به اولویت عملگرها خواهیم داشت:

(الف)

$$\begin{aligned} P \rightarrow Q \vee R &\equiv T \rightarrow T \vee F \\ &\equiv T \rightarrow T \\ &\equiv T \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R) &\equiv (T \rightarrow (T \rightarrow F)) \rightarrow (T \rightarrow F) \\ &\equiv (T \rightarrow F) \rightarrow (T \rightarrow F) \\ &\equiv F \rightarrow (T \rightarrow F) \\ &\equiv F \rightarrow F \\ &\equiv T \end{aligned}$$

مثال ۱-۶: اگر گزاره‌های p, q, r به ترتیب دارای ارزش T, F, T باشند، ارزش گزاره‌های زیر را به دست آورید.

$$(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \quad \text{(الف)}$$

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (r \leftrightarrow p) \quad \text{(ب)}$$

حل:

(الف)

$$\begin{aligned} (\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) &\equiv (\neg T \leftrightarrow \neg F) \leftrightarrow (F \leftrightarrow T) \\ &\equiv (F \leftrightarrow T) \leftrightarrow (F \leftrightarrow T) \\ &\equiv F \leftrightarrow F \\ &\equiv T \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (r \leftrightarrow p) &\equiv (T \rightarrow \neg F) \rightarrow (T \leftrightarrow T) \\ &\equiv (T \rightarrow T) \rightarrow (T \leftrightarrow T) \\ &\equiv T \rightarrow T \\ &\equiv T \end{aligned}$$

مثال ۱-۷: دستورات زیر که یک عبارت شرطی در زبان برنامه نویسی C است را در نظر بگیرید:

```
if (x > 10)
    y = 5;
```

با توجه به مقدار x شرط $x > 10$ ممکن است درست یا نادرست باشد و در نتیجه مقدار y می‌تواند متفاوت باشد. در حقیقت این دستور یک گزاره شرطی است. حالت‌های ممکن در مورد مقادیر x و y بصورت زیر است:

گزاره‌ها ۱۱

- اگر مقدار x بزرگ‌تر از ۱۰ باشد، قطعاً مقدار y برابر ۵ خواهد بود.
- اما اگر مقدار x بزرگ‌تر از ۱۰ نباشد، وضعیت مقدار y چه خواهد بود؟ این مقدار می‌تواند هر عددی باشد. در اینجا یک سوال مطرح می‌شود: آیا ممکن است در حالتی که مقدار x بزرگ‌تر از ۱۰ نباشد، مقدار y بعد از اجرای دستورات فوق باز هم ۵ باشد؟ پاسخ مثبت است. زیرا ممکن است قبل از این دستورات y مقدار ۵ داشته باشد. نمایش این دستورات در قالب گزاره به صورت زیر است:

شرط $x > 10$ برقرار باشد.

q : مقدار y برابر ۵ باشد (بعد از اجرای دستورات فوق و در هر شرایطی).

جدول ۱-۱۱.

توضیح			
p	q	$p \rightarrow q$	
F	F	T	اگر شرط $x > 10$ برقرار نباشد، مقدار y می‌تواند ۵ نشود. (یعنی مقدار y قبل از این دستورات مقداری مخالف ۵ بوده است)، و این منطقی است.
F	T	T	اگر شرط $x > 10$ برقرار نباشد، مقدار y می‌تواند ۵ باشد. (یعنی مقدار y قبل از این دستورات ۵ بوده است) و این منطقی است.
T	F	F	اگر شرط $x > 10$ برقرار باشد، قطعاً باید مقدار y برابر ۵ شود. بنابراین بعد از برقراری شرط $x > 10$ احتمال اینکه مقدار y برابر ۵ نشود، محال است.
T	T	T	اگر شرط $x > 10$ برقرار باشد، قطعاً باید مقدار y برابر ۵ شود، و این حالت نیز حالت درستی است.

پس تنها حالتی که در گزاره‌های شرطی با نتیجه F مواجه خواهیم شد، زمانی است که قسمت مقدم درست و قسمت تالی نادرست باشد.

مثال ۱-۸: در قطعه برنامه‌های زیر اگر $m=2, n=3, k=6, x=0$ باشند، آیا دستور $x++$ اجرا خواهد شد؟ (علامت // نشان‌دهنده یا و! نشان‌دهنده نقیض است).

(الف)

(ب)

```
while ( !(m + n) )
    x--;
else
    x++;
```

```
if ( (m < n) || (k > 4) )
    x--;
else
    x++;
```

حل:

الف) دستور $x++$ وقتی اجرا خواهد شد که عبارت $(k > 41) \parallel (m < n)$ دارای ارزش نادرست باشد.

$$(m < n) \parallel (k > 41) \equiv (2 < 3) \vee (6 > 41)$$

$$\equiv T \vee F$$

$$\equiv T$$

از آنجا که این عبارت ارزش درست دارد، بنابراین دستور $x++$ اجرا نخواهد شد.

ب) در این قطعه برنامه $x++$ وقتی اجرا خواهد شد که عبارت $(m + n)!$ ارزش درست نداشته باشد. یعنی $(m + n)!$ برابر F (صفر) باشد، به عبارتی $(m + n)$ برابر T (مخالف صفر) باشد.

$$(m + n) \equiv \neg (2 + 3)$$

$$\equiv \neg (5)$$

$$\equiv \neg T$$

$$\equiv F$$

بنابراین در این قطعه برنامه، دستور $x++$ اجرا خواهد شد.

ک) مثال ۱-۹: اکثر موتورهای جستجوی صفحات وب از تکنیکی به نام "جستجوی بولی" استفاده می‌کنند. این تکنیک جهت پیدا نمودن موضوعات مشخص در صفحات وب استفاده می‌شود.

در جستجوی بولی، پیونددهنده AND برای پیدا کردن رکوردهایی که شامل تمامی موارد مورد جستجو هستند، استفاده می‌شود. در این نوع جستجو از OR برای پیدا کردن رکوردهایی استفاده می‌شود که شامل یک یا چند گزینه مورد جستجو باشد. در روش جستجوی بولی از NOT برای جستجوی رکوردهایی استفاده می‌شود که شامل گزینه مخصوصی نباشد.

به عنوان نمونه اگر کاربری به دنبال اطلاعاتی پیرامون دانشگاه‌های موجود در استان تهران باشد، می‌تواند در جستجوی خود عبارت زیر را به کار برد:

Province AND Tehran AND Universities

نتیجه این جستجو شامل صفحاتی خواهد بود که هر سه کلمه *Province* و *Tehran* و *Universities* در آن‌ها باشد (توجه داشته باشید که در بسیاری از موتورهای

جستجو مانند *Google* استفاده از کلمه AND ضرورتی ندارد و این موتورها به صورت پیش فرض در مورد چندین کلمه مورد جستجو، پیونددهنده AND را به کار می‌برند).

اگر کاربر به دنبال اطلاعاتی پیرامون دانشگاه‌های موجود در استان تهران یا اراک (منظور شهر اراک) باشد می‌تواند عبارت زیر را به کار برد:

(Province AND Tehran OR Arak) AND Universities

با توجه به اینکه اولویت AND از OR بیشتر است، در پراتر اول نیاز به پراتر دیگری برای جدا کردن استان تهران از یک طرف و اراک از طرف دیگر نیست. البته در موتورهای جستجویی مانند *Google* این عبارت به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

(Province Tehran OR Arak) Universities

برای حالت دیگر، تصور نمایید کاربر نیاز به اطلاعاتی در مورد دانشگاه‌های تهران دارد و در این جستجو شهر تهران مدنظر است، نه استان تهران. بنابراین عبارت مورد جستجو می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

(Tehran AND Universities) NOT Province

دقت نمایید در موتور جستجوی *Google* عمل NOT با علامت $"_"$ نشان داده می‌شود. بنابراین عبارت:

Tehran Universities_Province

به دنبال صفحات وبی خواهد گشت که در آن‌ها کلمات تهران و دانشگاه وجود دارد، اما کلمه استان وجود ندارد.

ک) مثال ۱-۲۰: جدول درستی گزاره مرکب $p \vee (\neg q \rightarrow r)$ را رسم نمایید.

حل:

مرحله اول: تشخیص تعداد ردیف‌های مورد نظر و مقدار دهی اولی ردیف‌ها:

در این عبارت سه مؤلفه p ، q و r وجود دارد. در نتیجه جدول درستی دارای 2^3 یعنی ۸ ردیف خواهد بود.

ترتیب قرار دادن مقادیر T و F به این ترتیب است که سمت راست ترین متغیر به صورت یک در میان (2^0)، متغیر بعدی بصورت دو خانه در میان (2^1) و متغیر سوم به صورت ۴ خانه در میان (2^2) مقادیر T و F را به خود خواهند گرفت. اگر ستون دیگری نیز وجود داشت، در آن ستون، ۸ خانه در میان (2^3) مقادیر T و F چیده می‌شود.

مرحله دوم: تشخیص اولویت محاسبات:

با در نظر گرفتن اولویت‌ها در عبارت $p \vee (\neg q \rightarrow r)$ ترتیب محاسبه در جدول درستی به صورت زیر خواهد بود:

- در اولین مرحله عبارت داخل پرانتز می‌بایست ارزیابی شود. برای محاسبه عبارت داخل پرانتز نیز در ابتدا نیاز به ارزیابی $\neg q$ می‌باشد.
- در مرحله بعد ارزیابی عبارت $(\neg q \rightarrow r)$ انجام می‌گیرد.
- در آخر کل عبارت یعنی $p \vee (\neg q \rightarrow r)$ ارزیابی خواهد شد (جدول ۱۲-۱).

جدول ۱۲-۱. جدول درستی گزاره مرکب $p \vee (\neg q \rightarrow r)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \vee (\neg q \rightarrow r)$
F	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T
T	T	T	F	T	T

۴-۱- برخی تعاریف پیرامون گزاره‌ها

در این قسمت گزاره همیشه درست، گزاره همیشه نادرست، گزاره‌های هم‌ارز و گزاره‌های خوش تعریف (WFF) را تعریف خواهیم نمود.

☐ گزاره همیشه درست (راستگو): گزاره‌ای که صرفنظر از ارزش مؤلفه‌های آن، همیشه ارزش T داشته باشد را گزاره همیشه درست گویند.

☐ گزاره همیشه نادرست: گزاره‌ای که صرفنظر از ارزش مؤلفه‌های آن، همیشه ارزش F داشته باشد را گزاره همیشه نادرست گویند.

☐ مثال ۱۱-۱: گزاره $p \vee \neg p$ یک گزاره همیشه درست است. با توجه به جدول درستی این گزاره (جدول ۱۳-۱)، ارزش p هرچه باشد، گزاره $p \vee \neg p$ دارای ارزش درست خواهد بود.

جدول ۱۳-۱.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
F	T	T
T	F	T

☐ مثال ۱۲-۱: گزاره $p \wedge \neg p$ یک گزاره همیشه نادرست است. جدول درستی این گزاره نشان می‌دهد، ارزش p هرچه باشد، گزاره $p \wedge \neg p$ همیشه دارای ارزش نادرست خواهد بود.

جدول ۱۴-۱.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
F	T	F
T	F	F

☐ گزاره‌های هم‌ارز: دو گزاره را هم‌ارز گویند، اگر برای تمام حالت‌های منطقی دارای یک ارزش باشند. گزاره‌های هم‌ارز با علامت $\equiv$ و یا $\equiv$ نشان داده می‌شود.

✍ نکته:

اگر تقیص دوفرمول گزاره‌ای هم‌ارز باشند، خود دو فرمول نیز هم‌ارز هستند.

☐ مثال ۱۳-۱: با توجه به جدول ۸-۱ گزاره‌های $p \rightarrow \neg q$ و $\neg q \rightarrow \neg p$ هم‌ارز هستند.

☐ مثال ۱۴-۱: نشان دهید که هم‌ارزی‌های زیر برقرار هستند:

$$\text{الف) } p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$\text{ب) } p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\text{ج) } \neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \neg q) \equiv (\neg p \leftrightarrow q)$$

$$\text{د) } \neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

حل:

هم‌ارزی‌ها در جداول ۱۵-۱ نشان داده شده است.

جدول ۱۵-۱.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	p	q	$\neg p$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p \vee q$
F	F	T	T	T	T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T

(الف)

(ب)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$
F	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F

(ج)

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	$p \wedge \neg q$
F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	F

(د)

نکته:

طبق مثال ۱۴-۱ گزاره شرطی $p \rightarrow q$ با گزاره فصلی $\neg p \vee q$ هم‌ارز هستند. هم‌چنین طبق این مثال برای نقیض کردن یک گزاره دوشروطی کافی است یکی از مؤلفه‌های آن نقیض شود، یعنی: $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \neg q) \equiv (\neg p \leftrightarrow q)$

گزاره خوش‌تعریف: فرمولی (گزاره‌ای) است که اشکال گرامری نداشته باشد. یک فرمول خوش‌تعریف متشکل از گزاره‌نماها، رابط‌ها و پرانتزها است که بصورت بازگشتی به‌فرم زیر تعریف می‌شود:

(۱) هر گزاره‌نما یک فرمول خوش‌تعریف است.

(۲) اگر p یک گزاره‌نما باشد آن‌گاه $\neg p$ نیز یک فرمول خوش‌تعریف است.

(۳) اگر p و q هر دو فرمول خوش‌تعریف باشند، آن‌گاه $p \vee q$ ، $p \wedge q$ و $p \leftrightarrow q$ نیز فرمول خوش‌تعریف هستند.

مثال ۱۵-۱: گزاره $p \rightarrow q \wedge r$ خوش‌تعریف نیست ولی $p \rightarrow (q \wedge r)$ خوش‌تعریف است.

۱-۵- خواص گزاره‌ها

دوگان یک گزاره: اگر در یک گزاره همه ترکیب‌های فصلی (عطفی) به عطفی (فصلی) تبدیل شوند و همچنین همه T ها به F ها و برعکس تبدیل شوند، در این صورت دوگان یا همزاد آن گزاره بدست می‌آید.

در مورد گزاره‌ها خواصی وجود دارد که این خواص به صورت خلاصه در جدول زیر دسته‌بندی شده است. در این جدول با توجه به تعریف دوگان گروه اول و گروه دوم دوگان یکدیگر هستند.

جدول ۱۶-۱. خواص گزاره

گروه اول	گروه دوم	خاصیت
$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$	خود توانی
$p \vee F \equiv p$	$p \wedge T \equiv p$	عضو همانی (خشی)
$p \vee T \equiv T$	$p \wedge F \equiv F$	عضو صفر (غلبه)
$p \vee \neg p \equiv T$	$p \wedge \neg p \equiv F$	عضو مکمل (وارون)
$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	جابجایی
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	شرکت پذیری
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	توزیع پذیری (بخشی)
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	جذب
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	دمورگان
$\neg\neg p \equiv p$		نقیض مضاعف

حل:

جدول ۱۸-۱

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow r$
F	F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T

با توجه به ستون آخر جدول درستی، این گزاره استلزام منطقی است.

۷-۱ - استنتاج

تعریف استنتاج: اگر با داشتن گزاره‌های درست $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ بتوان درستی گزاره q را نتیجه گرفت، گویند استنتاج $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ معتبر است و در غیر این صورت معتبر نیست. استنتاج فوق به صورت زیر نشان داده می‌شود:

 p_1
 p_2
 p_n
 $\therefore q$

 گاهی استنتاج به صورت $p_1, p_2, \dots, p_n \vdash q$ نیز نشان داده می‌شود.

۱-۷-۱ - قوانین مهم استنتاج

در این قسمت قوانین مهم استنتاج بیان می‌شود. این قوانین براساس عملگر مربوطه دسته‌بندی شده‌اند.

۶-۱ - استلزام منطقی

استلزام منطقی: اگر p و q گزاره‌های دلخواه باشند به طوری که $p \rightarrow q$ همیشه درست باشد، آن‌گاه گویند که p به طور منطقی مستلزم q است و به صورت $p \Rightarrow q$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۶-۱: فرض کنید، گزاره‌های زیر وجود دارند:

- p : علی مطالعه می‌کند.
- q : علی تنیس بازی می‌کند.
- r : علی در امتحان گسسته قبول می‌شود.
- حال گزاره‌های مرکب زیر را در نظر بگیرید:
- اگر علی مطالعه کند، آن‌گاه در امتحان گسسته قبول می‌شود ($p \rightarrow r$).
- اگر علی تنیس بازی نکند، آن‌گاه مطالعه خواهد نمود ($\neg q \rightarrow p$).
- علی در امتحان گسسته رد شد ($\neg r$).

آیا فرمول گزاره‌ای $q \rightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r)$ استلزام منطقی هست؟
برای این منظور جدول درستی این فرمول گزاره‌ای رسم می‌شود:

جدول ۱۷-۱

p	q	r	$p \rightarrow r$	$\neg q \rightarrow p$	$\neg r$	$((p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r) \rightarrow q$
F	F	F	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F	T
T	T	F	F	T	T	F
T	T	T	T	T	F	T

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، این گزاره شرطی همیشه درست است. بنابراین فرمول گزاره‌ای فوق یک استلزام منطقی است.

مثال ۱۷-۱: نشان دهید گزاره زیر یک استلزام منطقی است.

$$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow r$$

• قوانین ترکیبات عطفی:

(۱) ترکیب عطفی	(۲) ساده‌سازی عطفی	(۳) ساده‌سازی عطفی
$\frac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$	$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$\frac{p \wedge q}{\therefore q}$

• قوانین ترکیبات فصلی:

(۴) ادخال فاصل	(۵) ادخال فاصل	(۶) قیاس فصلی
$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$\frac{q}{\therefore p \vee q}$	$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$

• قوانین ترکیبات شرطی:

(۷) انتزاع	(۸) نقیض انتزاع	(۹) قاعده تناقض	(۱۰) قانون تعدی	(۱۱) اثبات بوسیله حالات
$\frac{p \rightarrow q \quad p}{\therefore q}$	$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\therefore \neg p}$	$\frac{\neg p \rightarrow F}{\therefore p}$	$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$	$\frac{p \rightarrow r \quad q \rightarrow r}{\therefore (p \vee q) \rightarrow r}$

کمال مثال ۱-۱۸: نشان دهید استنتاج‌های زیر برقرار می‌باشند.

(الف)

$$\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad p \wedge q}{\therefore r}$$

(ب)

$$\frac{p \rightarrow q \quad r \rightarrow s \quad \neg q \vee \neg s}{\therefore \neg p \vee \neg r}$$

(د)

$$\frac{p \rightarrow q \quad r \rightarrow s \quad p \vee r}{\therefore q \vee s}$$

حل:

(الف)

$$\begin{array}{llll} \text{I)} & \text{II)} & \text{III)} & \text{IV)} \\ p \wedge q & p \wedge q & \frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad p}{\therefore q \rightarrow r} & \frac{q \rightarrow r \quad q}{\therefore r} \\ \therefore q & \therefore p & & \end{array}$$

(ب)

$$\begin{array}{lllll} \text{I)} & \text{II)} & \text{III)} & \text{IV)} & \text{V)} \\ \neg q \vee \neg s & r \rightarrow s & \frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow s}{\therefore p \rightarrow s} & \frac{p \rightarrow s \quad \neg s \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r} & \frac{p \rightarrow r \quad p}{\therefore r} \\ \therefore q \rightarrow s & \therefore \neg s \rightarrow r & \therefore p \rightarrow s & \therefore p \rightarrow r & \therefore \neg p \vee r \end{array}$$

(ج)

$$\begin{array}{lllll} \text{I)} & \text{II)} & \text{III)} & \text{IV)} & \text{V)} \\ r \vee p & \frac{r \rightarrow p \quad p \rightarrow q}{\therefore r \rightarrow q} & \frac{r \rightarrow s}{\therefore \neg s \rightarrow r} & \frac{\neg s \rightarrow r \quad \neg r \rightarrow q}{\therefore \neg s \rightarrow q} & \frac{\neg s \rightarrow q \quad s \vee q}{\therefore s \vee q} \end{array}$$

کمال مثال ۱-۱۹: گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

- اگر محمد خوب درس بخواند، ساختمان گسسته را پاس خواهد نمود.
- محمد درس ریاضی مهندسی را پاس نموده است.
- اگر محمد ساختمان گسسته را پاس نماید، می‌تواند در ترم آینده سیستم عامل را اخذ نماید.
- محمد ساختمان گسسته را پاس ننموده است.
- حال سوال اینجاست که آیا می‌توان گزاره‌های زیر را استنتاج نمود (یعنی می‌توان در مورد درستی گزاره‌های زیر نتیجه‌گیری نمود)؟
- الف) محمد خوب درس خوانده است.

- (ب) محمد در ترم آینده سیستم عامل را اخذ خواهد نمود.
حل:

با نامگذاری گزاره‌ها خواهیم داشت:

p : محمد خوب درس بخواند.

q : محمد درس ساختمان گسته را پاس نماید.

r : محمد ریاضی مهندسی را پاس نماید.

s : محمد ترم آینده سیستم عامل را اخذ نماید.

با این نامگذاری گزاره‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \\ q \rightarrow s \\ \neg q \end{array}$$

برای بررسی اعتبار استنتاج داریم:

(الف)

$$\begin{array}{ll} I) & II) \\ p \rightarrow q & \neg q \rightarrow \neg p \\ \neg q \rightarrow \neg p & \neg q \\ \hline \therefore \neg q \rightarrow \neg p & \therefore \neg p \end{array}$$

بنابراین استنتاج معتبر نیست.

(ب)

$$\begin{array}{l} I) \\ q \rightarrow s \\ \neg q \\ \hline \therefore ? \end{array}$$

توجه نمایید که ارزش گزاره q نادرست و ارزش $q \rightarrow s$ درست است. با این بیان، نمی‌توان در مورد درست بودن یا نبودن گزاره s نتیجه‌گیری نمود. در نتیجه در مورد اعتبار استنتاج نمی‌توان نظر داد.

مثال ۱-۲۰: آیا استنتاج زیر معتبر است؟

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \neg q \rightarrow \neg p \\ p \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore r$$

حل:

$$\begin{array}{ll} I) & II) \\ p \rightarrow (q \rightarrow r) & q \rightarrow r \\ p & q \\ \hline \therefore q \rightarrow r & r \end{array}$$

استنتاج معتبر است.

مثال ۱-۲۱: آیا استنتاج زیر معتبر است؟

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ p \rightarrow (q \vee \neg r) \\ \neg q \vee \neg s \\ p \\ \hline \therefore s \end{array}$$

حل:

$$\begin{array}{llll} I) & II) & III) & IV) \\ p \rightarrow (q \vee \neg r) & p \rightarrow r & q \vee \neg r & \neg q \vee \neg s \\ p & p & r & q \\ \hline \therefore q \vee \neg r & \therefore r & \therefore q & \therefore \neg s \end{array}$$

استنتاج معتبر نیست.

۸-۱- روش‌های دیگر اثبات

هدف از اثبات یک قضیه این است که با استفاده از اصول، تعاریف و قضایای مقدماتی مطرح شده به انضمام نتایج آنها، درستی آن قضیه را بیان نمائیم. اکثر قضایای مقدماتی به صورت یک گزاره همیشه درست بیان می‌شوند. یکی از شیوه‌های مرسوم برای اثبات قضیه، استنتاج است که در بخش قبل بیان شد. در این قسمت برخی شیوه‌های متداول دیگر معرفی می‌شوند.

۸-۱-۱ روش غیرمستقیم

پایه و اساس این شیوه براین استوار است که هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم

ارز است. یعنی $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ در بعضی قضایا، اثبات عکس نقیض از اثبات قضیه اصلی راحت‌تر است؛ بنابراین از این روش برای اثبات آن استفاده می‌شود.

کله مثال ۱-۲۲: فرض کنید n یک عدد صحیح است. نشان دهید اگر n^2 فرد باشد آن‌گاه n نیز فرد است.

حل:

گزاره‌های p و q به صورت زیر فرض می‌شوند:

• $p: n^2$ فرد است.

• $q: n$ فرد است.

می‌خواهیم بررسی نماییم آیا $p \rightarrow q$ درست است؟ کافی است نشان دهیم $\neg q \rightarrow \neg p$ همواره درست است. فرض کنید n فرد نباشد، بنابراین n زوج است، پس عدد صحیح k موجود است که $n=2k$ و داریم: $n^2=(2k)^2=2(2k^2)$ پس n^2 زوج است. بنابراین چون عکس نقیض این شرط برقرار است، خود آن نیز برقرار است.

۲-۸-۱- برهان خلف

این روش، یکی از روش‌های مهم اثبات است. در این روش درستی فرض‌ها تغییر نمی‌کند، بلکه فرض می‌کنیم تالی نادرست باشد و آنرا به عنوان یک فرض جدید به فرض‌های قبلی مسأله اضافه می‌کنیم. کافی است نشان دهیم با فرض‌های جدید، فرمول گزاره‌ای همواره نادرست است.

کله مثال ۱-۲۳: با استفاده از برهان خلف نشان دهید، اگر ۲۲ روز در نظر گرفته شود، حداقل ۴ روز از آنها در یک روز هفته خواهند بود.

حل:

گزاره p را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

p حداقل ۴ روز از ۲۲ روز انتخابی در یک روز هفته خواهند بود.

فرض کنید $\neg p$ درست باشد، یعنی حداکثر ۳ روز از ۲۲ روز انتخابی در یک روز هفته باشند.

از آنجا که در هفته ۷ روز وجود دارد، در نتیجه با انتخاب ۲۱ روز، حداکثر ۳ روز در یک روز هفته قرار خواهند گرفت. این مخالف فرض اولیه است. یعنی اگر ۳ انتخاب ۲۲ روز در نظر گرفته شود، ما نشان داده‌ایم که $p \rightarrow (r \wedge \neg p)$. بنابراین p درست است، یعنی در ۲۲ روز، حداقل ۴ روز در یک روز هفته خواهند بود.

۱-۸-۳- استقرای ریاضی

یکی دیگر از روش‌های اثبات، استفاده از استقرای ریاضی است. گزاره‌هایی مانند "برای هر عدد طبیعی n مجموع اولین n عدد فرد برابر n^2 است"، گزاره‌هایی هستند که در آن جهان مورد بحث اعداد طبیعی است. اصل استقرای ریاضی، قاعده‌ای در اختیار می‌دهد که می‌توان عباراتی نظیر عبارت بالا را اثبات نمود.

☑ قضیه ۱-۱: اصل استقرای ریاضی: فرض کنید $S(n)$ یک گزاره ریاضی باشد که در آن n یک عدد صحیح مثبت را نشان می‌دهد که یک یا چندبار ظاهر شده باشد.

الف) اگر $S(1)$ درست باشد و

ب) اگر (به ازای k خاص ولی دلخواه از $\mathbb{Z}^+$) $S(k)$ درست باشد، آن‌گاه $S(k+1)$ نیز درست باشد،

آن‌گاه $S(n)$ به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ درست است.

اثبات در منبع [۴]، قضیه ۴-۱ بیان شده است.

کله مثال ۱-۲۴: به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ ثابت کنید: $\sum_{i=1}^n i = 1+2+\dots+n = n(n+1)/2$.

حل:

به ازای $n=1$ گزاره فوق تبدیل به $1(1+1)/2=1$ می‌شود. در نتیجه $S(1)$ درست است.

فرض کنیم نتیجه بالا برای $n=k$ برقرار باشد، می‌خواهیم نشان دهیم $S(k+1)$ نیز برقرار است. یعنی باید اثبات شود:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

داریم:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+\dots+k+(k+1) = \sum_{i=1}^k i + (k+1) \\ = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

یعنی $S(k+1)$ نیز برقرار است، در نتیجه $S(n)$ به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ درست است.

مثال ۱-۲۵: هنگام بررسی کیفیت برنامه کامپیوتری، یکی از نخستین مسائل این است که آیا این برنامه کاربردی به درستی فعالیت مورد انتظار را انجام می‌دهد یا خیر؟ یکی از روش‌هایی که می‌تواند در اینگونه بررسی‌ها نقشی اساسی بازی کند، استقرای ریاضی است. فرض کنید، قطعه برنامه پاسکال زیر موجود باشد:

```
while n <> 0 do
  begin
    x := x * y;
    n := n - 1;
  end;
answer := x;
```

این برنامه، جواب xy^n را برای متغیرهای حقیقی x و y که در آن n عدد صحیح نامنفی است را تولید می‌کند (مقادیر سه متغیر x و y و n به وسیله کاربر مشخص شده است). درستی این جواب را با استفاده از استقرا تحقیق نمایید.

حل:

به ازای $n=0$ شرط حلقه برآورده نمی‌شود، در نتیجه دستورات داخل حلقه اجرا نمی‌شود و فقط x به $answer$ نسبت داده می‌شود که در حقیقت $answer = x = xy^0$ خواهد بود. در نتیجه $S(0)$ درست است.

حال، فرض کنیم $S(k)$ به ازای عدد صحیح نامنفی $k < n$ درست باشد، یعنی $answer = xy^k$ در مورد $S(k+1)$

$$(k+1) \text{ مقدار } x \text{ در مرحله } k = (xy^k) \times y = xy^{(k+1)} \\ \text{مقدار } x \text{ در مرحله } k \text{ ام}$$

گزاره‌ها ۲۷

قضیه ۱-۲: اصل استقرای متناهی (استقرای قوی): فرض کنید $S(n)$ یک گزاره ریاضی باشد که حاوی یک یا چندبار حضور متغیر صحیح و مثبت n است؛ هم‌چنین فرض کنید $n, n_1 \in \mathbb{Z}^+$ و $n \leq n_1$.

الف) اگر $S(n), S(n+1), S(n+2), \dots, S(n_1-1)$ و $S(n_1)$ درست باشد و

ب) اگر به ازای k ای خاص ولی دلخواه از $\mathbb{Z}^+$ و $k \geq n_1$ وقتی $S(n), S(n+1), S(n+2), \dots, S(k-1)$ و $S(k)$ درست باشند، آن‌گاه $S(k+1)$ نیز درست باشد، آن‌گاه $S(n)$ به‌ازای هر $n \geq n_1$ درست است.

اثبات در منبع [۴]، قضیه ۲-۴ بیان شده است.

مثال ۱-۲۶: یک ویروس کامپیوتری پس از گذشت n ساعت، تعداد p_n کامپیوتر را آلوده نموده است. اگر $p_1=7$ و $p_2=3$ و به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم: $p_n = 2^{n+2}p_{n-1} - 2p_{n-2}$ با استفاده از استقرای ریاضی قوی نشان دهید که $p_n = 2^{n+2} - 1$ حل:

$$S(0): p_0 = 2^{0+2} - 1 = 3$$

$$S(1): p_1 = 2^{1+2} - 1 = 7$$

این دو درست هستند. با این فرض که به ازای عددی مانند $k \in \mathbb{Z}^+$ که در آن $k \geq 1$ است، گزاره‌های $S(0), S(1), S(k-1)$ و $S(k)$ درست هستند، حالت $n=k+1 \geq 2$ را در نظر می‌گیریم:

$$p_{k+1} = 2p_k - 2p_{k-1} \\ = 2(2^{k+2} - 1) - 2(2^{(k-1)+2} - 1) \\ = 2 \times 2^{k+2} - 2 - 2^{(k-1)+2} + 2 \\ = 2 \times 2^{k+2} - 2^{(k-1)+2} - 1 \\ = 2(2^{k+2}) - 1 = 2^{(k+1)+2} - 1$$

در نتیجه، بنابراین اصل استقرای قوی، $S(n)$ به ازای هر $n \geq 0$ درست است.

۱-۹- سورها

در بخش‌های قبل گزاره‌ها تعریف شد و بیان شد که یک گزاره‌ها با جایگزینی مقادیر برای متغیرها تبدیل به گزاره می‌شود. در این قسمت به معرفی سورها خواهیم پرداخت.

عالم سخن: مقادیر مجازی که متغیرهای یک گزاره‌ها می‌توانند اخذ نمایند را عالم سخن گویند.

۱-۲۷: به چند مثال از عالم سخن توجه نمایید.

- در گزاره‌های "x عددی اول است" می‌توان عالم سخن را اعداد طبیعی در نظر گرفت.
- در گزاره‌های "x قابلیت اجرای برنامه‌های گرافیکی قوی را دارد" عالم سخن می‌تواند کامپیوترها در نظر گرفته شود.
- در گزاره‌های "x فانی است" عالم سخن می‌تواند مجموعه انسان‌ها باشد.

مجموعه جواب: زیرمجموعه‌ای از عالم سخن که گزاره‌ها را تبدیل به گزاره با ارزش درست می‌نماید، مجموعه جواب نامیده می‌شود.

۱-۲۸: به چند نمونه از مجموعه جواب توجه نمایید.

- در گزاره‌های "x عددی اول است" مجموعه جواب اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ... می‌باشد.
- در گزاره‌های "x قابلیت اجرای برنامه‌های گرافیکی قوی را دارد" مجموعه جواب کامپیوترهایی یا کارت گرافیکی قوی مانند ۲۵۰ Gforce و ۶۰۰ Ati می‌باشد.
- در گزاره‌های "x فانی است" مجموعه جواب، همه انسان‌ها می‌باشد.

گزاره‌های دو متغیره: فرض کنید $p(x, y)$ یک جمله شامل دو متغیر x و y باشد و این دو متغیر متعلق به عالم سخن باشند، اگر با قرار دادن دو مقدار از عالم سخن به جای x و y جمله $p(x, y)$ تبدیل به گزاره شود، آن‌گاه $p(x, y)$ را گزاره‌های دو متغیره نامند.

۱-۲۹: گزاره‌های زیر در نظر بگیرید:

- $p(x)$: x عددی اول است (عالم سخن اعداد طبیعی).
 - $q(x, y)$: $x+2y$ عدد زوج است (عالم سخن اعداد صحیح).
- در این گزاره‌ها یا جایگذاری مقادیری برای متغیرها خواهیم داشت:
- $p(5)$: ۵ عددی اول است. (با ارزش درست)
- $p(7)$: ۷ عددی اول نیست. (با ارزش نادرست)
- $q(2, 3)$: $8=3 \times 2 + 2$ عدد زوج است. (با ارزش درست)
- $q(1, 1)$: $3=1 \times 2 + 1$ عدد زوج نیست. (با ارزش درست)

در هر دو مورد $p(x)$ و $q(x, y)$ برخی از جایگذاری‌های به گزاره‌های درست و برخی دیگر به نادرست منجر می‌شوند. بنابراین می‌توان گزاره‌های درست زیر را ساخت:

(۱) به ازای x ، $p(x)$

(۲) به ازای x و y ، $q(x, y)$

سور وجودی: در گزاره ۱ عبارت "به ازای x " به کار رفته است، که می‌توان آن را به صورت "به ازای حداقل یک x " یا "بهای وجود دارد به طوری که" نیز بیان کرد. به این دسته از عبارت‌ها سور وجودی گویند. در قالب نماد، گزاره ۱ به صورت $\exists x p(x)$ نوشته می‌شود.

سور عمومی: سور عمومی با $\forall$ نشان داده می‌شود و به صورت "به ازای همه x " یا "به ازای هر x " بیان می‌شود.

سور صفر: سور صفر با $\nexists$ نشان داده می‌شود و به صورت "به ازای هیچ مقدار x " بیان می‌شود.

 ۱-۳۰: گزاره‌های زیر را در عالم سخن مجموعه اعداد حقیقی (R) در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} p(x): x \geq 0 & q(x): x^2 \geq 0 \\ r(x): x^2 - 3x - 4 = 0 & s(x): x^2 - 3 > 0 \end{array}$$

آن‌گاه گزاره‌های زیر درست هستند:

- $\forall x q(x)$: زیرا به ازای هر عدد حقیقی، مربع آن همواره مثبت است.
- $\exists x [p(x) \wedge r(x)]$: کافی است عدد حقیقی وجود داشته باشد که به ازای آن گزاره‌های p و r درست باشند. به عنوان مثال هر دو گزاره به ازای $x=4$ درست هستند.
- $\forall x r(x)$: این گزاره به ازای تمام اعداد حقیقی درست نیست. به عنوان نمونه $r(0)$ نادرست است، اما $r(-1)$ و $r(4)$ درست هستند. بنابراین ارزش این گزاره نادرست است.
- $\forall x p(x) \rightarrow s(x)$: این گزاره به ازای تمام اعداد حقیقی درست نیست. به عنوان نمونه $p(1)$ درست و $s(1)$ نادرست است؛ و در گزاره شرطی مقدم درست و تالی نادرست ارزش کل گزاره را نادرست خواهد نمود.

۱-۹-۱- ترکیب سورها

گاهی در یک گزاره‌نما ممکن است بیش از یک سور به کار رود. جملات زیر را در نظر بگیرید:

- برای هر x و برای هر y داریم: $x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)
- برای هر x وجود دارد y به طوریکه: $x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)
- یک x وجود دارد به طوریکه برای هر y داریم: $x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)
- یک x وجود دارد و یک y وجود دارد به طوریکه: $x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)

جملات فوق با استفاده از سورها به صورت زیر نوشته می‌شوند:

- $\forall x, \forall y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)
- $\forall x, \exists y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)
- $\exists x, \forall y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)
- $\exists x, \exists y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)

نکته:

ارزش سور عمومی هنگامی درست است که مجموعه جواب تمامی مجموعه عالم سخن باشد. در سور وجودی وقتی مجموعه جواب تهی نباشد، ارزش سور درست

خواهد بود. سور صفر نیز هنگامی ارزش درست دارد که مجموعه جواب تهی باشد.

کج مثال ۱-۳۱: ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

- (الف) $\forall x, \forall y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)
- (ب) $\forall x, \exists y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)
- (ج) $\exists x, \forall y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)
- (د) $\exists x, \exists y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)

حل:

گزاره‌های (الف) و (ج) دارای ارزش نادرست و سورهای (ب) و (د) ارزش درست دارند.

نکته:

سورها خاصیت جابجایی ندارند. به عنوان مثال، فرض کنید $P(x,y)$ گزاره‌نمایی مشتمل بر دو متغیر x و y باشد.

- عبارت $\forall x \exists y: p(x,y)$ اینگونه خوانده می‌شود: "به ازاء تمام x ها، عدد y ای وجود دارد که رابطه $p(x,y)$ برقرار است."
- عبارت $\exists y \forall x: p(x,y)$ به این معنی است که: "یک عدد y برای تمام مقادیر x وجود دارد که رابطه $p(x,y)$ برقرار است."

ملاحظه می‌شود که این دو عبارت دارای دو مفهوم کاملاً متفاوت می‌باشند به طوری که در عبارت دوم y مستقل از مقادیر x است، در حالیکه در عبارت اول، مقدار y کاملاً وابسته به x انتخاب می‌شود.

نکته:

پرانتز، کروش، آکولادها در حوزه تعریف سورها می‌باشند.

کج مثال ۱-۳۲: عبارات مقابل چگونه خوانده می‌شوند؟

$$\forall x \exists y [p(x,y) \rightarrow q(x,y) \wedge r(y)]$$

$$\forall x [\forall y \neg p(x,y) \rightarrow r(x)]$$

حل:

$\forall x \exists y [p(x,y) \rightarrow q(x,y) \wedge r(y)]$ برای هر x وجود دارد y ای که اگر خاصیت $p(x,y)$ برقرار باشد، آن‌گاه خواص $q(x,y)$ و $r(y)$ هر دو برقرار خواهند بود.
 $\forall x [\forall y \neg p(x,y) \rightarrow r(y)]$ اگر $\forall x$ برقرار نباشد، آن‌گاه $r(y)$ برقرار است. در اینجا بدون وجود هیچ ابهامی می‌توان سورها را حذف نماییم.

که مثال ۱-۳۳: در قطعه برنامه به زبان C زیر، n متغیری صحیح و متغیر A آرایه‌ای از ۲۰ مقدار صحیح باشد، به‌طوری‌که:

$for (n=0; n<20; n++)$

$A[n]=n \times n - n;$

گزاره‌های زیر درباره آرایه A را می‌توان به‌صورت زبان گزاره‌ها بیان کرد.

الف) هر درایه این آرایه نامنفی است:

$$\forall n \quad A[n] \geq 0$$

ب) عدد صحیح $A[19]$ بزرگ‌ترین درایه این آرایه است:

$$\forall n \quad [(0 \leq n \leq 19) \rightarrow (A[n] < A[19])]$$

ج) دو درایه متوالی در A وجود دارند به‌طوری‌که درایه بزرگ‌تر دو برابر درایه کوچک‌تر است:

$$\exists n \quad A[n+1] = 2A[n]$$

د) درایه‌های این آرایه به‌طور اکیداً صعودی مرتب شده‌اند:

$$\forall n \quad [(0 \leq n \leq 19) \rightarrow (A[n] < A[n+1])]$$

ه) درایه‌های این آرایه متمایزند:

$$\forall m \quad \forall n \quad [(m \neq n) \rightarrow (A[m] \neq A[n])]$$

۱-۹-۲- نقیض سور

گزاره دارای سور را نیز می‌توان مانند گزاره معمولی نقیض نمود. روابط بین گزاره‌های سوردار و نقیض آنها در جدول ۱-۱۹ نشان داده شده است.

جدول ۱-۱۹. ارتباط گزاره‌های سوردار و نقیض آنها

گزاره سوردار	چه وقت درست است؟	چه وقت نادرست است؟	نقیض گزاره
$\exists x p(x)$	به ازای حداقل یک مقدار مجاز $p(x)$ برقرار باشد.	به ازاء هر مقدار مجاز $p(x)$ برقرار نباشد.	$\neg \forall x p(x)$
$\forall x p(x)$	به ازای هر مقدار مجاز، $p(x)$ برقرار باشد.	به ازاء حداقل یک مقدار مجاز $p(x)$ برقرار نباشد.	$\exists x \neg p(x)$
$\exists x p(x)$	مقدار مجازی وجود ندارد که $p(x)$ برقرار باشد.	مقدار مجازی وجود دارد که $p(x)$ برقرار باشد.	$\neg \exists x p(x)$

به عنوان مثال، گزاره سوردار "هر دانشجوی کلاس، درس ریاضی را پاس نموده است." را در نظر بگیرید. اگر گزاره $p(x)$ گزاره "درس ریاضی را پاس نموده است" باشد، آن‌گاه $\forall x p(x)$.

نقیض این گزاره به صورت "این طور نیست که هر دانشجوی کلاس، درس ریاضی را پاس نموده باشد" است. یعنی دانشجویی در این کلاس وجود دارد که درس ریاضی را پاس ننموده باشد: $\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$ بنابراین: $\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$

که مثال ۱-۳۴: نقیض گزاره سوردار زیر را بدست آورید.

$$\begin{aligned}
 \neg (\forall x \exists y \quad x+y=4 \rightarrow x>3) &\equiv \exists x \neg (\exists y \quad x+y=4 \rightarrow x>3) \\
 &\equiv \exists x \forall y \neg (x+y=4 \rightarrow x>3) \\
 &\equiv \exists x \forall y (x+y=4 \wedge x \leq 3)
 \end{aligned}$$

۱-۹-۳- اثبات درستی گزاره‌های سوردار

اکثر قضیه‌های ریاضی به صورت گزاره‌های سوردار می‌باشند. به عنوان مثال "برای هر عدد طبیعی n مجموع اولین n عدد فرد برابر است با n^2 ". بنابراین همان‌طور که برای اثبات درستی یک گزاره بدون سور از قواعد مستتاج استفاده می‌شود، برای گزاره‌های سوردار نیز این قواعد معتبر است.

چهار قانون مهم استتاج وجود دارد که با استفاده از آنها و شرایط خاص می‌توان از گزاره‌های سوردار به گزاره‌های بدون سور و برعکس رسید. این چهار قانون در جدول ۱-۲۰ نشان داده شده‌اند. در این جدول فرض کنید x یک متغیر دلخواه، c یک مقدار ثابت متعلق به عالم سخن و $p(x)$ یک گزاره‌نما باشد.

جدول ۱-۲۰. قوانین استتاج گزاره‌های سوردار

$\forall x p(x)$ ----- $\therefore p(c)$	هر عضو دلخواه c
$p(c)$ ----- $\therefore \forall x p(x)$	هر عضو دلخواه c
$\exists x p(x)$ ----- $\therefore p(c)$	برای یک عنصر c
$p(c)$ ----- $\therefore \exists x p(x)$	برای یک عنصر c

کله مثال ۱-۳۵: فرض کنید گزاره‌های $p(x)$ ، $g(x)$ ، $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

- $f(x)$ x پرند است.
- $g(x)$ x گنجشک است.
- $p(x)$ x پر دارد.

آیا از گزاره‌های "تمام پرندگان پر دارند" و "تمام گنجشکان پرند هستند"، گزاره "تمام گنجشکان پر دارند" استتاج می‌شود؟

حل:

صورت سؤال به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$(۱): \forall x [f(x) \rightarrow p(x)]$$

$$(۲): \forall x [g(x) \rightarrow f(x)]$$

$$\therefore \forall x [g(x) \rightarrow p(x)]$$

با توجه به قوانین استتاج برای هر c دلخواه داریم: $f(c) \rightarrow p(c)$ و $g(c) \rightarrow f(c)$ و از قانون تعدی $g(c) \rightarrow p(c)$ را برای هر c دلخواه نتیجه می‌گیریم: $\forall x [g(x) \rightarrow p(x)]$

چند نمونه مسأله حل شده

۱. فرض کنید p, q, r, s گزاره‌های زیر را نشان می‌دهند:

- p : نوشتن برنامه کامپیوتری را قبل از ناهار به پایان می‌رسانم.
- q : بعد از ظهر تنیس بازی می‌کنم.
- r : خورشید می‌درخشد.
- s : رطوبت پایین است.

گزاره‌های زیر را در قالب نماد بنویسید:

الف- اگر خورشید بدرخشد، امروز بعد از ظهر تنیس بازی خواهیم کرد.

ب- به پایان رسیدن برنامه کامپیوتری من قبل از ناهار، برای تنیس بازی کردن امروز بعد از ظهر لازم است.

ج- کافی است رطوبت پایین باشد و آفتاب بدرخشد تا امروز بعد از ظهر تنیس بازی کنم.

حل:

الف- $r \rightarrow q$

ب- $q \rightarrow p$

ج- $s \wedge r \rightarrow q$

۲. جملات زیر را به صورت گزاره بنویسید:

الف) این کتاب جالب است اما تمرین‌هایش مشکل است.

ب) این کتاب جالب است، اما موضوعات آن مشکل است.

ج) این کتاب جالب نیست، تمرین‌ها مشکل است اما موضوعات آن مشکل نیست.

د) اگر این کتاب نجالب است و تمرین‌های آن مشکل نیست، پس موضوع آن مشکل نیست.

ه) اینکه کتاب جالب است به این معنی است که موضوع کتاب مشکل نیست و برعکس.

و) موضوع کتاب مشکل نیست، اما این کتاب جالب است و تمرین‌های آن مشکل است.

ز) موضوع کتاب مشکل نیست، اما تمرین‌های آن مشکل است.

ح) یا این کتاب جالب است یا اینکه موضوع آن مشکل است.

حل:

ابتدا گزاره‌ها نامگذاری می‌شوند:

p : کتاب جالب است.

q : تمرین‌های کتاب مشکل است.

r : موضوع کتاب مشکل است.

الف) $p \wedge q$ ب) $p \wedge r$ ج) $\neg p \wedge q \wedge \neg r$ د) $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$
 ه) $p \leftrightarrow \neg r$ و) $\neg r \wedge p \wedge q$ ز) $\neg r \wedge q$ ح) $p \oplus r$

۳. در گزاره‌های زیر تشخیص دهید: کلمه "یا" به کار گرفته شده، ترکیب فصلی را نشان می‌دهد یا نشان‌دهنده XOR است؟

الف) به همراه غذا قهوه یا چای سرو می‌شود.

ب) رمز عبور می‌تواند یک عدد با حداقل ۳ رقم باشد، یا اینکه یک کلمه با حداقل ۸ کاراکتر باشد (کاراکتر، هر علامت قابل نمایش در کامپیوتر است).

ج) برای خرید می‌توانید از پول نقد یا چک پول استفاده نمایید.

د) برای استخدام تجربه برنامه نویسی به زبان $C++$ یا $Java$ مورد نیاز است.

ه) برای اخذ درس ساختمان گسسته، باید درس ریاضی ۱ یا یکی از دروس کامپیوتر را پاس کرده باشید.

حل:

الف) XOR است. زیرا یکی از این دو سرو می‌شود.

ب) ترکیب فصلی است. زیرا کلمه ۸ حرفی می‌تواند شامل عدد هم باشد.

ج) ترکیب فصلی است، زیرا خریدار ممکن است ترکیبی از این دو را نیز استفاده نماید.

د) ترکیب فصلی است، زیرا ممکن است یک متقاضی هر دو مهارت را نیز داشته باشد.

ه) ترکیب فصلی است. زیرا ممکن است دانشجو هم درس ریاضی ۱ و هم یک درس کامپیوتر را پاس کرده باشد.

۴. گزاره $p(n)$ به ازای تمام اعداد صحیح به صورت زیر تعریف می‌شود:

• $p(0)$ درست است.

• اگر $p(n)$ درست باشد، آن گاه $p(2n)$ درست است.

• اگر $p(n)$ درست باشد، آن گاه $p(n-4)$ درست است.

درستی گزاره‌های زیر را بررسی نمایید.

الف) $p(n)$ به ازای تمام اعداد مثبت زوج درست است.

ب) اگر $p(2)$ درست باشد، آن گاه $p(n)$ برای تمام اعداد مثبت زوج درست است.

ج) $p(n)$ به ازای تمام اعداد منفی زوج درست است.

د) اگر $p(10)$ درست باشد، آن گاه $p(n)$ برای تمام اعداد منفی زوج درست است.

حل:

الف) با فرض اینکه $p(0)$ درست باشد، آن گاه گزاره‌های $p(-4), p(-8), p(-12), \dots$ صحیح خواهند بود، ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که این گزاره، به ازای تمام اعداد مثبت درست است.

ب) اگر $p(2)$ درست باشد، $p(4), p(8), p(16), \dots$ درست خواهند بود. گزاره‌هایی مانند $p(6)$ و $p(10)$ وضعیت مشخصی ندارند. بنابراین نمی‌توان نتیجه گرفت که این گزاره به ازای تمامی اعداد مثبت زوج درست خواهد بود.

ج) با فرض درست بودن $p(0)$ گزاره‌های $p(-4), p(-8), p(-12), \dots$ درست خواهند بود؛ و این شامل تمام اعداد منفی زوج نمی‌شود. بنابراین این گزاره نیز درست نمی‌باشد.

د) با فرض درست بودن $p(0)$ گزاره‌های زیر درست خواهند بود:

$$p(-4), p(-8), p(-12), p(-16), \dots$$

و با فرض درست بودن $p(10)$ گزاره‌های زیر درست خواهند بود:

$$p(6), p(2), p(-2), p(-6), p(-10), \dots$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با درست بودن گزاره $p(10)$ گزاره برای تمامی اعداد منفی زوج درست خواهد بود.

۵. عکس نقیض هریک از گزاره‌های زیر را به دست آورید.

الف) اگر x کوچک‌تر از صفر باشد، آن گاه x مثبت نیست.

ب) تنها اگر خسته نباشد، موفق می‌شود.

ج) برای مستطیل بودن، لازم است شکل مربع باشد.

حل:

الف) عکس نقیض $q \rightarrow p$ گزاره $p \rightarrow q$ است. از این رو عکس نقیض گزاره داده شده به صورت "اگر x مثبت باشد، آن گاه x کوچک‌تر از صفر نیست" می‌باشد.

ب) اگر او خسته نباشد، آن گاه موفق نمی‌شود.

ج) اگر شکل مستطیل نباشد، آن گاه مربع نیست.

۶. تحقیق کنید که گزاره $p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$ یک گزاره همیشه درست است.

حل:

p	q	r	$p \vee r$	$q \rightarrow (p \vee r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$
F	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

۷. فرض کنید p, q, r گزاره‌های دلخواه باشند؛ هم‌ارزی‌های زیر را نشان دهید:

$$p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \quad \text{الف)}$$

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r \quad \text{ب)}$$

حل:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \\ &\equiv \neg p \vee (q \wedge r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r) \end{aligned} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{aligned} (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\ &\equiv \neg(p \vee q) \vee r \\ &\equiv (p \vee q) \rightarrow r \end{aligned} \quad \text{ب)}$$

۸. فرمول گزاره‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$[(p \vee T) \wedge (q \vee F)] \vee (r \wedge s \wedge T)$$

الف) دوگان این فرمول را بیابید.

ب) این فرمول را تا حد ممکن ساده کنید و به صورت گزاره شرطی بنویسید.

الف) دوگان فرمول به صورت $[(p \wedge F) \vee (q \wedge T)] \wedge (r \vee s \vee F)$ است.

ب) برای ساده نمودن فرمول داریم:

$$\begin{aligned} [(p \vee T) \wedge (q \vee F)] \vee (r \wedge s \wedge T) &\equiv \\ &\equiv q \vee (r \wedge s) \\ &\equiv q \vee \neg(\neg r \vee \neg s) \\ &\equiv q \vee \neg(r \rightarrow \neg s) \\ &\equiv \neg(r \rightarrow \neg s) \vee q \\ &\equiv (r \rightarrow \neg s) \rightarrow q \end{aligned}$$

۹. درستی استنتاج زیر را ثابت کنید.

$$[p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q)] \rightarrow (s \vee t)$$

حل:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
$p \rightarrow q$	$r \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$s \vee r \equiv \neg s \rightarrow r$	$\neg s \rightarrow r$	s
p		q		$\neg r$	$\therefore s \vee t$
$\hline \therefore q$	$\therefore q \rightarrow r$	$\hline \therefore r$		$\hline \therefore s$	

۱۰. یک کارآگاه از چهار نفر از شاهدان یک جرم بازجویی نموده است. از مطالبی که این چهار شاهد عنوان نموده‌اند، کارآگاه به نتایج زیر رسیده است:

اگر شاهد A راست بگوید، شاهد B نیز درست می‌گوید.

هر دو شاهد B و C با هم نمی‌توانند راست بگویند.

هر دو شاهد C و D با هم نمی‌توانند دروغ بگویند.

اگر شاهد D راست بگویند، شاهد B دروغ می‌گوید.

آیا کارآگاه می‌تواند تشخیص دهد که کدام شاهد دروغ و کدام شاهد راست می‌گوید؟

حل:

اگر a, b, c, d به ترتیب نشان‌دهنده درست بودن گفته‌های شاهدان A, B, C, D باشد، داریم:

$$(1) a \rightarrow b$$

$$(2) \neg(b \wedge c)$$

$$(3) \neg(\neg c \wedge \neg d)$$

$$(4) d \rightarrow \neg b$$

با تبدیل فرمول‌های گزاره‌ای دوم و سوم به عبارتهای شرطی خواهیم داشت:

$$(1) a \rightarrow b$$

$$(2) \neg(b \wedge c) \equiv \neg b \vee \neg c \equiv b \rightarrow \neg c$$

$$(3) \neg(\neg c \wedge \neg d) \equiv c \vee d \equiv \neg c \rightarrow d$$

$$(4) d \rightarrow \neg b$$

با توجه به گزاره‌های شرطی ۲ و ۳ و ۴:

$$\begin{aligned} b \rightarrow \neg c \\ \neg c \rightarrow d \\ d \rightarrow \neg b \end{aligned} \Rightarrow b \rightarrow \neg b \equiv \neg b \vee \neg b \equiv \neg b$$

یعنی شاهد B دروغ می‌گوید.

با توجه به $a \rightarrow b$ و از آنجا که b دارای ارزش نادرست است، برای اینکه ارزش گزاره شرطی درست باشد، باید a نیز نادرست باشد. بنابراین شاهد A نیز دروغ می‌گوید.

با توجه به گزاره $b \rightarrow \neg c$ و اینکه b دارای ارزش نادرست است، در مورد درست یا نادرست بودن c نمی‌توان تصمیم گرفت. در گزاره‌های شرطی، عنوان شد که اگر قسمت مقدم نادرست باشد، فارغ از ارزش قسمت تالی، گزاره دارای ارزش درست خواهد داشت. بنابراین نمی‌توان در مورد راست یا دروغ بودن گفته‌های شاهد C نظر داد.

با توجه به گزاره $d \rightarrow \neg b$ از آنجا که b نادرست است، $\neg b$ درست خواهد بود، بنابراین d می‌تواند درست یا نادرست باشد. بنابراین نمی‌توان در مورد راست یا دروغ بودن گفته‌های شاهد D نظر داد.

۱۱. یک سایت کامپیوتری توسط عده‌ای هک شده است. مسئولان سایت با توجه به آدرس اینترنتی افراد مظنون، به مدارک زیر دست یافته‌اند. با توجه به این اطلاعات در مورد هر کدام از افراد مشخص نمایید که کدام یک سایت را هک نموده‌اند.
- اگر A سایت را هک نموده باشد، B نمی‌تواند هکر این سایت باشد.
 - حداقل یکی از دو نفر B یا D هکر هستند.
 - اگر D سایت را هک نموده باشد، C نمی‌تواند سایت را هک نموده باشد.
 - اگر E سایت را هک نموده باشد، C نیز هکر دیگر سایت خواهد بود.
 - با مدارکی ثابت شده است که C یکی از هکرهاي سایت است.
- حل:

در ابتدا هر کدام از گزاره‌های زیر را به صورت نماد نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow \neg B \\ B \vee D \\ D \rightarrow \neg C \\ E \rightarrow C \\ C \end{array}$$

در مورد E

$$\begin{array}{l} E \rightarrow C \\ C \end{array}$$

$$\therefore E$$

در نتیجه E نمی‌تواند هکر باشد.

در مورد D

$$\begin{array}{l} D \rightarrow \neg C \\ C \end{array}$$

$$\therefore \neg D$$

یعنی D هکر سایت نیست.

در مورد B

$$\begin{array}{l} B \vee D \\ \neg D \end{array}$$

$$\therefore B$$

بنابراین B نیز یکی دیگر از هکرهاي سایت است.

در مورد A

$$\begin{array}{l} A \rightarrow \neg B \\ B \end{array}$$

$$\therefore \neg A$$

بنابراین A هکر نیست.

۱۲. ثابت کنید حاصل جمع یک عدد زوج با هر عدد فرد، عددی فرد خواهد بود.
حل:

فرض کنید M عددی زوج و N عددی دلخواه و فرد باشد. بنابراین:

$$\exists i, j \in \mathbb{Z}: M = 2i, N = 2j + 1$$

اثبات مستقیم:

$$M + N = 2i + (2j + 1) = 2(i + j) + 1$$

و حکم ثابت شد.

برهان خلف: فرض کنید $M + N$ فرد نباشد، پس زوج است، بنابراین داریم:

$$\exists k \in \mathbb{Z}: M + N = 2k$$

از طرفی:

$$M = 2k - N = 2k - (2j + 1) = 2(k - j) - 1$$

بنابراین M فرد است، که این متناقض با فرض مسئله است.

۱۳. متن زیر در رابطه با درس ساختمان‌های گسته (به اختصار گسته) برای دانشجویی به نام الهام قابل بحث است:
- اگر امتحان گسته غیراستاندارد باشد یا الهام وقت کافی برای درس نگذاشته باشد، آن‌گاه الهام درس را رد خواهد شد.
 - اگر الهام درس گسته را رد شود آن‌گاه با استفاده از تبصره ۱۰، درس ساختمان داده و درس مدار منطقی را ترم بعد هم‌نیاز خواهد کرد.
 - اگر امتحان گسته غیراستاندارد باشد، آن‌گاه طراح فردی کم تجربه بوده‌است یا وقت کافی برای طراحی نداشته‌است.
 - اگر برای طراحی چند هفته به طراح سوال وقت داده‌شود، آن‌گاه طراح وقت کافی برای طراحی سوال داشته‌است.
 - اگر الهام کمتر از هفته‌ای ۳ ساعت در طول نیمسال برای درس وقت بگذارد، آن‌گاه وقت کافی برای درس نگذاشته‌است.
 - الهام کمتر از هفته‌ای ۴ ساعت در طول نیمسال برای درس گسته وقت گذاشته است.
 - به طراح سوال، چندین هفته برای طرح سوال وقت داده‌شده است.

موارد زیر را از طریق قواعد استنتاج اثبات یا رد نمایید؟

- الف) آیا الهام برای درس مدار منطقی در نیمسال بعد به تبصره ۱۰ نیاز خواهد داشت؟
 ب) آیا طراح، فردی کم‌تجربه بوده است؟
 حل:

در ابتدا گزاره‌ها را نامگذاری می‌نماییم:

- a : امتحان گسته غیراستاندارد باشد.
 b : الهام وقت کافی برای درس می‌گذارد.
 c : الهام درس را رد خواهد شد.
 d : الهام از تبصره ۱۰ استفاده خواهد کرد.
 e : طراح کم‌تجربه بوده‌است.
 f : طراح وقت کافی برای طراحی دارد.
 g : طراح چند هفته وقت دارد.
 h : الهام کمتر از هفته‌ای ۴ ساعت برای درس وقت می‌گذارد.
 حال داریم:

$$\begin{aligned}
 a \vee b &\rightarrow c \\
 c &\rightarrow d \\
 a &\rightarrow e \vee f \\
 g &\rightarrow f \\
 h &\rightarrow \neg b \\
 h & \\
 g &
 \end{aligned}$$

باید بررسی‌شود که آیا d و e برقرار است یا خیر.
 الف):

I)	II)	III)
$h \rightarrow b$	$a \vee b \rightarrow c$	$c \rightarrow d$
h	$\neg b$	c
$\therefore \neg b$	$\therefore c$	$\therefore d$

بنابراین الهام به تبصره ۱۰ نیاز خواهد داشت.

ب):

با توجه به استنتاج $f \vdash g$ ، $g \rightarrow f$ یعنی طراح وقت کافی برای طراحی سوال داشته‌است. تنها جایی که گزاره e تنها در $a \rightarrow e \vee f$ استفاده شده‌است. از آنجا که ارزش f درست است، بنابراین f نادرست و در نتیجه $e \vee f \equiv e \vee \text{درست} \equiv e$ خواهد بود. اما در گزاره شرطی $a \rightarrow e$ مقدار e وابسته به مقدار a است و چون ارزش a مشخص نیست، نمی‌توان در مورد ارزش e نتیجه‌گیری نمود. بنابراین نمی‌توان به این سوال پاسخ داد.

۱۴. با استفاده از برهان خلف نشان دهید که اگر $3n+2$ فرد باشد، آن‌گاه n نیز فرد است.
 حل:

اگر p فرد بودن $3n+2$ و q فرد بودن n باشد، برای استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم که p و $\neg q$ درست است. یعنی فرض می‌کنیم $3n+2$ فرد است و n زوج است. از آنجا که n زوج فرض شده، بنابراین عددی مانند k وجود دارد که $n=2k$ بنابراین:

$$3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$$

یعنی $3n+2$ نیز زوج است و این مخالف فرض اولیه است.

۱۵. به ازای $n \geq 4$ ثابت کنید $n! \geq 2^n$ بزرگوار است.

حل:

از روش استقراء استفاده می‌نماییم. چون $4! = 24 \geq 2^4 = 16$ ، در نتیجه به ازای $n=4$ نایر ابری بالا درست است.

فرض می‌کنیم $S(n): n! \geq 2^n$ داریم:

$$S(n+1): (n+1)! \geq 2^n (n+1)$$

از آنجا که $n \geq 4$ در نتیجه $n+1 \geq 5 \geq 2$ در نتیجه:

$$2^n (n+1) \geq 2^n \times 2 = 2^{n+1}$$



۱۶. محاسبات زیر نشان می‌دهند که این امکان وجود دارد که اعداد صحیح ۱۴، ۱۵ و ۱۶ را به صورت حاصل جمعی از فقط ۳ و یا ۸ (بدون توجه به ترتیب) بنویسیم.

$$14 = 3 + 3 + 8$$

$$15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

$$16 = 8 + 8$$

بر اساس این سه عدد، حدس زیر را تنظیم می‌کنیم:

برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ که $n \geq 14$ است، $S(n)$ می‌توان n را به صورت حاصل جمعی از ۳ ها و یا ۸ ها نوشت. این حدس را ثابت نمایید.

حل:

از استقرای قوی استفاده می‌نماییم. $S(14)$ ، $S(15)$ و $S(16)$ درست هستند.

فرض می‌گیریم $S(14)$ ، $S(15)$ ، $S(16)$ ، ...، $S(k-2)$ ، $S(k-1)$ و $S(k)$ درست هستند.

$S(k-2)$ به صورت جمعی از ۳ ها و یا ۸ ها نوشته می‌شود. در نتیجه: $(k+1) = (k-2) + 3$ را نیز می‌توان به صورت حاصل جمعی از ۳ ها و یا ۸ ها نوشت. در نتیجه بنا به اصل استقرای ریاضی قوی $S(n)$ به ازای هر $n \geq 14$ درست است.



۱۷. اگر عالم‌سختن مجموعه $U = \{-1, 1, 2\}$ باشد و $p(x): x^2 < 2$ و $q(x): x > 1$ باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر درست خواهند بود؟

الف) $\forall x [p(x) \vee q(x)]$

ب) $\exists x [p(x) \wedge q(x)]$

ج) $\forall x [-p(x) \wedge -q(x)]$

د) $\forall x [-p(x) \vee q(x)]$

حل:

در ابتدا ارزش هر کدام از گزاره‌ها را به ازای عناصر عالم سختن به دست می‌آوریم:

	$p(x)$	$q(x)$
-۱	T	F
۱	T	F
۲	F	T

الف) با توجه به جدول فوق به ازای هر عضو از عالم سختن، یکی از گزاره‌ها ارزش درست دارد، بنابراین این گزاره سوردار ارزش درست دارد.

ب) این گزاره ارزش نادرست دارد. زیرا به ازای هیچ کدام از اعضای عالم سختن، هر دو گزاره توأمأ درست نیستند.

ج) این گزاره نادرست است. زیرا به ازای هیچ کدام از اعضای عالم سختن، هر دو گزاره توأمأ دارای ارزش نادرست نیستند.

د) با توجه به جدول فوق این گزاره نیز دارای ارزش نادرست است. زیرا به عنوان مثال در $p(-1)$ و $q(-1)$ هر دو دارای ارزش درست هستند.



۱۸. فرض کنید عالم سختن، مجموعه اعداد صحیح باشد. عبارات زیر را به صورت گزاره‌های سوردار نوشته و نقیض آن‌ها را بیابید.
الف- اگر x فرد باشد آن گاه $1 - x$ زوج است.

ب- به ازاء هر عدد صحیح x ، عدد صحیح y ای وجود دارد به طوری که $x+y \neq 7$.

ج- به ازاء هر عدد صحیح x عدد صحیح y ای وجود دارد که اگر x زوج و y بر ۳ بخشپذیر باشد، آن گاه xy بر ۶ بخشپذیر است.

حل:

الف) فرض کنید:

 $p(x)$: x فرد است.

 $q(x)$: $x-1$ زوج است.

گزاره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall x p(x) \rightarrow q(x)$$

این گزاره دارای ارزش درست است (اثبات بر عهده دانشجو). نقیض گزاره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\neg [\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]] \equiv \exists x \neg [p(x) \rightarrow q(x)] \equiv \exists x [p(x) \wedge \neg q(x)]$$

 یعنی برای وجود دارد که فرد است اما $x-1$ زوج نیست.

ب) گزاره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall x \exists y : x+y \neq 7$$

این گزاره ارزش درست است. نقیض گزاره به صورت زیر است:

$$\neg [\forall x \exists y : x+y \neq 7] \equiv \forall \exists x \neg [\exists y : x+y \neq 7] \equiv \exists x \forall y x+y=7$$

 یعنی برای وجود دارد که به ازای هر y رابطه $x+y=7$ برقرار است.

ج) گزاره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall x \exists y \forall i,j,k (x=2i \wedge y=3j \rightarrow xy=6k)$$

ارزش این گزاره درست است. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\neg (\forall x \exists y \forall i,j,k (x=2i \wedge y=3j \rightarrow xy=6k))$$

$$\equiv \exists x \forall y \exists i,j,k (x=2i \wedge y=3j \wedge xy \neq 6k)$$

 یعنی عدد زوج برای وجود دارد که به ازای هر y مضرب ۳، حاصل xy مضرب ۶ نمی‌شود.

 ۱۹. آیا هم‌ارزی $\forall x [P(x) \vee q(x)] \equiv \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$ برقرار است؟

حل:

 فرض کنید $p(x): x+2=3$ و $q(x): x+2 \neq 3$ و عالم سخن مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت $\forall x [P(x) \vee q(x)]$ درست است ولی $\forall x p(x) \vee \forall x q(x)$ درست نیست. بنابراین این هم‌ارزی برقرار نیست.

 ۲۰. هم‌ارز گزاره نقیض دار $\neg [\forall x \in \mathbb{N}, [(x^2 \leq 10) \wedge (x \text{ is not odd})]]$ را به دست آورید: odd به معنی فرد.

حل:

$$\neg [\forall x \in \mathbb{N}, [(x^2 \leq 10) \wedge (x \text{ is not odd})]]$$

$$= \exists x \in \mathbb{N}, \neg [(x^2 \leq 10) \wedge (x \text{ is not odd})]$$

$$= \exists x \in \mathbb{N}, [\neg (x^2 \leq 10) \vee \neg (x \text{ is not odd})]$$

$$= \exists x \in \mathbb{N}, [(x^2 > 10) \vee (x \text{ is odd})]$$

تمرین‌های فصل

۱. در قطعه برنامه پاسکال زیر تمامی متغیرها صحیح هستند. چند بار دستور `writeln` اجرا می‌شود؟

```
for i=1 to 10 do
  for j=1 to 5 do
    if i<>j then
      writeln('the sum of i and j is:', i+j);
```

۲. قطعه‌ای از یک برنامه پاسکال یک حلقه `Repeat-Until` دارد که دارای ساختاری به صورت زیر است:

`Repeat`

.....

`Until ((x<>0) and (y>0)) or (not ((w>0) and (t=3)));`

به ازای هر دسته از مقادیر زیر که به متغیرهای x, y, w, t نسبت داده می‌شود، تعیین کنید که آیا این حلقه پایان می‌پذیرد یا خیر؟

الف) $x=7, y=2, w=5, t=3$

ب) $x=0, y=2, w=-3, t=3$

ج) $x=1, y=-1, w=1, t=3$

۳. اگر گزاره‌های p, q, r, s به ترتیب (از چپ) دارای ارزش T, T, F, F باشند، ارزش گزاره‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$

ب) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (s \rightarrow r)$

ج) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \vee q)$

د) $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s))$

ه) $(p \wedge r) \leftrightarrow s$

۴. نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را به دست آورید.

الف) اگر مطالعه کند، در امتحان موفق می‌شود.

ب) او شنا می‌کند اگر و فقط اگر آب، گرم باشد.

ج) اگر او مطالعه کند، به دانشگاه یا به مرکز فنی و حرفه‌ای می‌رود.

۵. تحقیق کنید که $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ یک گزاره همیشه درست است.

۶. کدام یک از گزاره‌های زیر راستگو هستند؟

الف) $p \rightarrow q$

ب) $p \leftrightarrow q$

ج) $\neg(\neg(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q))$

د) $\neg p \rightarrow \neg p$

۷. فرض کنید p و q گزاره‌هایی هستند که به ازای آنها استلزام $p \rightarrow q$ دروغ باشد. ارزش درستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی نمایید.

الف) $p \wedge q$

ب) $\neg p \vee q$

ج) $q \rightarrow p$

د) $\neg q \rightarrow \neg p$

۸. کدام یک از هم‌ارزی‌های زیر صحیح است؟

الف) $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \equiv p$

ب) $p \rightarrow q \equiv \neg(p \vee q)$

ج) $[(p \vee q) \rightarrow r] \equiv [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$

د) $[p \rightarrow (q \vee r)] \equiv [\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)]$

ه) $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \neg q) \equiv (\neg p \leftrightarrow q)$

۹. نشان دهید که هم‌ارزی‌های زیر برقرار می‌باشند.

الف) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$

ب) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$

ج) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \vee r)$

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r) \quad (د)$$

۱۰. درستی استلزام منطقی $p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q$ را ثابت کنید.

۱۱. نشان دهید استلزام منطقی $p \leftrightarrow \neg q \Rightarrow p \rightarrow q$ برقرار نیست.

۱۲. پنج نفر A, B, C, D, E وارد یک سایت گفتگوی اینترنتی شده‌اند. آیا با داشتن اطلاعات زیر می‌توان گفت کدام یک از آنها الان در حال گفتگو هستند؟

- A یا B یا هر دو در حال گفتگو هستند.
- C یا D (نه هر دو با هم) در حال گفتگو هستند.
- اگر E در حال گفتگو باشد، C هم در حال گفتگو خواهد بود.
- A و D یا هر دو در حال گفتگو می‌باشند، یا هیچ کدام.
- اگر B در حال گفتگو باشد، آن گاه A و E نیز در حال گفتگو خواهند بود.

۱۳. اگر آرمیا بخواهد به جلسه‌ای که سه‌شنبه صبح دارد برود آن گاه باید صبح آن روز، زود بیدار شود. اگر دوشنبه شب به مهمانی برود، آن گاه بعد از ساعت ۱۱ شب به خانه باز خواهد گشت. اگر آرمیا در چنین وقتی به خانه بازگردد و صبح روز بعد زود بیدار شود، آن گاه مجبور است با کمتر از ۷ ساعت خواب سرکار حاضر شود. متأسفانه، آرمیا نمی‌تواند با کمتر از ۷ ساعت خواب کار کند. در نتیجه آرمیا یا باید مهمانی نرود یا در جلسه سه‌شنبه صبح حضور نیابد. این استنتاج را به صورت نماد نوشته و اعتبار آن را بررسی نمایید.

۱۴. کدام یک از استنتاج‌های زیر معتبر است؟

$$[p \rightarrow (q \vee w), (\neg q \wedge p), (p \rightarrow \neg w)] \vdash \neg y \quad \text{الف}$$

$$p \rightarrow q \vdash (w \vee p) \rightarrow (w \vee q) \quad \text{ب}$$

$$p \rightarrow q \vdash (w \rightarrow p) \rightarrow (w \rightarrow q) \quad \text{ج}$$

$$[r, r \rightarrow p, (p \vee q) \rightarrow w] \vdash \neg w \quad \text{د}$$

۱۵. اعتبار استنتاج زیر را بررسی کنید.

$$S_1$$

$$S_2$$

$$\therefore S$$

که در آن:

S_1 : اگر دو ضلع یک مثلث برابر باشند، آن گاه زاویه مقابل آنها برابرند.

S_2 : دو ضلع یک مثلث برابر نیستند.

S : زاویه‌های مقابل مثلث برابر نیستند.

می‌باشند.

۱۶. می‌خواهیم نشان دهیم استنتاج زیر در منطق گزاره‌ها معتبر نیست.

$$((p \wedge q) \vee r, q \rightarrow (r \vee s), \neg p \rightarrow q) \vdash p \vee s$$

بررسی‌نمایید کدام ارزش‌دهی به گزاره‌های p, q, r, s این نامعتبر بودن را نشان می‌دهد:

$$\text{الف) } (F, T, T, T)$$

$$\text{ب) } (T, T, F, T)$$

$$\text{ج) } (F, T, T, F)$$

$$\text{د) } (F, T, F, F)$$

۱۷. هر یک از موارد زیر را با استقرا ثابت کنید.

$$\text{الف) } \forall n \geq 3: 2^n \geq n^2$$

$$\text{ب) } \sum_{i=1}^n 2 \left(3^{i-1} \right) = 3^n - 1$$

۱۸. ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ که $n \geq 24$ است، می‌توان n را به صورت حاصل‌جمع از ۵ها و ۷ها نوشت.

۱۹. دنباله اعداد صحیح $a_0, a_1, \dots$ را که در آن $a_0 = 1$ ، $a_1 = 2$ و $a_2 = 3$ را که در آن

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ ($n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 3$) در نظر بگیرید. با استفاده از استقرای قوی ثابت

کنید که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه $a_n \leq 3^n$ برقرار است.

۲۰. عبارات زیر را به صورت گزارهٔ سوردار نوشته، سپس آن‌ها را اثبات یا رد کنید.

(الف) اگر a, b مجذور کامل باشند، آن‌گاه $a+b$ نیز مجذور کامل است.

(ب) اگر a, b مجذور کامل باشند، آن‌گاه ab نیز مجذور کامل است.

(ج) اگر $\forall x, y \in \mathbb{R}, x+y \geq 100$ یا $y \geq 50$ یا $x \geq 50$

(د) اعداد مثبت m, n وجود دارند که $m+n, n, m$ همگی مجذور کامل باشند.

۲۱. ارزش درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را به دست آورید که در آن

عالم‌سختن مجموعه $\{1, 2, 3\}$ است.

(الف) $\exists x \forall y, x^2 < y+1$

(ب) $\forall x \exists y, x^2 + y^2 < 12$

(ج) $\forall x \forall y, x^2 + y^2 < 12$

۲۲. نقیض گزاره‌های زیر را بیابید:

(الف) به ازای همهٔ اعداد صحیح m اگر n بر 2 بخشپذیر نباشد، آن‌گاه n فرد است (عالم سخن اعداد صحیح).

(ب) اگر n, m, k اعدادی صحیح باشند، به طوریکه $k-m$ و $m-n$ فرد باشند، آن‌گاه $k-n$ زوج است (عالم سخن اعداد صحیح).

(ج) به ازای همهٔ اعداد حقیقی x اگر $7 < x < 31$ یا آن‌گاه $10 < x < 4$ - (عالم سخن اعداد حقیقی).

(د) هوا روشن است و تمام مردم از خواب برخاسته‌اند.

(ه) بعضی از دانشجویان تکالیف خود را انجام نداده‌اند یا استاد غیبت کرده است.

۲۳. فرض کنید عالم‌سختن برای متغیرهای گزاره‌های زیر مرکب از همهٔ اعداد حقیقی باشد. در هر حالت نقیض گزاره داده شده را بنویسید و آن را ساده‌نمایید.

(الف) $\forall x \forall y [(x > y) \rightarrow (x-y) > 0]$

(ب) $\forall x \forall y [((x > 0) \wedge (y = \log_1 x)) \rightarrow (x = 10^y)]$

(ج) $\forall x \exists y [(x < y) \rightarrow \exists z (x < z < y)]$

(د) $[\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y > 0))] \rightarrow [\exists z (xz > y)]$

۲۴. نقیض هریک از گزاره‌های زیر را به دست آورید:

(الف) $\forall x \exists y (p(x) \vee q(y))$

(ب) $\exists x \forall y (p(x, y) \rightarrow q(x, y))$

(ج) $\exists y \exists x (p(x) \wedge \neg q(y))$

فصل دوم

روابط روی مجموعه‌ها، توابع

اهداف:

در پایان این فصل انتظار می‌رود:

- با مفهوم رابطه به عنوان زیرمجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی آشنا شود.
- بتواند خواص رابطه مانند بازتابی، متقارن، متعدی را شناسایی نماید.
- با روابط هم‌ارزی و خواص آن آشنا شود.
- بتواند عملیات منطقی و ریاضی، روی روابط را محاسبه نماید.
- قادر باشد روش‌های نمایش روابط را به کار برد.
- با تابع، به عنوان نوع خاصی از رابطه آشنا شود.

۱-۲ زوج مرتب و حاصلضرب دکارتی

☐ زوج مرتب: هر دو شیء در کنار یکدیگر تشکیل یک زوج می‌دهند. اگر در مورد دو شیء ترتیب قرار گرفتن آنها در کنار یکدیگر حائز اهمیت باشد، آن زوج را زوج مرتب نامند.

یک زوج مرتب معمولاً با نماد (a, b) نشان داده می‌شود و بنا به تعریف اگر $a \neq b$ باشد، آن‌گاه زوج مرتب (a, b) با زوج مرتب (b, a) متفاوت است. در زوج مرتب (a, b) ، a را مؤلفه یا مختص اول و b را مؤلفه یا مختص دوم گویند.

☐ n تایی مرتب: به طور کلی n تایی مرتب از n مؤلفه تشکیل می‌شود که ترتیب قرار گرفتن آنها در کنار یکدیگر مهم است. دو n تایی در صورتی مساوی هستند که مؤلفه‌های نظیر به نظیر آنها برابر باشند:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

☐ حاصلضرب دکارتی: فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه باشند، حاصلضرب دکارتی آنها را با نماد $A \times B$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

نکته:

در حالت کلی اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند $A \times B \neq B \times A$ اما اگر A, B دو مجموعه متناهی و $|A| = m$ (تعداد اعضای A) و $|B| = n$ (تعداد اعضای B) باشند، آن‌گاه:

$$|A \times B| = |B \times A| = mn$$

۲-۲ روابط

رابطه بین دو مجموعه از اشیاء اصطلاح متداولی است که در زندگی روزمره نیز بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ مانند رابطه فرزند و مادر، رابطه فروشنده و خریدار.

☐ مثال ۱-۲: در مبحث کامپیوتر نمونه‌ای از روابط عبارتند از:

- رابطه بین سرعت محاسبه یک کامپیوتر و تعداد پردازنده‌های به کار رفته در آن؛
- رابطه بین سرعت پردازش یک کامپیوتر و ظرفیت حافظه اصلی آن؛

☐ مثال ۲-۲: در ریاضی نیز روابط کاربرد بسیاری دارد، از جمله:

- رابطه بین یک عدد و مضارب آن
- رابطه بین عدد ۳ و سایر اعداد اول

ساده‌ترین روش جهت نمایش رابطه بین عناصر دو مجموعه، استفاده از زوج‌های مرتب است که در این زوج‌ها مؤلفه اول از اعضای مجموعه اول و مؤلفه دوم از اعضای مجموعه دوم هستند.

☐ تعریف رابطه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، به هر زیر مجموعه از $A \times B$ یک رابطه، از A در B گفته می‌شود. برای نمایش رابطه، معمولاً از نماد R استفاده می‌شود.

در یک رابطه $(a, b) \in R$ به این معنی است که R زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ به طوری که در آن $a \in A$ و $b \in B$ باشد. $(a, b) \in R$ را با aRb نیز نشان می‌دهند. در یک رابطه aRb نشان می‌دهد که زوج (a, b) در رابطه R وجود ندارد، یعنی $(a, b) \notin R$. به مجموعه مؤلفه‌های اول یک رابطه، دامنه و به مجموعه مؤلفه‌های دوم آن، برد رابطه گویند.

☐ رابطه روی یک مجموعه: یک رابطه از A در A را یک رابطه روی A گویند.

☐ مثال ۲-۳: فرض کنید مجموعه A شامل تمام کشورهای جهان و مجموعه B شامل تمام پایتخت کشورها باشند. رابطه R را به صورت زیر تصور نمایید:

R شامل زوج‌های مرتب (a, b) است که در آن شهر b پایتخت کشور a باشد. بنابراین برخی اعضاء این رابطه عبارتند از:

$$R = \{ \dots, (کوالالمپور، مالزی), (پاریس، فرانسه), (رم، ایتالیا), (تهران، ایران) \}$$

☐ مثال ۲-۴: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد. اگر R مجموعه متشکل از تمام زوج‌های مرتبی که a مقسوم علیه b است. عناصر R عبارتند از:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 4)\}$$

مثال ۵-۲: رابطه‌های زیر، بر روی مجموعه اعداد صحیح تعریف شده‌اند:

$$R_1 = \{(a, b) | a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a, b) | a \geq b\}$$

$$R_3 = \{(a, b) | a = b\}$$

$$R_4 = \{(a, b) | a = b + 1\}$$

$$R_5 = \{(a, b) | a = |b|\}$$

$$R_6 = \{(a, b) | a + b > 2\}$$

عناصر $(2, 2), (3, 0), (1, 2), (0, 0)$ و $(1, -1)$ به کدام یک از روابط فوق تعلق دارند؟

حل:

زوج مرتب $(0, 0)$ در R_1, R_2, R_3, R_4, R_5

زوج مرتب $(1, -1)$ در R_5, R_6

زوج مرتب $(1, 2)$ در R_1, R_2, R_4, R_6

زوج مرتب $(3, 0)$ در R_1, R_2, R_3, R_5

زوج مرتب $(2, 2)$ در $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$



از آنجایی که هر رابطه روی مجموعه A یک زیر مجموعه از $A \times A$ است، بنابراین تعداد رابطه‌هایی که می‌توان روی مجموعه A نوشت با تعداد زیرمجموعه‌های $A \times A$ برابر است. لذا تعداد رابطه‌های که می‌توان روی مجموعه A نوشت برابر 2^{n^2} است.

۲-۱-۲-۲-۱-۲-۲ جبر رابطه‌ها

اگر R_1 و R_2 دو رابطه از A به B باشند، آن‌گاه خواص زیر در رابطه‌ها برقرارند:

(۱) اجتماع دو رابطه: $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \in A \times B | (x, y) \in R_1 \text{ یا } (x, y) \in R_2\}$

(۲) اشتراک دو رابطه: $R_1 \cap R_2 = \{(x, y) \in A \times B | (x, y) \in R_1 \text{ و } (x, y) \in R_2\}$

(۳) تفاضل دو رابطه: $R_1 - R_2 = \{(x, y) \in A \times B | (x, y) \in R_1 \text{ و } (x, y) \notin R_2\}$

(۴) جمع جبری دو رابطه: $R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cup R_2) - (R_1 \cap R_2)$

(۵) مکمل یک رابطه: $R_1^c = \{(x, y) \in A \times B | (x, y) \notin R_1\}$

(۶) وارون (معکوس) رابطه: $R_1^{-1} = \{(x, y) \in A \times B | (y, x) \in R_1\}$

مثال ۶-۲: فرض کنید R_1 و R_2 به ترتیب روابط "کوچک‌تر از" و "بزرگ‌تر از" بر مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده باشند، یعنی:

$$R_1 = \{(x, y) | x < y\}$$

$$R_2 = \{(x, y) | x > y\}$$

هر یک از روابط $R_1 \oplus R_2$ و $R_2 - R_1$ را محاسبه نمایید:

حل:

اگر $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ آن‌گاه $(x, y) \in R_1$ یا $(x, y) \in R_2$ ، بنابراین $x < y$ یا $x > y$ ، در نتیجه $x \neq y$

$$R_1 \cup R_2 = \{(x, y) | x \neq y\}$$

به‌وضوح مشخص است که روابط زیر برقرارند:

$$R_1 \cap R_2 = \emptyset$$

$$R_1 - R_2 = R_1$$

$$R_2 - R_1 = R_2$$

$$R_1 \oplus R_2 = R_1 \cup R_2$$



۲-۲-۲-۲-۲ ترکیب روابط

اگر R رابطه‌ای از A در B و S رابطه‌ای از B در C باشد، ترکیب دو رابطه S و R با SoR نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SoR = \{(a, c) | \exists b \in B: (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$$

$$RoS = \{(a, c) | \exists b \in B: (a, b) \in S, (b, c) \in R\}$$

$$SoS = \{(a, c) | \exists b \in B: (a, b) \in S, (b, c) \in S\}$$

گزاره ۲-۱-۲:

$$(SoR)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1} \quad (\text{الف})$$

$$(RoS)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} \quad (\text{ب})$$

اثبات:

الف) اعضاء $a \in A$ ، $b \in B$ و $c \in C$ را در نظر می‌گیریم.

اگر $(a, c) \in (SoR)^{-1}$ ، آن‌گاه $(c, a) \in SoR$

از طرفی، از $(a, c) \in SoR$ نتیجه می‌گیریم:

$$\exists b \in B: (a, b) \in R, (b, c) \in S$$

از $(a, b) \in R$ می‌توان نتیجه گرفت که: $(b, a) \in R^{-1}$. به همین ترتیب از $(b, c) \in S$ می‌توان نتیجه گرفت که: $(c, b) \in S^{-1}$. بنابراین:

$$(b, a) \in R^{-1}, (c, b) \in S^{-1} \Rightarrow (c, a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$$

در نتیجه:

$$(SoR)^{-1} \subseteq R^{-1} \circ S^{-1} \quad (1)$$

حال اگر $(c, a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ خواهیم داشت:

$$\exists b \in B: (c, b) \in S^{-1}, (b, a) \in R^{-1}$$

از $(c, b) \in S^{-1}$ می‌توان $(b, c) \in S$ و از $(b, a) \in R^{-1}$ می‌توان $(a, b) \in R$ را نتیجه گرفت. بنابراین:

$$(a, b) \in R, (b, c) \in S \Rightarrow (a, c) \in SoR \Rightarrow (c, a) \in (SoR)^{-1}$$

در نتیجه:

$$R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq (SoR)^{-1} \quad (2)$$

از (۱) و (۲)، تساوی $R^{-1} \circ S^{-1} = (SoR)^{-1}$ حاصل می‌شود.

مشابه این روش، قسمت (ب) نیز اثبات می‌شود.

مثال ۷-۲: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و $C = \{0, 1, 2\}$ و R رابطه‌ای از A در B و S رابطه‌ای از B در C به صورت زیر باشند، SoR ، RoS و SoS و $(SoR)^{-1}$ را محاسبه نمایید.

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$$

$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

حل:

SoR متشکل از تمام زوج‌های مرتب از R و S است که عضو دوم زوج مرتب موجود در R به عنوان عضو اول زوج مرتب دیگری در S باشد. به طور مثال زوج $(2, 3)$ در R و $(3, 1)$ در S هستند، لذا زوج $(2, 1)$ در SoR می‌باشد. بنابراین:

$$SoR = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$

$$RoS = \{(2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2)\}$$

$$SoS = \{(3, 0), (4, 0)\}$$

$$R^{-1} = \{(1, 1), (4, 1), (3, 2), (1, 3), (4, 3)\}$$

$$S^{-1} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4)\}$$

$$(SoR)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1} = \{(0, 1), (0, 3), (1, 2), (2, 2), (1, 1), (1, 3)\}$$

همان‌طور که در مثال ۷-۲ دیده شد ترکیب دو رابطه دارای خاصیت جابجایی نیست.

قضیه ۱-۲: اگر A, B, C, D چهار مجموعه، R یک رابطه از A به B یک رابطه از B به C و T یک رابطه از C به D باشد. در این صورت داریم:

$$To(SoR) = (ToS) \circ R$$

اثبات در [۴] قضیه ۵-۶ بیان شده است.

تعریف تصویر رابطه: اگر R یک رابطه از A به B باشد، تصویر x نسبت به R که با $R(x)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(x) = \{y / y \in B, xRy\}$$

اگر $A_1 \subseteq A$ باشد، تصویر A_1 نسبت به R عبارت است از:

$$R(A_1) = \{y / y \in B, x \in A_1, xRy\}$$

مثال ۸-۲: اگر $A = B = \{a, b, c, d\}$ و $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a), (d, c), (c, b)\}$ و آن‌گاه $A_1 = \{a, b, c\}$ و $R(b) = \{c\}$ و آن‌گاه $A_2 = \{c, d\}$ باشد، $R(A_1)$ و $R(A_2)$ را محاسبه کنید.

قضیه ۲-۲: اگر R یک رابطه از A به B و A_1 و A_2 دو زیرمجموعه از A باشند، در این صورت:

الف) اگر $A_1 \subseteq A_2$ آن‌گاه $R(A_1) \subseteq R(A_2)$

ب) $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$

ج) $R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$

اثبات در [۴] قضیه ۵-۲ بیان شده است.

در حالت کلی می‌توان ثابت کرد اگر $n > 1$ داریم: $R^n = R \circ R^{n-1}$

مثال ۲-۹: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و R رابطه‌ای از A در B به صورت زیر باشد، R^1, R^2 را به دست آورید.

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$$

حل:

$$R^1 = R \circ R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$$

$$R^2 = R \circ R^1 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$$

۲-۳-۳ خواص روابط

برای دسته‌بندی رابطه‌ها روی یک مجموعه می‌توان از خواص گوناگونی استفاده کرد. در این بخش به معرفی مهمترین این خواص پرداخته خواهد شد.

❏ **خاصیت بازتابی:** در برخی از روابط، یک عضو همواره با خودش در رابطه است. رابطه R بر مجموعه A دارای خاصیت بازتابی است، اگر برای هر عضو $a \in A$ داشته باشیم: aRa یا $(a, a) \in R$. یعنی: $\forall a \in A, (a, a) \in R$

مثال ۲-۱۰: رابطه " $\leq$ " یا " $\geq$ " (کوچک‌تر مساوی و بزرگ‌تر مساوی)، رابطه بازتابی است.

❏ **خاصیت ضدبازتابی:** رابطه R بر مجموعه A دارای خاصیت ضدبازتابی است، اگر برای هر عضو $a \in A$ داشته باشیم $(a, a) \notin R$. یعنی: $\forall a \in A, (a, a) \notin R$

مثال ۲-۱۱: مقدار a را طوری بیابید که رابطه زیر روی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ دارای خاصیت بازتابی باشد.

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, a)\}$$

حل:

کافی است قرار دهیم $a=3$ در اینصورت هر سه زوج $(1, 1)$ ، $(2, 2)$ و $(3, 3)$ در R قرار گرفته و R خاصیت بازتابی خواهد داشت.

در مثال فوق با توجه به اینکه $(2, 2)$ ، $(1, 1)$ در R قرار دارند، پس این رابطه ضدبازتابی نیست.

مثال ۲-۱۲: اصطلاح "عاد کردن" در مجموعه اعداد صحیح به این صورت تعریف می‌شود که: عدد a عدد b را عاد می‌کند هرگاه b بر a بخش‌پذیر باشد؛ و یا گویند: عدد a عدد b را می‌شمارد. خاصیت عاد کردن با علامت a/b نشان داده می‌شود. رابطه عاد کردن روی مجموعه اعداد صحیح خاصیت بازتابی دارد؛ زیرا هر عددی بر خودش بخش‌پذیر است.

مثال ۲-۱۳: کدام یک از روابط تعریف شده در مثال ۲-۵ خاصیت بازتابی و ضدبازتابی دارند؟

حل:

روابط R_1 ، R_2 و R_3 دارای خاصیت بازتابی هستند. کافی است در هر کدام از خواص این روابط بجای عدد b عدد a را قرار دهیم.

با در نظر گرفتن R_4 از آنجایی که $a = a/1$ در نتیجه $(a, a) \in R_4$.

در رابطه R_5 از آنجا که برای هیچ عضوی $(a, a) \in R_5$ برقرار نیست، در نتیجه این رابطه خاصیت ضدبازتابی دارد.

در رابطه R_6 به عنوان مثال $(3, 3) \in R_6$ ، در نتیجه این رابطه خاصیت ضدبازتابی ندارد. اما از طرف دیگر $(1, 1) \notin R_6$ ، بنابراین خاصیت بازتابی نیز ندارد.

❏ خاصیت تقارن: رابطه R تعریف شده بر مجموعه A دارای خاصیت تقارنی است اگر برای هر دو عضو $a, b \in A$ نتیجه دهد که bRa در این صورت گویند R متقارن است.

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$$

❏ خاصیت ضدتقارن: رابطه R بر مجموعه A دارای خاصیت ضدتقارنی است اگر aRb و bRa نتیجه دهد که $a=b$ به تعبیر دیگر اگر زوج $(a, b) \in R$ باشد، آن گاه $(b, a) \in R$ در این صورت گویند R ضدمتقارن است.

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R$$

نکته:

همان‌طور که در فصل اول کتاب بیان شد، اثبات درست بودن گزاره شرطی $p \rightarrow q$ در دو حالت رخ می‌داد:

- اگر p درست باشد، آن گاه q نیز باید درست باشد.
 - در صورتی که p نادرست باشد، صرف‌نظر از درست یا نادرست بودن q گزاره شرطی همیشه درست خواهد بود.
- در خاصیت ضدتقارن داریم:

$$aRb, bRa \Rightarrow a=b$$

یعنی برای برقراری خاصیت ضدتقارن یا باید از اینکه aRb و bRa نتیجه $a=b$ ویا از اینکه قسمت اول شرط برقرار نیست نتیجه شود کل شرط برقرار است. یعنی اگر aRb و bRa قسمت اول شرط برقرار نیست، و در نتیجه کل شرط درست است و خاصیت ضدتقارن برقرار خواهد بود.

❏ مثال ۲-۱۴: نشان دهید رابطه $aRb \Leftrightarrow |a-b| < 1$ ، روی اعداد حقیقی خاصیت تقارن دارد:

حل:

از $|a-b| < 1$ به سادگی نتیجه می‌شود که $|b-a| < 1$ و در نتیجه bRa

❏ مثال ۲-۱۵: کدام یک از روابط تعریف شده در مثال ۲-۵ خاصیت تقارن و کدام یک خاصیت ضدتقارن دارند؟
حل:

- روابط R_1 و R_2 دارای خاصیت تقارن هستند.
- رابطه R_1 ضدتقارن است، زیرا اگر $a < b$ و $b < a$ آن گاه $a=b$ خواهد بود.
- رابطه R_2 نیز دارای خاصیت ضدتقارن است.
- رابطه R_3 نیز ضدتقارن است زیرا اگر $a=b$ و $b=a$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت که $a=b$ است.
- رابطه R_4 خاصیت تقارن ندارد، از $a=b+1$ نمی‌توان نتیجه گرفت $b=a+1$ و همچنین خاصیت ضدتقارن ندارد، زیرا از اینکه $a=b+1$ و $b=a+1$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $a=b$
- رابطه R_5 ضدمتقارن است، زیرا اگر b عدد صحیح و منفی باشد و $a=|b|$ آن گاه $b=a/|b|$ برقرار نیست. در اینصورت گزاره شرطی به خاطر نادرست بودن قسمت مقدم، درست خواهد بود. بنابراین این رابطه ضدتقارن است.
- رابطه R_6 ضدتقارن نیست، زیرا $a+b > 2$ و $b+a > 2$ تساوی $a=b$ را نتیجه نمی‌دهد.

❏ مثال ۲-۱۶: رابطه بخش‌پذیری (عاد کردن) روی اعداد صحیح مثبت (اعداد طبیعی) را از جهت خاصیت تقارن و ضدتقارن بررسی نمایید.
حل:

این رابطه خاصیت تقارن ندارد، زیرا $4 \mid 2$ ولی $2 \nmid 4$.

اما این رابطه خاصیت ضدتقارن دارد، زیرا اگر a/b و b/a آن گاه $a=b$ خواهد بود. به عنوان مثال اگر عدد ۲ و ۴ را در نظر بگیریم، برای خاصیت ضدتقارن باید از اینکه $4 \mid 2$ و $2 \mid 4$ نتیجه گرفت که $4=2$. دقت نمایید چون قسمت مقدم شرط برقرار نیست، بنابراین کل شرط درست خواهد بود و در نتیجه خاصیت ضدتقارن برقرار خواهد بود.



به‌طور مشابه می‌توان نشان داد رابطه بخش‌پذیری (عاد کردن) روی اعداد صحیح متقارن نیست، و همچنین ضد متقارن نیز نمی‌باشد.

❏ خاصیت متعدی: رابطه R تعریف شده بر مجموعه A دارای خاصیت متعدی است اگر برای هر سه عضو $a, b, c \in A$ از aRb و bRc نتیجه شود aRc در این صورت گوییم R متعدی است.

$$\forall a, b, c \in A, (a, b) \in R, (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$$

❑ قضیه ۳-۲: رابطه R روی مجموعه A متعدی است اگر و فقط اگر $R^+ \subseteq R$. در حالت کلی رابطه R روی مجموعه A متعدی است اگر و فقط $R^n \subseteq R$ $\forall n > 1$. اثبات در [۷] بیان شده است.

❏ مثال ۱۷-۲: کدام یک از روابط تعریف شده در مثال ۵-۲، خاصیت متعدی دارند؟ حل:

روابط R_1, R_2, R_3 و R_4 خاصیت متعدی دارند. روابط R_5 خاصیت متعدی ندارد. زیرا اگر $a = b + 1$ و $b = c + 1$ آن گاه $a = c + 2$ یعنی $(a, c) \notin R$.

رابطه R_6 خاصیت متعدی ندارد، زیرا:

به عنوان مثال $2 \geq 2 + 2$ و $4 \geq 2 + (-1)$ ولی $2 \not\geq 4 + (-1)$.

❏ مثال ۱۸-۲: آیا رابطه عاد کردن خاصیت متعدی دارد؟ حل:

بله. اگر a/b عدد صحیحی مانند k وجود دارد که $b = ak$ و اگر b/c عدد صحیحی مانند k' وجود دارد که $c = bk'$ در نتیجه می‌توان گفت: $c = bk' = akk'$ ، به عبارت دیگر a/c .

۲-۲-۴- بستار رابطه

بستار در لغت، به معنای گسترش دهنده است. در واقع هدف از تعریف بستار رابطه، گسترش رابطه، به نحوی است که خاصیت مورد نظر را داشته باشد.

❏ بستار رابطه: بستار یک رابطه دلخواه R روی $A \times B$ کوچک‌ترین رابطه شامل R است که دارای خاصیت مورد نظر باشد.

برای یک رابطه، بستارهای بازتابی، متقارن و متعدی قابل تعریف است.

❏ بستار بازتابی: به کوچک‌ترین رابطه شامل R که دارای خاصیت بازتابی باشد، بستار بازتابی آن رابطه گویند. در این حالت لزوماً $A = B$.

$$\bar{R}_{xx} = RU\{(x, x) \mid x \in A\}$$

❏ مثال ۱۹-۲: فرض کنید $A = B = \{1, 2, 3\}$ و $R = \{(1, 2), (1, 1), (2, 1)\}$ بستار بازتابی رابطه فوق را بیابید. حل:

$$\bar{R}_{xx} = RU\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$$

❏ بستار متقارن: کوچک‌ترین رابطه شامل R که دارای خاصیت تقارنی باشد، بستار متقارن آن رابطه گویند.

$$\bar{R}_{xy} = RU\{(y, x) \mid (x, y) \in R\} = RUR^{-1}$$

❏ مثال ۲۰-۲: فرض کنید $A = B = \{1, 2, 3\}$ و $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 3)\}$ بستار متقارن رابطه فوق را بیابید. حل:

$$\bar{R}_{xy} = RUR^{-1} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

❏ بستار متعدی: کوچک‌ترین رابطه شامل R که دارای خاصیت متعدی باشد، بستار متعدی آن رابطه نامیده می‌شود. R^∞ می‌تواند به عنوان بستار متعدی رابطه R تعریف شود، که در آن:

$$R^\infty = RUR^+UR^+ \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

قضیه ۲-۴: اگر $|A|=n$, $R \subseteq A \times A$ آن‌گاه داریم:

$$R^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^n R^i$$

اثبات در [۷] قضیه ۲-۴ بیان شده است.

نتیجه:

در محاسبه R^k ($1 \leq k \leq n$) اگر $R^{k+1} = R^k$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$R^i = R^k \quad (k \leq i \leq n)$$

بنابراین:

$$R^\infty = \bigcup_{i=1}^k R^i$$

مثال ۲-۲۱: فرض کنید $R = \{(1,3), (1,4), (3,2), (2,1)\}$ رابطه‌ای روی

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد. بستر متعددی رابطه فوق را بیابید.

حل:

با توجه به تعریف بستر متعددی و قضیه ۲-۴ داریم:

$$R' = R \circ R = \{(1,2), (2,3), (2,4), (3,1)\}$$

$$R'' = R \circ R' = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,4)\}$$

$$R''' = R \circ R'' = \{(1,3), (1,4), (3,2), (2,1)\}$$

$$R^* = R' \cup R'' \cup R'''$$

$$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$$

همان‌طور که در مثال قبل ملاحظه شد، برای n های بزرگ، یافتن بستر متعددی یک رابطه به آسانی امکان‌پذیر نیست. در بخش‌های بعد روش‌های ساده‌تری برای محاسبه بستر متعددی معرفی خواهد شد.

۲-۲-۵- رابطه هم‌ارزی

یک رابطه روی مجموعه A رابطه هم‌ارزی نامیده می‌شود، اگر این رابطه دارای سه خاصیت بازتابی، تقارن و تعدی باشد.

مثال ۲-۲۲: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ در این صورت R یک رابطه هم‌ارزی روی A می‌باشد زیرا دارای سه خاصیت بازتابی، تقارن و تعدی است.

به طور کلی رابطه $R = \{(x,x) | x \in A\}$ را رابطه همانی می‌نامیم که یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه A می‌باشد.

مثال ۲-۲۳: فرض کنید رابطه R در مجموعه تمام کلمات زبان فارسی چنین تعریف شده باشد که aRb اگر و تنها اگر تعداد حروف a و b با یکدیگر برابر باشند. آیا این رابطه هم‌ارزی است؟

حل:

اگر $L(a)$ تعداد حروف a و $L(b)$ تعداد حروف b در کلمه در نظر گرفته شود، پس رابطه R به این ترتیب است که:

$$aRb \Leftrightarrow L(a) = L(b)$$

- از آنجا که $L(a) = L(a)$ در نتیجه aRa یعنی خاصیت بازتابی در این رابطه وجود دارد.
- اگر aRb یعنی $L(a) = L(b)$ آن‌گاه $L(b) = L(a)$ و این یعنی bRa در نتیجه این رابطه خاصیت تقارن نیز دارد.
- اگر aRb یعنی $L(a) = L(b)$ و اگر bRc آن‌گاه $L(b) = L(c)$ حال می‌توان نتیجه گرفت که $L(a) = L(c)$ و این به معنی است که aRc در نتیجه این رابطه خاصیت تعدی نیز دارد.

با توجه به برقراری خواص فوق، رابطه R دارای خاصیت هم‌ارزی است.

مثال ۲-۲۴: رابطه زیر روی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ یک رابطه هم‌ارزی است.

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,3), (4,2)\}$$

که مثال ۲-۲۵: دو عدد صحیح a و b را به پیمانه m (m عدد طبیعی و مثبت) هم‌نهشت گویند، هرگاه $a-b$ مضربی از m باشد. این رابطه به صورت $a \equiv b \pmod{m}$ نشان داده می‌شود، لذا:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a-b=mk$$

آیا رابطه هم‌نهشتی، دارای خاصیت هم‌ارزی است؟

حل:

- از $a-a=0$ می‌توان نوشت $a \equiv a \pmod{m}$ در نتیجه این رابطه خاصیت بازتابی دارد.
- اگر $a \equiv b \pmod{m}$ یعنی $a-b=km$ و در نتیجه $b-a=(-k)m$ بنابراین $b-a$ نیز مضربی از m است، یعنی $b \equiv a \pmod{m}$ بنابراین رابطه فوق دارای خاصیت تقارن نیز می‌باشد.
- $a \equiv b \pmod{m}$ به این معنی است که $a-b=mk$ و $b \equiv c \pmod{m}$ به این معنی است که $b-c=mk'$ در نتیجه $a-c=m(k+k')$ پس $a \equiv c \pmod{m}$ بنابراین خاصیت هم‌نهشتی دارای خاصیت تعدی است.

با استفاده از نتایج فوق، خاصیت هم‌نهشتی خاصیت هم‌ارزی دارد.

که مثال ۲-۲۶: کدام یک از روابط مثال ۲-۵ خاصیت هم‌ارزی دارند؟

حل:

تنها رابطه R_7 دارای خاصیت هم‌ارزی است.



که مثال ۲-۲۷: در زبان برنامه‌نویسی C++ ساختار `union` اجازه می‌دهد دو یا چند متغیر، دارای فضای حافظه مشترکی باشند. برای مثال ساختار `union` زیر را در نظر بگیرید:

```
union
{
    int a;
    int c;
    int p;
};
```

این ساختار مشخص می‌نماید که متغیرهای a و c و p از یک فضای حافظه استفاده

روابط روی مجموعه‌ها، توابع ۷۳

می‌نمایند. اگر رابطه R این‌گونه تعریف شود که aRb اگر و فقط اگر، a و b در یک `union` باشند، ثابت نمایید این رابطه هم‌ارزی است.

حل:

- این رابطه خاصیت بازتابی دارد، زیرا aRa نشان می‌دهد که a و خودش در یک `union` هستند.
- اگر aRb باشد، آن‌گاه a و b نیز در یک `union` قرار دارند؛ بنابراین bRa در نتیجه خاصیت تقارن برقرار است.
- aRb نتیجه می‌دهد a و b در یک `union` قرار دارند. از طرف دیگر bRc نشان می‌دهد b و c نیز در یک `union` قرار دارند. بنابراین a و c نیز در یک `union` قرار دارند، یعنی aRc در نتیجه این رابطه خاصیت تعدی نیز دارد؛ پس R یک رابطه هم‌ارزی است.



که مثال ۲-۲۸: در بحث ارتباطات، دو کامپیوتر زمانی با هم می‌توانند تبادل اطلاعات داشته باشند که بین آنها ارتباط شبکه‌ای برقرار باشد، یکی از دستورات بررسی اتصال شبکه‌ای، دستور `ping` می‌باشد. فرض کنید a و b دو کامپیوتر باشند. رابطه R روی مجموعه کامپیوترها به صورت زیر تعریف می‌شود:

a با b `ping` داشته باشد $\Leftrightarrow aRb$

این رابطه هم‌ارزی است زیرا:

- هر کامپیوتر با خودش اتصال شبکه‌ای دارد.
- اگر کامپیوتر a با کامپیوتر b `ping` داشته باشد، b نیز با a `ping` خواهد داشت.
- اگر کامپیوتر a با کامپیوتر b و کامپیوتر b با کامپیوتر c `ping` داشته باشد، a نیز با c `ping` خواهد داشت.



که مثال ۲-۲۹: فرض کنید W مجموعه صفحات وب باشد. رابطه R عبارتست از:

اگر لینکی از صفحه a به صفحه b وجود داشته باشد $\Leftrightarrow aRb$

این رابطه هم‌ارزی نیست، زیرا خاصیت تعدی ندارد.



۲-۲-۶- کلاس‌های هم‌ارزی

☐ کلاس هم‌ارزی: اگر رابطه R یک رابطه هم‌ارزی باشد، مجموعه تمام عناصری از A که تحت این رابطه با عضو $a \in A$ در ارتباط هستند، کلاس هم‌ارزی a نامیده می‌شود. بنابراین $[a] = \{b \in A / aRb\}$.

کلاس‌های هم‌ارزی $a \in A$ با نماد $[a]_R$ (در برخی کتب با نماد $\{a\}$) نمایش داده می‌شود.

☞ مثال ۲-۳۰: در مثال ۲-۲۴ کلاس‌های هم‌ارزی $[1]$ و $[3]$ عبارتند از:

$$[1] = \{1, 2, 4\} \quad [3] = \{3\}$$

☞ مثال ۲-۳۱: کلاس‌های هم‌ارزی 0 و 1 در بخش‌پذیری به پیمانه 4 را مشخص نمایید.
حل:

کلاس هم‌ارزی 0 شامل تمام اعداد صحیحی مانند a است که $a \equiv (mod 4)$ ، بنابراین:

$$[0]_4 = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

کلاس هم‌ارزی 1 شامل تمام اعداد صحیحی مانند a است که $a \equiv (mod 4)$ به عبارت دیگر در پی یافتن تمام $a \in \mathbb{Z}$ هستیم که $a-1$ بر 4 بخش‌پذیر باشد، لذا:

$$[1]_4 = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

☞ مثال ۲-۳۲: فرض کنید n عددی صحیح و S مجموعه‌ای از رشته‌های بیتی باشد، رابطه R_n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall s, t \in S \quad sR_n t \Leftrightarrow s=t \text{ یا } t \text{ برابر } s \text{ باشد}$$

نشان دهید این رابطه، یک رابطه هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی رشته 0111 را در رابطه هم‌ارزی R_n بیابید.

حل:

رابطه R_n رابطه هم‌ارزی است زیرا:

- اگر s یک رشته بیتی از S باشد چون $s=s$ پس رابطه بازتابی است.

- اگر s و t دو رشته بیتی از S باشند که $sR_n t$ پس $s=t$ یا n کاراکتر اول s و t برابرند. از آنجا $t=s$ یا n کاراکتر اول t و s برابرند در نتیجه tRs و رابطه R متقارن است.
- اگر s, t, r رشته‌های بیتی از S باشند که $sR_n t$ و $tR_n r$ یا

$$sR_n t \Leftrightarrow s=t \text{ یا } t \text{ برابر } s \text{ باشد}$$

$$tR_n r \Leftrightarrow t=r \text{ یا } r \text{ برابر } t \text{ باشد}$$

چند حالت باید در نظر گرفت:

۱. اگر $s=t$ و $t=r$ پس $s=r$ در نتیجه $sR_n r$.
۲. اگر $s=t$ و n کاراکتر اول t و r برابر باشند. آن‌گاه n کاراکتر اول s و r برابرند و $sR_n r$.
۳. اگر $t=r$ و n کاراکتر اول s و t برابر باشند. مشابه حالت ۲، $sR_n r$.
۴. اگر n کاراکتر اول s و t برابر و همچنین n کاراکتر اول t و r برابر باشند، آن‌گاه n کاراکتر اول s و r نیز برابر خواهد بود و لذا $sR_n r$ بنابراین R_n خاصیت تعدی دارد.

وجود این ۳ خاصیت نشان می‌دهد R_n یک رابطه هم‌ارزی است.

رشته‌های بیتی هم‌ارز با 0111 ، رشته‌هایی با حداقل ۳ کاراکتر اول 011 می‌باشد:

$$[011]_{R_3} = \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, \dots\}$$

☞ مثال ۲-۳۳: در زبان برنامه‌نویسی C نام یک متغیر شامل رشته‌ای ناتمام از حروف بزرگ و کوچک لاتین، عدد صحیح و علامت خط زیر (_) است به طوریکه نام متغیر نمی‌تواند با عدد شروع شود به عنوان مثال $test2$ و $test_$ متغیرهای مجاز و $2test$ غیر مجاز است. در بعضی از کامپایلرهای زبان C نام متغیر محدود به ۳۱ حرف می‌شود، بنابراین در این نوع کامپایلرها دو متغیر زمانی مساویند که ۳۱ حرف اول آنها برابر باشند به عبارتی اگر x, y نام دو متغیر باشد:

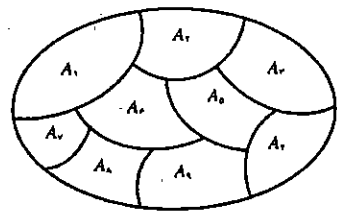
$$xR_{31} y \Leftrightarrow x, y \text{ برابرند}$$

مثلاً دو متغیر

روابط روی مجموعه‌ها، توابع ۷۷

افراز: خانواده $\{A_i\}_{i \in I}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه A را افزایی از A گویند، هرگاه در دو شرط زیر صدق کنند:

- $\forall i, j \in I \quad A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$



شکل ۱-۲

مجموعه‌های موجود در یک افزای را بلوک‌های آن افزای گویند.

قضیه ۲-۶: هر رابطه هم‌ارزی روی مجموعه A ، یک افزای بر روی A ایجاد می‌کند و برعکس هر افزای مجموعه A ، یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه A القا می‌کند.

اثبات:

اولاً با توجه به قضیه ۲-۵ می‌توان دید که کلاس‌های هم‌ارزی یا با هم برابرند و یا از هم جدايند. یعنی اگر $[a] \neq [b]$ آن‌گاه $[a] \cap [b] = \emptyset$.

ثانیاً اجتماع تمام کلاس‌های هم‌ارزی مجزای R برابر است با A زیرا هر عضو

$a \in A$ در کلاس هم‌ارزی خودش می‌باشد، پس $a \in [a]$ پس $\bigcup_{a \in A} [a] = A$.

اثبات عکس قضیه در [۴] قضیه ۷-۷ بیان شده است.

مثال ۲-۳۴: کلاس‌های هم‌ارزی تولید شده در هم‌نهشتی به پیمانه ۵ را بیابید.

حل:

با اندکی تأمل مشخص می‌شود که برای یافتن کلاس‌های هم‌ارزی مجزای تولید شده به هم‌نهشتی m باید باقیمانده تقسیم اعداد صحیح بر عدد m را در نظر گرفت. بنابراین کلاس‌های هم‌ارزی مجزای به پیمانه m عبارتند از $[0]$ ، $[1]$ ، ...، $[m-1]$.

$x = \text{Number_of_name_tropical_storms}$
 $y = \text{Number_of_name_tropical_storms_in_the_Atlantic}$

با هم برابرند. از اینکه متغیر $x = \text{Number_of_name_tropical_storms}$ دقیقاً ۳۱ کاراکتر دارد، کلاس هم‌ارزی x شامل متغیرهایی است که ۳۱ کاراکتر اول آنها شامل $\text{Number_of_name_tropical_storms}$ است. بنابراین متغیر y یکی از اعضای کلاس هم‌ارزی x است.

۷-۲-۲-۷-افراز و کلاس‌های هم‌ارزی

کلاس‌های هم‌ارزی متناظر با هر رابطه هم‌ارزی، عناصر یک مجموعه A را چنان دسته‌بندی می‌کنند که:

- هیچ دسته‌ای تهی نیست.
 - هر دو دسته متمایز، اشتراکی با یکدیگر ندارند.
 - اجتماع تمام دسته‌ها برابر با مجموعه A می‌باشد.
- مطلب فوق در قضیه ۲-۵ اثبات خواهد شد.

قضیه ۲-۵: فرض کنید R یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه A است، برای هر $a, b \in A$ گزاره‌های زیر معادل هستند.

- (I) aRb
- (II) $[a] = [b]$
- (III) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

اثبات:

$(I \Rightarrow II)$

فرض کنید aRb و $c \in [a]$ پس aRc از اینکه R متقارن است داریم: bRa و aRc از خاصیت متعدی R می‌توان گفت bRc پس $c \in [b]$ و $[a] \subseteq [b]$. به همین ترتیب $[b] \subseteq [a]$ در نتیجه $[a] = [b]$.

$II \Rightarrow III$

فرض کنید $[a] = [b]$ ، چون کلاس‌های هم‌ارزی غیرتهی هستند، پس:

$$[a] \cap [b] = [a] \neq \emptyset$$

$III \Rightarrow I$ اثبات بر عهده دانشجو است.

در این مثال، باقیمانده اعداد صحیح بر ۵ تنها یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ خواهد شد. بنابراین کلاس‌های هم‌ارزی مجزای تولید شده به پیمانه ۵ عبارتند از:

$$[0]_5 = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$[1]_5 = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$[2]_5 = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$[3]_5 = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$[4]_5 = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

این کلاس‌های هم‌ارزی مجزا بوده و هر عدد صحیح دقیقاً در یک کلاس هم‌ارزی قرار خواهد گرفت، پس این ۵ کلاس هم‌ارزی، افرازی روی $\mathbb{Z}$ می‌باشند.

مثال ۲-۳۵: رابطه هم‌ارزی R_r روی رشته‌های بیتی در مثال ۲-۳۲ را در نظر بگیرید. کلاس‌های هم‌ارزی روی R_r را بیابید.

حل:

از آنجا که هر رشته به طول کمتر از ۳ هم‌ارز با خودش می‌باشد، پس:

$$[\lambda]_{R_r} = \{\lambda\}$$

$$[0]_{R_r} = \{0\}$$

$$[1]_{R_r} = \{1\}$$

$$[00]_{R_r} = \{00\}$$

$$[01]_{R_r} = \{01\}$$

$$[10]_{R_r} = \{10\}$$

$$[11]_{R_r} = \{11\}$$

که در آن λ رشته تهی (رشته‌ای به طول صفر) است.

با توجه به تعریف R_r هر رشته به طول حداقل ۳ هم‌ارز با یکی از ۸ رشته ۰۰۰ و ۰۰۱ و ۰۱۰ و ۰۱۱ و ۱۰۰ و ۱۰۱ و ۱۱۰ و ۱۱۱ می‌باشد.

$$[000]_{R_r} = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \dots\}$$

$$[001]_{R_r} = \{001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \dots\}$$

$$[010]_{R_r} = \{010, 011, 100, 101, 110, 111, \dots\}$$

$$[011]_{R_r} = \{011, 100, 101, 110, 111, \dots\}$$

$$[100]_{R_r} = \{100, 101, 110, 111, \dots\}$$

$$[101]_{R_r} = \{101, 110, 111, \dots\}$$

$$[110]_{R_r} = \{110, 111, \dots\}$$

$$[111]_{R_r} = \{111, \dots\}$$

هر رشته بیتی دقیقاً در یکی از این کلاس‌های هم‌ارزی قرار دارد، با توجه به قضیه ۲-۶ مجموعه همه کلاس‌های هم‌ارزی اخیر، افرازی روی مجموعه تمام رشته‌های بیتی است.

مثال ۲-۳۶: رابطه R روی مجموعه اعداد حقیقی به صورت:

$$xRy \text{ اگر و فقط اگر } x^2 - y^2 = x - y$$

تعریف شده است.

الف) نشان دهید رابطه R هم‌ارزی است.

ب) دسته هم‌ارزی $[27]$ را به دست آورید.

حل:

الف) از اینکه $x^2 - x^2 = x - x$ ، R بازتابی است.

xRy اگر و فقط اگر $x^2 - y^2 = x - y$ پس $x^2 - y^2 = y - x$ یعنی yRx بنابراین R متقارن است.

xRy اگر و فقط اگر $x^2 - y^2 = x - y$ و yRz اگر و فقط اگر $y^2 - z^2 = y - z$. با جمع دو رابطه

فوق داریم $x^2 - z^2 = x - z$ پس xRz و R متعدی است.

ب)

$$[27] = \{x \in R \mid xR27\} = \{x \in R \mid x^2 - 27^2 = x - 27\}$$

با حل معادله $x^2 - 27^2 = x - 27$ داریم $x = 27$ ، $x = -26$ پس $[27] = \{-26, 27\}$.

مثال ۲-۳۷: رابطه R روی مجموعه اعداد صحیح و مثبت به صورت زیر تعریف

شده است.

$$aRb \text{ اگر و فقط اگر } \exists m \in \mathbb{Z} : \frac{a}{b} = 2^m$$

الف) نشان دهید رابطه R هم‌ارزی است.

ب) دسته هم‌ارزی $[۱]$ و $[۳]$ را به دست آورید.

حل:

الف) به ازای $m=۰$ داریم $\frac{a}{a} = 1 = 2^0$ پس R بازتابی است.

اگر aRb و فقط اگر $\frac{a}{b} = 2^m$ ، $\exists m \in \mathbb{Z}$ از طرفی $-m \in \mathbb{Z}$ پس $\frac{b}{a} = 2^{-m}$ یعنی bRa بنابراین متقارن است.

اگر aRb و فقط اگر $\frac{a}{b} = 2^m$ و bRc و $\frac{b}{c} = 2^n$ فقط اگر $\frac{a}{c} = 2^{m+n}$ با ضرب دو رابطه فوق داریم $\frac{a}{c} = 2^{nm}$ پس aRc بنابراین R متعدی است.

ب)

$$[۱] = \{a \in \mathbb{Z}^+ \mid aR1\} = \{a \in \mathbb{Z}^+ \mid \exists m \in \mathbb{Z} : a = 2^m\}$$

پس:

$$[۱] = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$$

و

$$[۳] = \{a \in \mathbb{Z}^+ \mid aR3\} = \{a \in \mathbb{Z}^+ \mid \exists m \in \mathbb{Z} : a = 3 \times 2^m\}$$

پس:

$$[۳] = \{3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots\}$$

مثال ۳۸-۲: فرض کنید که $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $P = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ یک افراز برای A باشد. رابطه هم‌ارزی R در A تعیین شده توسط P را به دست آورید.

حل:

بلوک‌های P عبارتند از: $\{1, 2, 3\}, \{4\}$. هر عضو از یک بلوک، فقط و فقط با همه اعضای آن بلوک در رابطه است. بنابراین داریم:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

برای نمایش روابط روی مجموعه‌های متناهی روش‌های گوناگونی تعریف شده است. یکی از روش‌ها، نمایش اعضای رابطه است، که پیش از این بیان شد. در ادامه استفاده از ماتریس صفر-یک و گراف جهت‌دار برای نمایش اعضای یک رابطه معرفی

خواهد شد.

۳-۲- روابط و ماتریس صفر-یک

ابتدا شرح مختصری از ماتریس‌های صفر-یک و نحوه پیاده‌سازی عملیات منطقی روی آن‌ها بیان می‌گردد و سپس نحوه چگونگی نمایش اعضای یک رابطه با استفاده از این ماتریس‌ها بیان می‌شود.

۳-۲-۱- ماتریس‌های صفر-یک و عملیات منطقی روی آن‌ها

ماتریس صفر-یک: ماتریسی با درایه‌های صفر و یک، ماتریس صفر-یک نامیده می‌شود. به این ماتریس‌ها، ماتریس‌های بولی نیز گویند.

این نوع ماتریس‌ها، اغلب برای ساختارهای گسسته استفاده و بر مبنای عملگرهای منطقی $\wedge$ (AND) و $\vee$ (OR) روی یک زوج بیت تعریف می‌شوند؛ اگر a_1 و a_2 دو بیت از حافظه باشند، داریم:

$$a_1 \wedge a_2 = \begin{cases} 1 & a_1 = a_2 = 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{و} \quad a_1 \vee a_2 = \begin{cases} 1 & a_1 = 1 \text{ یا } a_2 = 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین می‌توان عملیات منطقی $\wedge$ و $\vee$ را روی ماتریس‌های بولی به صورت زیر تعریف نمود. به عملگرهای منطقی $\wedge$ و $\vee$ روی دو ماتریس بولی به ترتیب $\wedge$ و $\vee$ است آن دو ماتریس بولی می‌گویند. از آنجایی که درایه‌های ماتریس بولی گویای ارتباط اعضای رابطه با یکدیگر و اعمال دو عملگر منطقی فوق روی هر جفت درایه ماتریس، مشابه ترکیب عطفی یا فصلی دو گزاره می‌باشند، بنابراین در کتاب حاضر برای درک بهتر، از عبارت ترکیب عطفی و ترکیب فصلی بجای $\wedge$ و $\vee$ است استفاده می‌نماییم.

ترکیب عطفی دو ماتریس بولی: فرض کنید $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ ماتریس بولی باشند، ترکیب عطفی ($\wedge$) A و B ماتریسی چون C است که در آن:

$$A \wedge B = [c_{ij}]_{n \times m} : c_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij} \quad \forall i=1, \dots, n \text{ و } \forall j=1, \dots, m$$

۱۱ ترکیب فصلی دو ماتریس بولی: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{n \times m}$ و $B=[b_{ij}]_{n \times m}$ دو ماتریس بولی باشند، ترکیب فصلی (وِست) A و B ماتریسی چون C است که در آن:

$$A \vee B = [c_{ij}]_{n \times m} : c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij} \quad \forall i=1, \dots, n \text{ و } \forall j=1, \dots, m$$

با استفاده از ترکیب عطفی و فصلی دو ماتریس بولی می‌توان حاصلضرب بولی دو ماتریس بولی را نیز تعریف نمود.

۱۲ حاصلضرب بولی دو ماتریس بولی: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{n \times m}$ و $B=[b_{ij}]_{n \times m}$ دو ماتریس بولی باشند، حاصلضرب بولی A و B را به صورت $A \odot B$ می‌نویسند، که در آن $A \odot B = [c_{ij}]_{n \times m}$ و

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}) = \bigvee_{k=1}^m (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

به عبارت دیگر می‌توان c_{ij} را به صورت زیر تعریف کرد:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists k, 1 \leq k \leq m, (a_{ik} = b_{kj} = 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

طبق تعریف، اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد، آن‌گاه روابط زیر برقرار است:

- $A^{(1)} = I_n$
- $\forall r > 0 : A^{(r)} = A^{(r-1)} \odot A$

۱۳ مثال ۲-۳۹: ماتریس‌های A و B در زیر داده شده است. $A \vee B$ و $A \wedge B$ را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

طبق تعریف داریم:

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

روابط روی مجموعه‌ها، توابع ۸۳

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 1 & 1 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 1 & 1 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 1 & 1 \vee 1 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{(1)} = C \odot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۲-۳-۲ رابطه و ماتریس‌های صفر-یک

۱۴ ماتریس صفر-یک رابطه: فرض کنید $R \subseteq A \times B$, $|A|=n$, $|B|=m$ باشد. ماتریس صفر-یک رابطه R ماتریس $M_R = [m_{ij}]_{n \times m}$ است که در آن:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (a_i, b_j) \in R \\ 0 & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

ماتریس صفر-یک رابطه، به اختصار ماتریس رابطه نامیده می‌شود.

۱۵ مثال ۲-۴۰: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، دو رابطه R و S به صورت زیر داده شده است.

$$R = \{(x, y) | x, y \in A, x \leq y\}$$

$$S = \{(x, y) | x, y \in A, x < y\}$$

ماتریس روابط R و S را بیابید.
حل:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۶ مثال ۲-۴۱: ماتریس صفر-یک رابطه $R \subseteq A \times B$ با $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ به صورت زیر تعریف شده است. رابطه R را بیابید.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

سطر اول تا سوم به ترتیب اعضای a, b, c در مجموعه A و ستون اول تا سوم نیز به ترتیب اعضای $۱, ۲, ۳$ در مجموعه B را نشان می‌دهند، بنابراین:

$$R = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

با در اختیار داشتن ماتریس روابط، ماتریس اعمال جبری روی روابط را به صورت زیر تعریف می‌شود.

❏ ماتریس اشتراک روابط: فرض کنید $M_R = [r_{ij}]_{n \times m}$ و $M_S = [s_{ij}]_{n \times m}$ ماتریس روابط R و S باشند؛ آن‌گاه ماتریس اشتراک دو رابطه، به صورت $M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$ تعریف می‌شود.

❏ ماتریس اجتماع روابط: فرض کنید $M_R = [r_{ij}]_{n \times m}$ و $M_S = [s_{ij}]_{n \times m}$ ماتریس روابط R و S باشند؛ آن‌گاه ماتریس اجتماع دو رابطه، به صورت $M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$ تعریف می‌شود.

❏ ماتریس ترکیب روابط: فرض کنید $M_R = [r_{ij}]_{n \times m}$ و $M_S = [s_{ij}]_{m \times n}$ ماتریس روابط R و S باشند؛ آن‌گاه ماتریس ترکیب رابطه SoR به صورت $M_{SoR} = M_R \odot M_S$ تعریف می‌شود.

❏ ماتریس وارون رابطه: فرض کنید $M_R = [r_{ij}]_{n \times m}$ ماتریس رابطه R باشد؛ آن‌گاه ماتریس وارون رابطه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = [c_{ij}]_{m \times n} \quad c_{ij} = \begin{cases} r_{ji} = 1 \\ \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

❏ ماتریس مکمل رابطه: فرض کنید $M_R = [r_{ij}]_{n \times m}$ ماتریس رابطه R باشد؛ آن‌گاه ماتریس مکمل رابطه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M_{R^c} = [c_{ij}]_{n \times m} \quad c_{ij} = \begin{cases} r_{ij} = 0 \\ \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

❏ ماتریس تفاضل روابط: فرض کنید $M_R = [r_{ij}]_{n \times m}$ و $M_S = [s_{ij}]_{n \times m}$ ماتریس روابط R و S باشند؛ آن‌گاه ماتریس تفاضل دو رابطه به صورت $M_{R-S} = M_{R \cap S}^c$ تعریف می‌شود.

❏ مثال ۲-۲۲: با توجه به مثال قبل، $M_{R \cap S}$ ، $M_{R \cup S}$ و $M_{R^{-1}}$ را بیابید.

حل:

$$M_{R \cap S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{R \cup S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۳-۳-۲- بررسی خواص رابطه از روی ماتریس رابطه

❏ تعریف: فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times m$ باشند. گوئیم A نایبتر از B است، هرگاه: $\forall i, j: a_{ij} \leq b_{ij}$ و می‌نویسیم $A \ll B$.

• بررسی خاصیت بازتابی: اگر تمامی عناصر روی قطر اصلی در ماتریس رابطه M_R عدد یک باشند؛ آن‌گاه آن رابطه خاصیت بازتابی دارد. یعنی:

$$\forall i=1, 2, 3, \dots, n: m_{ii}=1$$

به عبارت دیگر $M_R \ll I_n$ که در آن I_n ماتریس همانی $n \times n$ است.

• بررسی خاصیت ضدبازتابی: اگر تمام عناصر قطر اصلی در ماتریس رابطه M_R عدد صفر باشند؛ آن‌گاه آن رابطه خاصیت ضدبازتابی دارد.

• بررسی خاصیت تقارنی: اگر در ماتریس رابطه M_R خاصیت زیر برقرار باشد:

$$\forall i, j=1, 2, 3, \dots, n: m_{ij} = m_{ji}$$

آن‌گاه رابطه R متقارن است. به عبارت دیگر $M_R = M_R^T$.

• بررسی خاصیت ضدتقارنی: اگر در ماتریس رابطه M_R از اینکه درایه m_{ij} برابر با یک باشد، بتوان نتیجه گرفت که درایه m_{ji} برابر صفر است، آن‌گاه رابطه R ضدمتقارن است. به عبارت دیگر: $M_R \wedge M_R^T \ll I_n$.

• بررسی خاصیت تعدی: همان‌طور که می‌دانیم اگر در ماتریس M_R ، $m_{ik}=1$ و $m_{kj}=1$ ، آن‌گاه برای یک رابطه متعدی باید داشته باشیم: $m_{ij}=1$ از طرفی $m_{ik}=1$ و $m_{kj}=1$ به این مفهوم است که در M_{R^2} ، $m_{ij}=1$ می‌باشد؛ پس متعدی بودن رابطه R به این معنی است که اگر در M_R درایه‌ای برابر ۱ باشد، آن‌گاه همان درایه در M_R نیز باید دارای مقدار ۱ باشد. به عبارت دیگر هر درایه M_{R^2} باید کوچک‌تر یا مساوی درایه متناظر در M_R باشد، یعنی: $M_{R^2} \ll M_R$.

مثال ۴۳-۲: ماتریس روابط R و S در زیر داده شده است. خواص بازتابی، تقارنی و تعدی این روابط را بررسی نمایید.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

رابطه R بازتابی است، زیرا درایه‌های روی قطر اصلی همگی یک می‌باشد؛ از اینکه $M_R = M_R^T$ ، رابطه R متقارن است. این رابطه متعدی است زیرا:

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow M_{R^2} \ll M_R$$

چون $S_{11}=0$ می‌باشد پس رابطه S بازتابی نیست، از طرفی رابطه ضدبازتابی نمی‌باشد، زیرا $S_{11}=S_{33}=1$ به دلیل اینکه $S_{11} \neq S_{33}$ بنابراین S متقارن نمی‌باشد؛ این رابطه متعدی نیست، زیرا:

$$M_{S^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \gg M_S$$

۲-۳-۴- بستر رابطه با استفاده از ماتریس رابطه

فرض کنید M_R ماتریس بولی رابطه R باشد، ماتریس‌های بولی بسترهای رابطه به صورت زیر به دست می‌آیند:

- ماتریس بستر بازتابی: $M_{R_{xx}} = M_R V I_n$
- ماتریس بستر تقارنی: $M_{R_{xy}} = M_{RUR^{-1}} = M_R V M_R^{-1}$
- ماتریس بستر متعدی: $M_{R^{\infty}} = V_{i=1}^n M_{R^i}$

۲-۳-۵- بستر متعدی با استفاده از الگوریتم وارشال

استفاده از ماتریس رابطه و محاسبه R^{∞} برای به دست آوردن بستر متعدی از لحاظ زمان، هزینه و ذخیره سازی حافظه مقرون به صرفه نمی‌باشد.

فرض کنید R رابطه‌ای روی A باشد، به طوریکه $|A|=n$ ، الگوریتم وارشال روشی معرفی می‌کند که در آن، دنباله‌ای از ماتریس‌های W_k ، $0 \leq k \leq n$ ایجاد می‌شود که در نهایت همان ماتریس بستر متعدی رابطه خواهد بود.

در حقیقت این الگوریتم بدون مخاسبه تمامی R^k ها و در یک زمان کوتاه‌تر، ماتریس بستر متعدی را محاسبه خواهد نمود.

الگوریتم وارشال به صورت زیر است:

۱. در مرحله اول $W_0 = M_R$ در نظر گرفته می‌شود.

۲. مراحل زیر برای $0 \leq k \leq n$ انجام می‌شود:

$$W_k = W_{k-1} \quad ۱.۲$$

۲.۲. سطر k ام و ستون k ام ماتریس W_k در نظر گرفته و تعریف می‌کنیم:

$$c = \{i / m_{ik} = 1\}$$

$$r = \{j / m_{kj} = 1\}$$

۳.۲. تمام درایه‌های $c \times r$ در ماتریس W_k را ۱ قرار می‌دهیم.

۳. ماتریس بستر متعدی رابطه R است.

مثال ۴۴-۲: ماتریس رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از الگوریتم وارشل ماتریس بستر متعددی آن را بیابید.

حل:

قرار می‌دهیم:

$$W_k = M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای $k=1$ ابتدا $W_1 = W_k$ قرار داده می‌شود، سپس سطر و ستون اول در ماتریس W_1 را در نظر گرفته، تعریف می‌کنیم:

$$c = \{1, 3\} \quad r = \{1, 2\}$$

$$c \times r = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

بنابراین ماتریس W_1 به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای $k=2$ ابتدا $W_2 = W_1$ قرار داده می‌شود، سپس سطر و ستون دوم در ماتریس W_1 را در نظر گرفته، تعریف می‌کنیم:

$$c = \{1, 3\} \quad r = \{2\}$$

$$c \times r = \{(1, 2), (3, 2)\}$$

بنابراین ماتریس W_2 به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای $k=3$ ابتدا $W_3 = W_2$ قرار داده می‌شود، سپس سطر و ستون سوم در ماتریس W_2 را در نظر گرفته، تعریف می‌کنیم:

$$c = \{1, 2, 3\} \quad r = \{1, 2, 3\}$$

$$c \times r = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

بنابراین ماتریس W_3 به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

W_3 ماتریس بستر متعددی رابطه مورد نظر است.

۲-۴- گراف جهت‌دار برای نمایش روابط

رسم گراف رابطه، روش دیگری است که می‌توان از آن برای نمایش یک رابطه استفاده نمود. استفاده از گراف رابطه، درک ارتباط بین اعضای یک رابطه و نیز بررسی خصوصیات آن را تسهیل خواهد نمود.

۲-۴-۱- ساخت گراف رابطه

فرض کنید R یک رابطه روی A باشد. گراف رابطه با نماد D_R نشان داده و به صورت زیر ساخته می‌شود:

- به ازای هر $a_i \in A$ یک نقطه (یا یک رأس) در صفحه در نظر گرفته می‌شود.
- برای هر $(a_i, a_j) \in R$ ، نقطه a_i توسط پاره‌خط (پال) جهت‌داری به نقطه a_j وصل می‌شود.

مثال ۲-۴: فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 3, 5, 12, 20\}$ و $R \subseteq A \times A$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

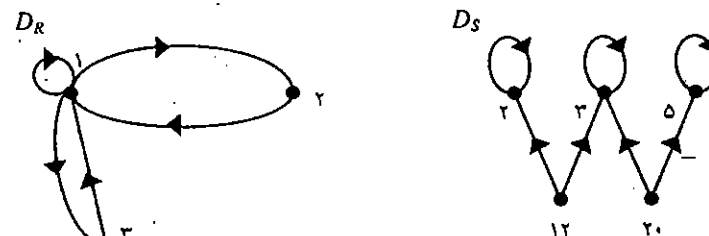
$$R = \{(x, y) / x + y < 4\}$$

$$S = \{(x, y) / y/x\}$$

گراف این دو رابطه را رسم نمایید.

حل:

گراف دو رابطه در شکل ۲-۲ نشان داده شده است.



شکل ۲-۲.

مسیر: در گراف جهت‌دار D_R یک مسیر به طول n از a به b عبارت است از دنباله‌ای از یال‌های (زوج‌های مرتب) زیر در D_R :

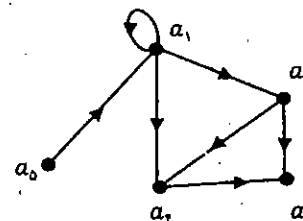
$$(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, b)$$

که به اختصار به صورت $a \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow b$ یا $ax_1x_2\dots x_{n-1}b$ نوشته می‌شود.

طوقه: مسیر aa به طول یک، طوقه نامیده می‌شود.

دور: یک مسیر در D_R دور نامیده می‌شود، هرگاه رئوس ابتدایی و انتهایی آن یکسان باشد.

مثال ۲-۴۶: با توجه به گراف جهت‌دار زیر:



شکل ۲-۳.

الف) مسیرهای به طول ۲ را بیابید.

ب) مسیرهای به طول حداقل ۲ را بیابید.

ج) دورهای موجود در گراف را بیابید.

حل:

الف) مسیرهای $a_0a_1a_2$ و $a_0a_1a_3$ و $a_0a_1a_4$ و $a_0a_1a_2a_3$ و $a_0a_1a_2a_4$ و $a_0a_1a_3a_4$ به طول ۲ هستند.

ب) تمام مسیرهای قسمت (الف) به انضمام مسیرهای $a_0a_1a_2a_3a_4$ و $a_0a_1a_2a_4a_3$ و $a_0a_1a_3a_4a_2$ و $a_0a_1a_3a_2a_4$ هم‌چنین مسیرهایی که از مسیر a_0a_1 به تعداد نامحدود بگذرند، مسیرهای با طول حداقل ۲ هستند.

ج) این گراف به غیر از طوقه رأس a_1 ، دور دیگری ندارد.

۲-۴-۲- بررسی خواص رابطه با استفاده از گراف رابطه

• بررسی خاصیت بازتابی: رابطه بازتابی است، هرگاه: هر رأس گراف رابطه دارای طوقه باشد.

• بررسی خاصیت ضدبازتابی: رابطه ضد بازتابی است، هرگاه هیچ‌کدام از رئوس گراف رابطه دارای طوقه نباشد.

• بررسی خاصیت تقارن: رابطه متقارن است، هرگاه بین هر دو رأس متمایز در گراف، دو یال مختلف‌الجهت موجود باشد.

• بررسی خاصیت ضدتقارن: رابطه ضد متقارن است، هرگاه به غیر از طوقه‌ها، بین هر دو رأس مرتبط با هم، فقط یک یال جهت‌دار موجود باشد.

☑ قضیه ۲-۷: فرض کنید $R \subseteq A \times A$ و $|A|=n$ ؛ آن‌گاه یک مسیر به طول n ($n > 0$) از a به b در D_R موجود است اگر و فقط اگر $(a, b) \in R^n$. اثبات در [۷] بیان شده است.

• بررسی خاصیت تعدی: رابطه متعدی است، هرگاه بین هر دو رأس متمایز گراف که دارای مسیری به طول ۲ باشند، مسیری به طول ۱ نیز موجود باشد.

۲-۴-۳- رسم گراف بستر رابطه

فرض کنید D_R گراف رابطه $R \subseteq A \times A$ باشد، گراف جهت‌دار بستر رابطه به صورت زیر

ساخته می‌شود:

- گرافِ بستانار بازتابی: برای کلیهٔ رئوس گراف، یال طوقه رسم می‌شود.
- گرافِ بستانار تقارنی: برای رئوس متمایزی که فقط با یک یال جهت‌دار به هم مرتبط باشند، کافی است یال جهت‌دار دیگری، مخالف جهت یال اول ترسیم نمود.
- گرافِ بستانار تعدی: با توجه به تعریفِ بستانار تعدی، باید به گونه‌ای عمل نمود که اگر بین هر دو رأس در گراف مسیری به طول $l > 1$ وجود دارد، آن‌گاه مسیری به طول ۱ نیز بین آن دو رأس رسم شود.

مثال ۲-۴۷: بستانار تعدی گراف‌های زیر را رسم کنید.



شکل ۲-۴.

حل:

(الف) با توجه به شکل ملاحظه می‌شود:

- از a به b ، a به c و a به d به ترتیب مسیرهایی به طول ۱، ۲ و ۳ وجود دارد، بنابراین کافی است مسیری به طول ۱ از a به b رسم شود.
- از b و d به هیچ یک از نقاط مسیری وجود ندارد.
- از c به a ، c به b و c به d به ترتیب مسیرهایی به طول ۱، ۲ و ۳ وجود دارد، بنابراین احتیاج به رسم یال جدید نمی‌باشد.

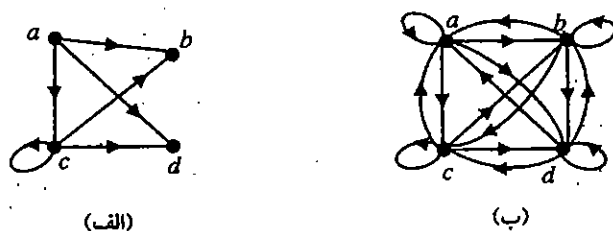
شکل ۲-۵ (الف) بستانار تعدی گراف خواهد بود.

(ب) با توجه به شکل ملاحظه می‌شود:

- از a به a ، a به b و a به c به ترتیب مسیرهایی به طول ۱، ۳ و ۲ وجود دارد، بنابراین کافی است مسیری به طول ۱ از a به رئوس a ، c و d رسم شود.

- از b به a ، b به c و b به d به ترتیب مسیرهایی به طول ۱، ۲ و ۱ وجود دارد، بنابراین کافی است مسیری به طول ۱ نیز از b به a و c رسم شود.
- از c به a ، c به b و c به d به ترتیب مسیرهایی به طول ۱، ۲ و ۱ وجود دارد، بنابراین کافی است مسیری به طول ۱ نیز از c به a و c رسم شود.
- از d به a ، d به b و d به c به ترتیب مسیرهایی به طول ۱، ۲ و ۱ وجود دارد، بنابراین کافی است مسیری به طول ۱ نیز از d به b و d رسم شود.

شکل ۲-۵ (ب) بستانار تعدی گراف خواهد بود.



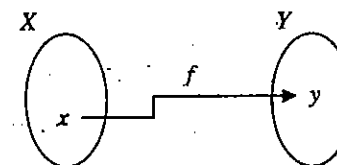
شکل ۲-۵.

۲-۵-۵- تابع و رابطه

در این بخش رابطه‌های خاصی به نام تابع مورد بررسی قرار می‌گیرند، به طوریکه یک مجموعهٔ متناهی را به یک مجموعهٔ متناهی دیگر تبدیل می‌کنند. به عنوان نمونه، خروجی کامپیوتر تابعی از ورودی آن است و یا کامپایلر برنامه‌ای به زبان سطح بالا را به مجموعه متناهی از دستورهای زبان ماشین تبدیل می‌کند.

تعریف: فرض کنید X و Y دو مجموعه دلخواه و رابطه f از X به Y باشد، به طوریکه هر عضو مجموعه X توسط f با یک و فقط یک عضو از مجموعه Y رابطه داشته باشد. در این صورت گوئیم f یک تابع از مجموعه X به مجموعه Y است و به صورت $X \rightarrow Y$ یا $Y \xleftarrow{f} X$ نشان داده می‌شود (شکل ۲-۶). دامنهٔ تابع با نماد D_f و برد آن با نماد R_f نشان داده می‌شود که در آن $D_f = X$ و $R_f \subseteq Y$.

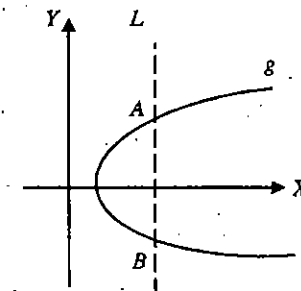
با توجه به تعریف تابع، ملاحظه می‌شود که تابع یک رابطه است. آیا هر رابطه می‌تواند بیانگر یک تابع باشد؟ پاسخ به این سوال منفی است؛ با ذکر مثال زیر، به این سوال، پاسخ واضح‌تری داده می‌شود.



شکل ۶-۲

مثال ۴۸-۲: فرض کنید $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $y = \sqrt{x+2}$. آیا این رابطه، معرف یک تابع است؟
حل:

ابتدا نمودار رابطه فوق را رسم می‌نماییم (شکل ۷-۲)، ملاحظه می‌شود خط L نمودار را در دو نقطه A و B قطع می‌کند، که نقیض تعریف تابع است؛ بنابراین رابطه g تابع نمی‌باشد.



شکل ۷-۲

۲-۵-۱- وارون تابع

همان‌طور که در بخش‌های قبل دیده شد، اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد، آن‌گاه وارون

آن یعنی R^{-1} رابطه‌ای است از Y به X است، به‌طوری‌که: $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$. فرض کنید f وارون تابع f باشد ($f: X \rightarrow Y$). در این صورت، f واروناً تابع نیست؛ زیرا:

اولاً: مجموعه تعریف f لزوماً Y نیست، بلکه ممکن است زیرمجموعه‌ای از Y باشد.

ثانیاً: منحصر بفرد بودن برد f ممکن است برقرار نباشد.

بطور مثال، اگر $(x, y), (z, y) \in f$ باشند، آن‌گاه $(y, x), (y, z) \in f^{-1}$ که متناقض با شرط دوم تعریف تابع است.

مثال ۴۹-۲: فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $f = \{y | y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$ آن‌گاه $f^{-1} = \{x | x^2 = y\}$ یک تابع نیست؛ زیرا $f^{-1} \ni (4, 2), (4, -2)$.



چند نمونه مسأله حل شده

۱. اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، چند رابطه بازتابی می‌توان بر A تعریف کرد؟
حل:

از آنجا که یک رابطه تعریف شده بر A چون R زیرمجموعه‌ای از $A \times A$ است. بنابراین اگر $|A|=n$ باشد برای مشخص کردن رابطه بازتابی باید دید کدام یک از n^2 عضو $A \times A$ باید در آن رابطه وجود داشته باشند. اگر R بازتابی باشد در این صورت n زوج (a,a) باید در R باشند. هرکدام از $n^2 - n = n(n-1)$ زوج مرتب دیگر (a,b) که $a \neq b$ ممکن است در R موجود باشند یا خیر.

تعداد حالاتی که می‌توان عضوی از $n(n-1)$ زوج مرتب (a,b) که $a \neq b$ انتخاب کرد و به R افزود، برابر با تعداد زیرمجموعه‌های آن است، بنابراین تعداد روابط بازتابی بر A عبارتند از $2^{n(n-1)}$.

۲. فرض کنید $A = \mathbb{Z}^+$ و رابطه R در A به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$aRb \Leftrightarrow GCD(a,b)=1$$

رابطه R کدام یک از خواص زیر را دارد؟ (GCD بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد است).

- الف) بازتابی
ب) تقارن
ج) ضدتقارن
د) تعدی

حل:

الف) R بازتابی نمی‌باشد، به عنوان مثال $GCD(4,4)=4 \neq 1$ و لذا $(4,4) \notin R$.

ب) R متقارن است، زیرا: $GCD(a,b) = GCD(b,a)$.

ج) R ضد متقارن نمی‌باشد، زیرا: $5R2$ و $2R5$ ولی $5 \neq 2$.

د) R متعدی نیست، زیرا: $7R12$ و $11R12$ اما $7 \nmid 11$.

۳. فرض کنید $R = \{(x,y) / x=yz, z>1, x,y,z \in \mathbb{Z}^+\}$

الف) $R \cap R^{-1}$ را به دست آورید.

ب) آیا رابطه R بازتابی است؟ آیا این رابطه متقارن است؟

حل:

الف)

$$R^{-1} = \{(y,x) / (x,y) \in R\}$$

$$(x,y) \in R \Rightarrow \exists z > 1 \quad x=yz$$

$$(x,y) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R \Rightarrow \exists z' > 1 \quad y=xz'$$

$$\Rightarrow x=yz=xz'z \Rightarrow zz'=1$$

که یک تناقض است و باید $zz' > 1$ باشد. بنابراین $R \cap R^{-1} = \emptyset$

ب) R خاصیت بازتابی ندارد، زیرا با وجود شرط $z > 1$ تساوی $x=xz$ امکان پذیر نیست. از آنجا که $R \cap R^{-1} = \emptyset$ در نتیجه R متقارن نخواهد بود. زیرا اگر (x,y) در رابطه باشد، (y,x) در رابطه نخواهد بود.

۴. فرض کنید که A مجموعه اعداد گویای غیرصفر باشند. رابطه R در A برای $a,b \in A$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$aRb \Leftrightarrow \frac{a}{b} \text{ عدد صحیحی باشد}$$

نشان دهید که R بازتابی و تعدی است ولی خاصیت تقارن و ضدتقارن ندارد.

حل:

• R بازتابی است زیرا $\frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{Z}$.

• R دارای خاصیت تعدی است. زیرا اگر aRb و bRc خواهیم داشت:

$$aRb \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \quad \frac{a}{b} = m$$

$$bRc \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad \frac{b}{c} = n$$

بنابراین:

$$a=mb, \quad b=nc \Rightarrow a=mnc \Rightarrow \frac{a}{c} = mn \in \mathbb{Z}$$

بنابراین aRc

- خاصیت تقارن ندارد، زیرا به عنوان مثال $2R1$ ولی $1 \nmid 2$.
- R ضدتقارن دارد. برای بررسی، اگر aRb آن گاه $n \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $\frac{a}{b} = n$ اگر bRa در نتیجه $\frac{b}{a} = \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$ بنابراین باید $n=1$ باشد، که در این صورت:

$$\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a=b$$

۵. فرض کنید که R رابطه‌ای در مجموعه $\mathbb{Z}$ باشد که به صورت زیر تعریف شده است:

$$aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 \text{ مضربی از } 2 \text{ باشد}$$

نشان دهید این رابطه هم‌ارزی است. کلاس‌های هم‌ارزی R را به دست آورید.

حل:

- رابطه R بازتابی است. زیرا $a^2 - a^2 = 0$ و عدد ۰ نیز مضربی از ۲ است.
- رابطه دارای خاصیت تقارن است، زیرا اگر $a^2 - b^2$ آن گاه $b^2 - a^2$ نیز مضربی از ۲ است.
- رابطه دارای خاصیت متعدی است، زیرا:

$$a^2 - b^2 = 2k \Rightarrow a^2 - b^2 = 2k$$

$$b^2 - c^2 = 2k' \Rightarrow b^2 - c^2 = 2k'$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 2k \Rightarrow a^2 - (c^2 + 2k') = 2k \Rightarrow a^2 - c^2 = 2k + 2k' = 2(k+k')$$

برای به دست آوردن کلاس‌های هم‌ارزی R عنصر $a \in \mathbb{Z}$ دلخواه و ثابت را در نظر می‌گیریم.

$$b \in [a] \Rightarrow a^2 - b^2 = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - 2k, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین $[a] = \{b \in \mathbb{Z} / b^2 = a^2 - 2k\}$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$[1] = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\}$$

$$[2] = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

و از آنجا که $[1] \cup [2] = \mathbb{Z}$ ، لذا دو کلاس هم‌ارزی مجزا دارد که بنا به قضیه ۲-۴ افزایی روی مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ می‌باشند.

۶. فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ داده شده است، رابطه‌ای روی A بنویسید که:

(الف) بازتابی و متقارن باشد ولی متعدی نباشد.

- (ب) بازتابی و ضدمتقارن باشد ولی متعدی نباشد.
- (ج) ضدبازتابی، ضدمتقارن و متعدی باشد.
- (د) بازتابی و متعدی باشد ولی ضدمتقارن نباشد.
- (ه) ماتریس روابط هریک از قسمت‌های (الف) تا (د) به دست آورید.

حل:

روابط فوق دلخواه می‌باشد و می‌توان روابط دیگری نیز به دست آورد.

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$$

رابطه R بازتابی و متقارن است و متعدی نمی‌باشد، زیرا $(2,1) \in R$ و $(1,3) \in R$ اما $(2,3) \notin R$.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3)\}$$

رابطه S بازتابی و پادمتقارن است و متعدی نمی‌باشد، زیرا $(1,2) \in S$ و $(2,3) \in S$ ولی $(1,3) \notin S$.

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \{(1,2), (3,4)\}$$

رابطه Q ضد بازتابی و پادمتقارن است و متعدی می‌باشد، زیرا $(1,2) \in Q$ و به عنوان مثال $(2,3) \notin Q$ در نتیجه به انتهای مقدم، رابطه برقرار است، پس Q متعدی است.

$$M_Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\}$$

(الف)

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (4,2), (4,3), (4,5), (5,1), (5,3)\}$$

$$S = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2)\}$$

$$SoR = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (4,2), (4,3), (4,4), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

ب) با توجه به گراف R و S ماتریس آنها به ترتیب از مرتبه ۵ و ۴ و به صورت زیر می‌باشد.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌دانید انجام اعمال منطقی عطفی و فصلی دو ماتریس در صورتی امکان‌پذیر است که دو ماتریس هم‌مرتبه باشند و همچنین حاصلضرب بولی آن‌ها در صورتی امکان‌پذیر است که تعداد ستون ماتریس اول با تعداد سطر ماتریس دوم برابر باشد؛ بنابراین برای ماتریس‌ها غیر هم‌مرتبه، برای رفع این مشکل، بدون اینکه خللی در رابطه‌ها ایجاد شود، می‌توان به ماتریس روابط (نه لزوماً هر دو ماتریس) تعدادی سطر و ستون با درایه‌های صفر اضافه نمود.

حال چون M_S از مرتبه ۴ است، بنابراین کافی است به آن یک سطر و یک ستون با درایه‌های ۰ اضافه نماییم، خواهیم داشت:

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

رابطه W به وضوح بازتابی است. از طرفی $(1,2) \in W$ و $(2,1) \in W$ ولی $1 \neq 2$ ، بنابراین W پادمتقارن نمی‌باشد. هم‌چنین متعدی نیز می‌باشد.

$$M_W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۷. فرض کنید که $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، $P = \{\{a, c, e, g\}, \{b, d\}, \{f\}\}$ و یک افراز برای A باشد. رابطه هم‌ارزی R در A تعیین شده توسط P را به دست آورید.

حل:

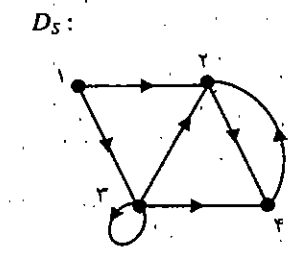
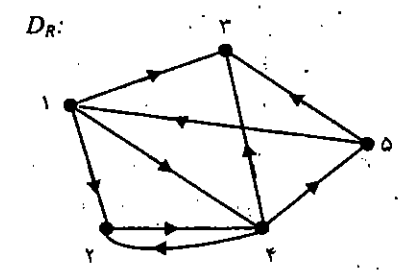
بلوک‌های P عبارتند از: $\{a, c, e, g\}, \{b, d\}, \{f\}$. هر عضو از یک بلوک، فقط و فقط با همه اعضای آن بلوک در رابطه است. بنابراین داریم:

$$R = \{(a,a), (a,c), (a,e), (a,g), (c,a), (c,c), (c,e), (c,g), (e,a), (e,c), (e,e), (e,g), (g,a), (g,c), (g,e), (g,g), (b,b), (b,d), (d,b), (d,d), (f,f)\}$$

۸. گراف رابطه R و S در شکل زیر داده شده است.

الف) اعضای روابط S, R و SoR به دست آورید.

ب) ماتریس رابطه SoR و $R \cap S, R \cup S$ را به دست آورید.



شکل ۸-۲

حل:

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{S \cap R} = M_S \wedge M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{S \cup R} = M_S \vee M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۹. ماتریس رابطه R داده شده است.

الف) اعضای رابطه را نوشته و گراف آن را رسم نمایید.

ب) M_R^c و M_R^{-1} را به دست آورید.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

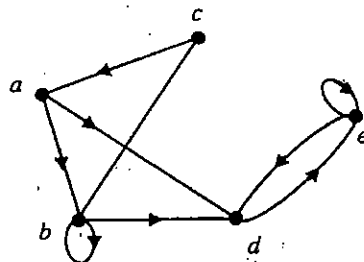
حل:

الف) ماتریس از مرتبه ۵ است، بنابراین می‌توان فرض کرد که رابطه روی مجموعه ۵

عضوی $A = \{a, b, c, d, e\}$ به صورت زیر $R \subseteq A \times A$ تعریف شده است؛ بنابراین:

$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (d, e), (e, d), (e, e)\}$$



شکل ۲-۹

ب) بنا به تعریف داریم:

$$M_R^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۰. فرض کنید رابطه $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 1)\}$ روی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ تعریف شده باشد.

الف) بستر بازتابی رابطه R را به دست آورید.

ب) بستر تقارن رابطه R را به دست آورید.

ج) بستر تعدی رابطه R را به دست آورید.

حل:

الف) بر طبق تعریف $\bar{R}_{xx} = R \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$ بنابراین:

$$\bar{R}_{xx} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 1)\}$$

ب) بر طبق تعریف $\bar{R}_{xy} = R \cup R^{-1}$ بنابراین:

$$\bar{R}_{xy} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

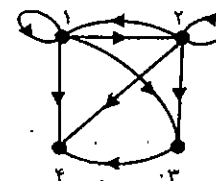
ج) با توجه به تعریف بستر تعدی داریم:

$$R^\infty = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$$

۱۱. بنابر تعدی رابطه سوال ۹ را با استفاده از دو روش گراف جهت‌دار و الگوریتم وارشال به دست آورد.

حل:

• روش گراف جهت‌دار: ابتدا گراف رابطه را ترسیم نموده و سپس اگر بین هر دو رأس متمایز آن مسیری به طول حداقل ۲ وجود داشته باشد، مسیری به طول ۱ بین آن دو رسم می‌نماییم.



شکل ۱۰-۲

• روش الگوریتم وارشال: برای استفاده از این الگوریتم، ابتدا ماتریس رابطه را به دست آورده و سپس الگوریتم را روی آن پیاده‌سازی می‌نماییم.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

قرار می‌دهیم:

$$W_1 = M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای $k=1$ در ابتدا $W_1=W$ قرار داده می‌شود، سپس سطر و ستون اول در ماتریس W_1 را در نظر گرفته:

$$c=\{1\} \quad r=\{1\}$$

$$c \times r = \{(1,1)\}$$

بنابراین ماتریس W_1 به صورت زیر تغییر می‌کند:

روابط روی مجموعه‌ها، توابع ۱۰۵

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای $k=2$ در ابتدا $W_2=W_1$ قرار داده می‌شود، سپس سطر و ستون دوم در ماتریس W_2 را در نظر گرفته:

$$c=\{1,2\} \quad r=\{1,2\}$$

$$c \times r = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

بنابراین ماتریس W_2 به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای $k=3$ در ابتدا $W_3=W_2$ قرار داده می‌شود، سپس سطر و ستون سوم در ماتریس W_3 را در نظر گرفته:

$$c=\{1,2\} \quad r=\{2\}$$

$$c \times r = \{(1,2), (2,2)\}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای $k=4$ در ابتدا $W_4=W_3$ قرار داده می‌شود، سپس سطر و ستون چهارم در ماتریس W_4 را در نظر گرفته:

$$c=\{1,2,3\} \quad r=\{3\}$$

$$c \times r = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$$

ملاحظه می‌شود که این مرحله همانند مرحله سوم است، بنابراین:

$$R^\infty = W_4 = W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

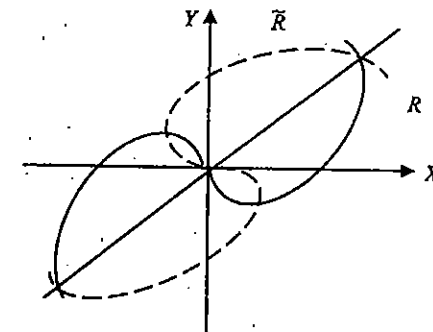
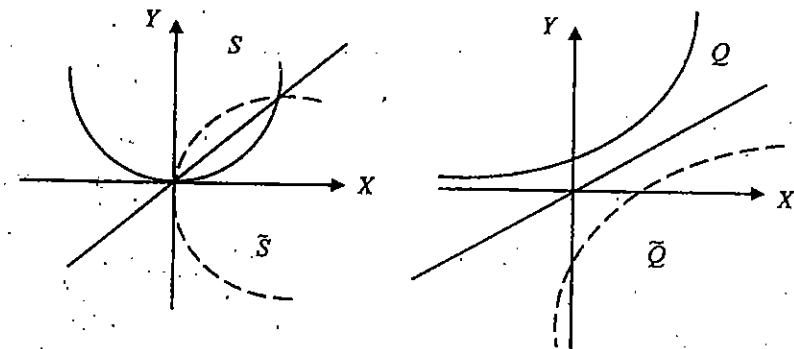
۱۰۶ ساختمان‌های گسته

۱۲. روابط S, R, Q روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$Q = \{(x, y) \mid y = x^2\}, \quad R = \{(x, y) \mid y = x^2 - x\}, \quad S = \{(x, y) \mid y = x^3\}$$

الف) نمودار هریک از روابط را رسم و سپس وارون هر یک از آنها را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم رسم کرده و به ترتیب با $\bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}$ نشان دهید.
ب) کدام یک از روابط می‌تواند یک تابع وارون پذیر تعریف نماید.

حل:
الف)



شکل ۲-۱۱

روابط روی مجموعه‌ها، توابع ۱۰۷

ب) بنا به تعریف، تنها رابطه Q ، یک تابع وارون پذیر تعریف می‌کند. زیرا هر خط موازی محور طول‌ها آن را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند.



تمرین‌های فصل

۱. اگر

$$R = \{(m, 2m) | m \in \mathbb{Z}\}$$

$$S = \{(m, n) | m, n \in \mathbb{Z}\} \text{ عدد } m \text{ عدد } n \text{ را عاد می‌کند}$$

آن‌گاه $S^{-1}, S, R \cap S, R \cup S, S \circ R, R^{-1}$ را بدست آورید.

۲. فرض کنید R و S دو رابطه هم‌ارزی باشند، عبارات زیر را رد یا اثبات کنید.

الف) اگر S, R خاصیت بازتابی داشته باشند، آن‌گاه $S \circ R$ خاصیت بازتابی دارد.

ب) اگر S, R خاصیت ضد بازتابی داشته باشند، آن‌گاه $S \circ R$ خاصیت ضد بازتابی دارد.

ج) اگر S, R خاصیت تقارن داشته باشند، آن‌گاه $S \circ R$ خاصیت تقارن دارد.

د) اگر S, R خاصیت ضد تقارن داشته باشند، آن‌گاه $S \circ R$ خاصیت ضد تقارن دارد.

ه) اگر S, R خاصیت ضد تقارن داشته باشند، آن‌گاه $R \cup S$ و R^{-1} و S^{-1} ضد تقارن دارند.

و) اگر S, R خاصیت تعدی داشته باشند، آن‌گاه $S \circ R$ خاصیت تعدی دارد.

۳. برای $(c, d), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ رابطه R به صورت زیر تعریف شده است:

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

الف) نشان دهید R رابطه هم‌ارزی روی $\mathbb{R}^2$ است.

ب) عناصر مجموعه $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) R (0, 0)\}$ را بیابید.

۴. فرض کنید که R یک رابطه بازتابی در A باشد. نشان دهید که R یک رابطه هم‌ارزی در A است اگر و تنها اگر از $(a, b) \in R$ و $(a, c) \in R$ نتیجه $(b, c) \in R$ به دست آید.

۵. فرض کنید R_1, R_2 دو رابطه هم‌ارزی باشند. تحت چه شرایطی $R_1 \cap R_2$ و $R_1 \cup R_2$ نیز می‌توانند روابط هم‌ارزی شوند؟

۶. روی $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) برای $a, b \in \mathbb{R}$ رابطه S به صورت زیر تعریف شده است:

$$aSb \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

الف) نشان دهید S رابطه هم‌ارزی است.

روابط روی مجموعه‌ها، توابع ۱۰۹

ب) کلاس هم‌ارزی ۱ را بیابید.

ج) کلاس هم‌ارزی $\frac{1}{2}$ را بیابید.

د) کلاس هم‌ارزی $\sqrt{p}$ را بیابید (p عددی اول است).

۷. فرض کنید A مجموعه تمام صفحات شطرنج 2×2 باشد که رنگ هر یک از چهارخانه آنها آبی یا قرمز باشد. اگر c_1, c_2 دو عضو از A باشند رابطه R را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_1 R c_2 \Leftrightarrow \text{توسط چرخش } c_1 \text{ یا از قرینه } c_1 \text{ حاصل می‌شود.}$$

الف) نشان دهید R یک رابطه هم‌ارزی است

ب) کلاس‌های هم‌ارزی R را به دست آورید.

۸. اجتماع کدام یک از دسته مجموعه‌های زیر، افزایی روی مجموعه همه رشته بیتی‌های به طول ۸ می‌باشد؟

الف) مجموعه تمام رشته بیتی‌هایی که با ۱ شروع و مجموعه همه رشته بیتی‌هایی که با ۰۰ شروع شده، همچنین مجموعه همه رشته بیتی‌هایی که با ۰۱ آغاز می‌شوند.
ب) مجموعه همه رشته بیتی‌هایی که به ۱۱۱ خاتمه می‌یابد و مجموعه تمام رشته بیتی‌هایی که با ۰۱۱ پایان یافته و همچنین مجموعه همه رشته بیتی‌هایی که به ۰۰ خاتمه می‌یابند.

۹. مجموعه A و رابطه تعریف شده R روی آن در زیر داده شده است. کلاس‌های هم‌ارزی در افزای تولید شده بوسیله R را بدست آورید.

$$A = \{(-4, -20), (-3, -9), (-2, -7), (-1, -1), (-1, -3), (1, 7), (1, 5), (2, 10), (2, 17)\}$$

$$ad = bc \text{ اگر و فقط اگر } (a, b) R (c, d)$$

۱۰. اگر S شامل توابعی از $\mathbb{Z}^+$ به $\mathbb{R}$ باشد و برای $f, g \in S$ رابطه R را تعریف می‌کنیم:

$$f R g \text{ اگر و فقط اگر } f \in O(g)$$

یعنی fRg ، اگر g بر f غالب باشد. آیا رابطه R یک هم‌ارزی می‌باشد.

۱۲. فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و رابطه R روی $A \times A$ به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$(a, b)R(c, d) \text{ اگر و فقط اگر } a+b=c+d$$

رابطه R مجموعه A را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند؟ آن‌ها را بیابید.

۱۳. ماتریس A ، B و C در زیر داده شده است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) $A \cap B$ و $A \cup B$ را به دست آورید.

ب) نشان دهید $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

ج) نشان دهید $A \cup B = B \cup A$ و $A \cap B = B \cap A$

۱۴. M_R و M_S به ترتیب ماتریس روابط R و S روی $A = \{a, b, c, d\}$ می‌باشند.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

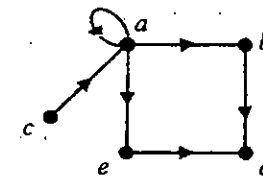
الف) ماتریس روابط $R \cup S$ ، $R \cap S$ ، $(R \circ S)^{-1}$ و S^* را بیابید.

ب) ماتریس بستر بازتابی رابطه R را به دست آورید.

ج) ماتریس بستر تقارنی رابطه S را به دست آورید.

د) ماتریس بستر تعدی رابطه R را به دست آورید.

۱۵. گراف رابطه R به صورت زیر تعریف شده است.



الف) بستر بازتابی آن را به دست آورید.

ب) بستر تعدی آن را با استفاده از الگوریتم وارشیال و گراف جهت‌دار بیابید.

۱۶. فرض کنید $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$ رابطه‌ای روی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، آن‌گاه:

الف) R^* و R^{-1} را بیابید.

ب) بستر تقارنی و بازتابی رابطه را به دست آورده و گراف آن‌ها را رسم نمایید.

۱۷. اگر M_R ماتریس رابطه R باشد، نشان دهید $M_{R^n} = (M_R)^n$.

۱۸. اگر A یک مجموعه n عضوی باشد.

الف) چند رابطه متقارن می‌توان بر A تعریف کرد؟

ب) تعداد روابطی که نه بازتابی و نه ضدبازتابی باشد، را بیابید.

ج) نشان دهید تعداد روابط ضدمتقارن برابر است با: $2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

فصل سوم

ترتیب جزئی، شبکه، جبر بول

اهداف:

انتظار می‌رود در پایان این فصل دانشجو بتواند:

- رابطه ترتیب جزئی و ترتیب کامل را تعریف نماید.
- مقایسه‌پذیر بودن اعضای یک رابطه ترتیب جزئی را تشخیص دهد.
- نمودار هاس یک رابطه ترتیب جزئی را ترسیم نماید.
- ترتیب توپولوژیک روی یک رابطه ترتیب جزئی را رسم نماید.
- کران بالا و پایین، کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین را در یک رابطه ترتیب جزئی تشخیص دهد.
- شبکه و خواص آن را توضیح دهد.
- با جبر بول به عنوان یک نوع شبکه توزیع‌پذیر و متمم‌پذیر آشنا شود.
- روش‌های نمایش عبارت بولی به صورت نمودار منطقی و جدول درستی را به کار گیرد.

۱-۳-۱- رابطه ترتیب جزئی

دسته خاصی از روابط به جهت استفاده در جبر بول حائز اهمیت هستند که این دسته از روابط ترتیب جزئی نامیده می‌شوند.

☐ ترتیب جزئی: رابطه R روی مجموعه A ترتیب جزئی نامیده می‌شود هرگاه سه خاصیت بازتابی، ضدتقارن و تعدی در آن حاکم باشد.
اگر رابطه R یک رابطه ترتیب جزئی روی مجموعه A باشد به زوج (A, R) یک مجموعه مرتب جزئی یا $Poset$ گفته می‌شود.

☐ مثال ۱-۳: به نمونه‌هایی توجه نمایید.

- $(\mathbb{Z}, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است، زیرا هر سه شرط بازتابی، ضدتقارن و تعدی را داراست.
- $(\mathbb{Z}, \geq)$ نیز یک مجموعه مرتب جزئی است، زیرا هر سه شرط بازتابی، ضدتقارن و تعدی را داراست.
- رابطه‌های $(\mathbb{Z}, <)$ و $(\mathbb{Z}, >)$ مجموعه مرتب جزئی نیستند، زیرا دارای خاصیت بازتابی نمی‌باشند.

☐ مثال ۲-۳: رابطه عاد کردن روی $\mathbb{Z}$ ترتیب جزئی نیست. این رابطه خاصیت ضدتقارن ندارد. زیرا:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: a|b, b|a \Rightarrow a = \pm b$$

یعنی از $a|b$ و $b|a$ ضرورتاً $a = b$ حاصل نمی‌شود.

به عنوان مثال $5/5$ و $-5/5$ ولی $5 \neq -5$.

در همین مثال، اگر مجموعه محدود به $\mathbb{Z}^+$ شود، آن‌گاه رابطه عاد کردن دارای ترتیب جزئی خواهد بود.

☐ مثال ۳-۳: اگر A یک مجموعه دلخواه ناتمام باشد، آن‌گاه مجموعه $P(A)$ شامل تمامی زیرمجموعه‌های A است، تحت عمل $\subseteq$ یک مجموعه مرتب جزئی است. به عنوان مثال:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

رابطه $\subseteq$ روی مجموعه $P(A)$:

- بازتابی است، زیرا هر عضو زیرمجموعه خودش است. مثلاً $\{a\} \subseteq \{a\}$.
- ضدتقارن است، زیرا اگر S_1 و S_2 دو زیرمجموعه از A باشند و:
 $S_1 \subseteq S_2$ و $S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow S_1 = S_2$
- متعدی است، زیرا به عنوان نمونه:

$$\{a\} \subseteq \{a, b\}, \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\} \Rightarrow \{a\} \subseteq \{a, b, c\}$$

☐ توجه:

از آنجا که معروف‌ترین ترتیب جزئی، رابطه $\leq$ در اعداد است، لذا برای نشان دادن رابطه ترتیب جزئی در مجموعه‌ها از این نماد استفاده می‌شود. بنابراین $(A, \leq)$ به این معنی است که مجموعه A مرتب جزئی است، و لزوماً به معنی رابطه کوچکتر مساوی اعداد نیست (مگر اینکه صراحتاً قید شود). بنابراین $(a, b) \in R$ یا aRb در مجموعه‌های مرتب جزئی با $a \leq b$ نشان داده می‌شود.

☐ مقایسه پذیر بودن: اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد، گوئیم $a, b \in A$ مقایسه پذیرند هرگاه رابطه $a \leq b$ یا $b \leq a$ برقرار باشد.

☐ مثال ۴-۳: رابطه عاد کردن در $\mathbb{Z}^+$ را در نظر بگیرید، در این رابطه ۲ و ۶ مقایسه پذیرند زیرا $2|6$ یعنی $2 \leq 6$ ، به عبارت دیگر $(2, 6)$ در رابطه عاد کردن قرار دارند. اما ۵ و ۷ مقایسه پذیر نیستند زیرا ۵ بر یکدیگر بخش پذیر نیستند و یکدیگر را عاد نمی‌کنند.

۳-۱-۱- ترتیب قاموسی روی $A_1 \times A_2$

📖 رابطه ترتیب جزئی روی $A_1 \times A_2$: اگر $(A_1, \leq_1)$ و $(A_2, \leq_2)$ دو مجموعه مرتب جزئی باشند $(\leq_1$ و $\leq_2$ نشان‌دهنده این است که نوع رابطه در A_1 و A_2 متفاوت است. به عنوان نمونه در A_1 رابطه ممکن است نشان‌دهنده خاصیت عاد کردن و در A_2 نشان‌دهنده رابطه زیرمجموعه بودن باشد) آن‌گاه یک رابطه ترتیب جزئی روی $A_1 \times A_2$ به صورت زیر می‌توان تعریف کرد:

$$\forall x, x' \in A_1, y, y' \in A_2 \quad (x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq_1 x' \text{ و } y \leq_2 y'$$

۳-۱-۱-۱- ترتیب قاموسی

اگر $(A_1, \leq_1)$ و $(A_2, \leq_2)$ دو مجموعه مرتب جزئی باشند، رابطه $\leq$ که به صورت زیر تعریف می‌شود را ترتیب قاموسی گویند:

$$\forall x, x' \in A_1, y, y' \in A_2: (x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow (x <_1 x') \text{ یا } (x = x' \text{ و } y \leq_2 y')$$

📖 مثال ۳-۵: رابطه $\leq$ (رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی) روی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید، آیا این رابطه ترتیب قاموسی است؟
حل:

خیر، به عنوان مثال $(1, 2)$ و $(9, 1)$ را در نظر بگیرید، درست است که مؤلفه‌های اول با هم برابرند، ولی در مورد مؤلفه‌های دوم $2 \leq 1$ برقرار نیست.

۳-۱-۲- ترتیب قاموسی حاصل ضرب دکارتی $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

فرض کنیم $(A_1, \leq_1), (A_2, \leq_2), \dots, (A_n, \leq_n)$ ، n مجموعه مرتب جزئی باشند. ترتیب قاموسی $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n, \leq)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall x_i, x'_i \in A_i$$

ترتیب جزئی، شبکه، جبر بول ۱۱۷

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq x'_1 \\ \text{یا} \\ x_1 = x'_1 \text{ و } x_2 \leq x'_2 \\ \text{یا} \\ x_1 = x'_1 \text{ و } x_2 = x'_2 \text{ و } x_3 \leq x'_3 \\ \text{یا} \\ \forall 1 \leq i \leq n-1, x_i = x'_i, x_n \leq x'_n \end{cases}$$

📖 مثال ۳-۶: در رابطه ترتیب قاموسی $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ می‌توان نوشت: $(1, 2, 3, 7) < (1, 2, 3, 8)$

۳-۱-۳- ترتیب قاموسی روی رشته‌ها

نمونه‌ای از ترتیب قاموسی را می‌توان در ترتیب کلمات در لغت‌نامه‌ها و رشته‌ها مشاهده نمود. فرض نمایید $A = a_1 a_2 \dots a_n$ و $B = b_1 b_2 \dots b_m$ دو رشته باشند. تعریف می‌کنیم که A/B (یعنی A به لحاظ ترتیب قبل از B است) هرگاه:

$$A/B \Leftrightarrow \begin{cases} A = a_1 a_2 \dots a_m \text{ و } B = a_1 a_2 \dots a_m a_{m+1} \dots a_n \text{ و } m < n \\ \text{یا} \\ A = a_1 a_2 \dots a_m x_1 \dots y \text{ و } B = a_1 a_2 \dots a_m x_2 \dots z \text{ و } x_1 < x_2 \end{cases}$$

📖 مثال ۳-۷: در لغت‌نامه برای دسته‌بندی لغات از ترتیب قاموسی استفاده می‌شود. به عنوان نمونه:

الف) $discreet \leq discrete$ چون در مکان هفتم $e \leq t$ (یعنی حرف e به لحاظ ترتیب قبل از حرف t قرار دارد) است.
ب) $discreet \leq discreteness$ چون رشته دوم طولانی‌تر از رشته اول است.

۳-۱-۲- نمودار هاس

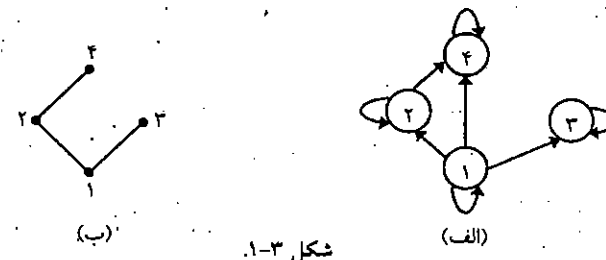
فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد. مراحل زیر را بر روی گراف رابطه انجام می‌دهیم:

- از آنجا که رابطه دارای خاصیت بازتابی است، هر رأس این گراف طوقه دارد. این طوقه‌ها را از گراف رابطه حذف می‌نماییم.

- از اینکه رابطه متعدی است وقتی یالی از a به b و یال دیگری از b به c وجود داشته باشد، حتماً یالی از a به c نیز در گراف وجود خواهد داشت. از آنجا که ارتباط a و c به صورت ضمنی و بنا به خاصیت تعدی نتیجه گرفته می‌شود، این یال نیز از گراف رابطه حذف خواهد شد.

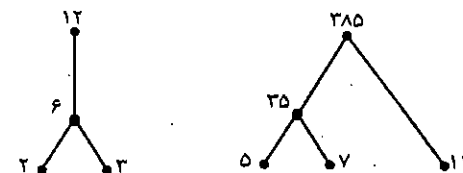
- گراف رابطه مذکور را طوری رسم می‌نماییم که جهت یال‌ها از پایین به بالا باشد. بنابراین می‌توان جهت یال‌ها را حذف کرد و گراف رابطه ترتیب جزئی را غیرجهت‌دار در نظر گرفت.

نمودار حاصل از انجام سه مرحله فوق، نمودار هاس نامیده می‌شود. شکل ۱-۳ (الف) گراف یک رابطه ترتیب جزئی و شکل (ب) نمودار هاس این رابطه را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۳.

مثال ۳-۸: فرض کنید $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 35, 385\}$ باشد و رابطه R رابطه عادی کردن تعریف شده باشد. نمودار هاس این رابطه در شکل ۲-۳ نشان داده شده است.

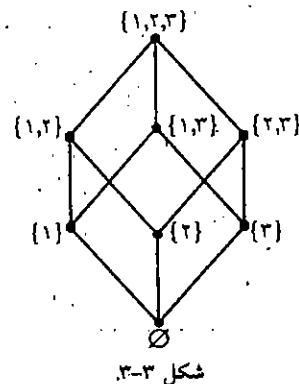


شکل ۲-۳.

نکته:

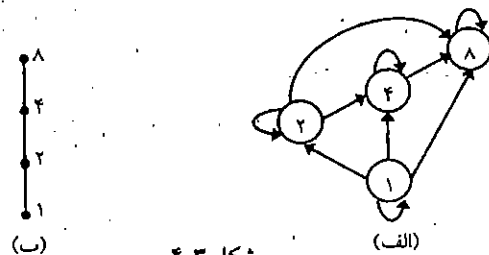
با توجه به شکل ۲-۳، نمودار هاس ممکن است شامل چند بخش باشد.

مثال ۳-۹: فرض کنید $U = \{1, 2, 3\}$ و $A = P(U)$ رابطه R رابطه زیرمجموعه بودن در A باشد. نمودار هاس این رابطه در شکل ۳-۳ نمایش داده شده است:



شکل ۳-۳.

مثال ۳-۱۰: فرض کنید $A = \{1, 2, 4, 8\}$ و رابطه عادی کردن بر روی مجموعه A مفروض باشد. شکل ۳-۴ (الف) و (ب) به ترتیب گراف رابطه و نمودار هاس مربوطه را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۴.

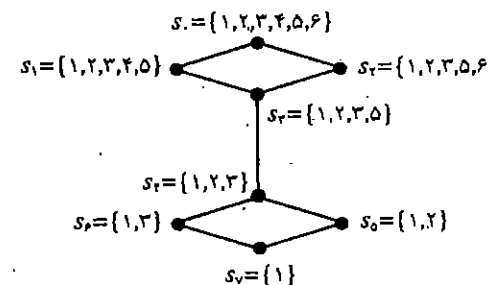
مثال ۳-۱۱: نمودار هاس $(L, \subseteq)$ را رسم نمایید، به‌طوری‌که:

$$L = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$$

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$S_3 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$	$S_4 = \{1, 2, 3, 5\}$
$S_5 = \{1, 2, 3\}$	$S_6 = \{1, 2\}$	$S_7 = \{1, 3\}$	$S_8 = \{1\}$

حل:

نمودار هاس در شکل ۵-۳ نشان داده شده است.



شکل ۵-۳

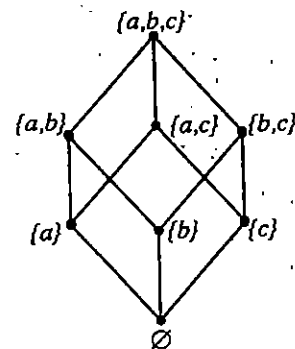
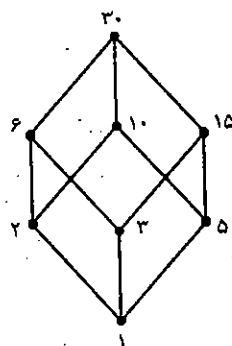
۳-۱-۳- یکره‌بختی دو مجموعه مرتب جزئی

اگر $(A, \leq)$ و $(A', \leq')$ دو مجموعه مرتب جزئی باشند، تابع $f: A \rightarrow A'$ را یک تابع یکره‌بختی بین دو مجموعه $(A, \leq)$ و $(A', \leq')$ نامند هرگاه f (الف) یک تناظر یک به یک بین A و A' باشد.

$$\forall a, b \in A \quad f(a) \leq' f(b) \Leftrightarrow a \leq b \quad \text{ب)}$$

در این صورت گویند $(A, \leq)$ و $(A', \leq')$ یکره‌بخت هستند. توجه داشته باشید که اگر دو مجموعه مرتب جزئی متناهی یکره‌بخت باشند، آن‌گاه نمودار هاس آن‌ها یکسان خواهد بود.

مثال ۱۲-۳: دو مجموعه مرتب $(P(\{a, b, c\}), \leq)$ و $(D_{30}, |)$ را در نظر بگیرید. $(D_{30}, |)$ تمام مقسوم‌علیه‌های عدد است. نمودار هاس این دو رابطه در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۶-۳

تابع $f: P(\{a, b, c\}) \rightarrow D_{30}$ با ضابطه زیر در دو شرط یکره‌بختی صدق می‌کند، لذا این دو رابطه ترتیب جزئی، یکره‌بخت هستند.

$$f(\emptyset) = 1$$

$$f(\{a\}) = 2$$

$$f(\{b\}) = 3$$

$$f(\{c\}) = 5$$

$$f(\{a, b\}) = 6$$

$$f(\{a, c\}) = 10$$

$$f(\{b, c\}) = 15$$

$$f(\{a, b, c\}) = 30$$

۳-۱-۴- بزرگ‌ترین (ماکسیمم) و کوچک‌ترین (مینیمم) - عناصر مینیمال و ماکسیمال در این بخش به معرفی برخی عناصر خاص در رابطه ترتیب جزئی پرداخته خواهد شد. به تعریف هر کدام از این عناصر و نقطه تمایز آنها خوب دقت شود. اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد:

■ عنصر ماکسیمم: عنصر $a \in A$ را ماکسیمم (بزرگ‌ترین عضو) عنصر نامند هرگاه $\forall x \in A, x \leq a$

■ عنصر مینیمم: عنصر $b \in A$ را مینیمم (کوچک‌ترین عضو) عنصر نامند هرگاه $\forall x \in A, b \leq x$

■ عنصر ماکسیمال: عنصر $a \in A$ را ماکسیمال A نامند هرگاه عضوی مانند $c \in A$ وجود نداشته باشد به طوری که $a < c$

☐ عنصر مینیمال: عنصر $b \in A$ را مینیمال نامند هرگاه عضوی مانند $c \in A$ وجود نداشته باشد به طوری که $c < b$

به عبارت ساده‌تر، تفاوت بین عنصر ماکسیمم و ماکسیمال را می‌توان این‌گونه بیان نمود که a عضو ماکسیمم (بزرگ‌ترین عضو) است اگر هر عنصر $x \in A$ با a قابل مقایسه باشد و برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $x \leq a$.

در مورد عنصر ماکسیمال نکته این است که لازم نیست همه عناصر مجموعه با a قابل مقایسه باشند؛ اما اگر عنصری مانند $x \in A$ با a قابل مقایسه باشد، آن‌گاه باید $x \leq a$.

☐ مثال ۳-۱۳: رابطه عادی کردن بر روی مجموعه $A = \{2, 4, 6, 8\}$ را در نظر بگیرید. عناصر بزرگ‌ترین، کوچک‌ترین، ماکسیمال و مینیمال را بیابید.

حل:

با توجه به نمودار هاس (شکل ۳-۷)، این مجموعه بزرگ‌ترین عنصر ندارد؛ اگر به عنوان مثال ۸ را بزرگ‌ترین عنصر در نظر بگیریم، عدد ۶ با ۸ قابل مقایسه نیست، در صورتی که در تعریف بزرگ‌ترین عنصر کلمه "هر" بکار برده شده است. یعنی برای بزرگ‌ترین عنصر، تمامی عناصر دیگر باید با آن قابل مقایسه باشند.



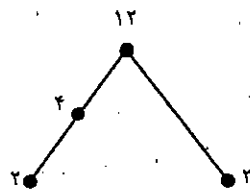
شکل ۳-۷.

از طرفی عدد ۲ با تمامی عناصر قابل مقایسه است و برای هر عنصر $x \in A$ داریم $x \geq 2$ (چون $2/x$). بنابراین ۲ کوچک‌ترین عنصر است.

در این نمودار عدد ۶ و ۸ ماکسیمال هستند، زیرا عنصری بعد از آنها وجود ندارد که ۶ و ۸ با آنها قابل مقایسه باشند.

در این نمودار عدد ۲ مینیمال است، زیرا عنصری قبل از ۲ وجود ندارد که بخواهد با ۲ قابل مقایسه باشد.

☐ مثال ۳-۱۴: مجموعه $A = \{2, 3, 4, 12\}$ و رابطه عادی کردن را در نظر بگیرید. نمودار هاس آن در شکل ۳-۸ نشان داده شده است. عناصر بزرگ‌ترین، کوچک‌ترین، ماکسیمال و مینیمال را بیابید.



شکل ۳-۸.

حل:

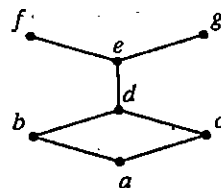
از آنجا که $2/12$ و $3/12$ و $4/12$ یعنی تمام اعضاء با ۱۲ قابل مقایسه هستند و نیز همگی عدد ۱۲ را عادی می‌کنند، در نتیجه ۱۲ بزرگ‌ترین عنصر است.

در اینجا کوچک‌ترین عنصر وجود ندارد؛ زیرا عنصری مانند a موجود نیست که با همه $x \in A$ قابل مقایسه بوده و $x \leq a$.

عدد ۱۲ ماکسیمال است، زیرا عنصری چون x وجود ندارد که $12 \leq x$. اعداد ۲ و ۳ مینیمال هستند، زیرا عنصری قبل از آنها وجود ندارد که $x \leq 2$ و $x \leq 3$ باشد.

☐ مثال ۳-۱۵: نمودار هاس شکل ۳-۹ را در نظر بگیرید.

این نمودار بزرگ‌ترین عنصر ندارد، زیرا عنصری وجود ندارد که همه عناصر با آن قابل مقایسه باشند.

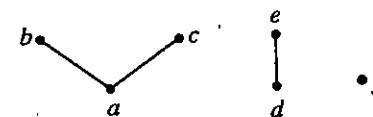


شکل ۳-۹.

در این نمودار کوچک‌ترین عنصر a می‌باشد. همچنین f و g ماکسیمال هستند و عنصر a مینیمال است.

که مثال ۳-۱۶: مجموعه با ترتیب جزئی $(\mathbb{Z}, \leq)$ مینیمال، ماکسیمال، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عنصر ندارد.

که مثال ۳-۱۷: نمودار هاس شکل ۳-۱۰ را در نظر بگیرید:



شکل ۳-۱۰.

این نمودار بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عنصر ندارد.

عنصر $\{b, c, e, f\}$ ماکسیمال هستند، زیرا عضوی مانند x وجود ندارد که از آن‌ها بزرگ‌تر باشد. در این نمودار عناصر $\{a, d, f\}$ مینیمال هستند، زیرا عضوی مانند x وجود ندارد که از آن‌ها کوچک‌تر باشد.

نکته:

- هر مجموعه مرتب جزئی متناهی، حداقل یک مینیمال و حداقل یک ماکسیمال دارد.
- عضو ماکسیمم و عضو مینیمم، در صورت وجود منحصر بفرد هستند.

۳-۱-۵- ترتیب توپولوژیکی

تعریف کامل: رابطه ترتیب جزئی $\leq$ روی A در صورتی کامل یا تام نامیده می‌شود که هر دو عضو انتخابی در آن مقایسه‌پذیر باشند. در این صورت A را مجموعه مرتب کامل یا زنجیر نامند.

که مثال ۳-۱۸: به روابط زیر دقت نمایید.

- رابطه $\leq$ در $\mathbb{Z}$ ترتیب کامل است.

ترتیب جزئی، شبکه، جبر بول ۱۲۵

- رابطه $(\mathbb{Z}, |)$ ترتیب کامل نیست. به عنوان مثال ۲ و ۵ در این رابطه مقایسه‌پذیر نیستند.
- رابطه عاد کردن بر روی مجموعه $\{1, 5, 15, 20\}$ ، ترتیب کامل است. نمودار هاس این رابطه در شکل زیر نشان داده شده است.

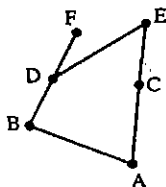


شکل ۳-۱۱.

دقت نمایید که نمودار هاس یک رابطه ترتیب کامل به صورت خط مستقیم است.

فرض کنید کارخانه‌داری می‌خواهد محصول جدیدی را به بازار روانه کند و باید مجموعه‌ای از دستورالعمل‌ها را برای مونتاژ آن تنظیم نماید.

مونتاژ این محصول جدید، در شش مرحله A, B, C, D, E, F انجام می‌شود و این مراحل باید طبق ترتیب جزئی که نمودار هاس آن در شکل ۳-۱۲ نشان داده شده است، انجام شوند. با توجه به این نمودار، مثلاً مشاهده می‌شود که پیش از شروع E مراحل A, B, C, D باید کامل شده باشند. با توجه به اینکه این ترتیب کامل نیست، سوال این است که مجموعه مراحل به چه ترتیبی باید انجام گیرد، تا ترتیب جزئی متناظر با نمودار هاس حفظ شود؟



شکل ۳-۱۲.

در واقع این پرسش مطرح می‌شود که آیا می‌توان با مفروض بودن ترتیب جزئی

R روی مجموعه A که با نمودار هاس نشان داده شده است، ترتیبی کامل مانند T روی مجموعه A پیدا نمود که $R \subseteq T$ باشد. پاسخ این سوال مثبت است و ابزار مورد نیاز برای این منظور مرتب‌سازی توپولوژیکی نام دارد. در حقیقت ترتیب توپولوژیکی، تبدیل کردن یک رابطه ترتیب جزئی به یک رابطه ترتیب کامل است.

☐ **ترتیب توپولوژیکی:** فرض کنید (A, R) یک مجموعه مرتب جزئی باشد، می‌توان ترتیب کاملی مانند T به دست آورد که $R \subseteq T$ باشد. برای نمایش ترتیب توپولوژیکی $a_1, a_2, \dots, a_n$ از مجموعه A از نماد زیر استفاده می‌شود:

$$a_1 <_t a_2 <_t \dots <_t a_n$$

مراحل الگوریتم مرتب‌سازی توپولوژیکی عبارت است از:

- (۱) الگوریتم با انتخاب یک عنصر مینمال آغاز می‌شود. در صورتی که بیش از یک عنصر مینمال وجود دارد، یکی انتخاب شود.
- (۲) عنصر مینمال از نمودار هاس حذف و به ترتیب توپولوژیکی اضافه می‌شود.
- (۳) مراحل ۱ و ۲ تا جایی که رأسی در نمودار هاس باقی نماند ادامه پیدا می‌کند.

📌 **مثال ۳-۱۹:** یک ترتیب توپولوژیکی برای نمودار هاس شکل ۳-۱۲ ایجاد نمایید. **حل:**

مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

- ۱- عضو مینمال را انتخاب می‌نماییم. در این نمودار عضو مینمال A است. A انتخاب و از نمودار هاس حذف و به ترتیب توپولوژیکی اضافه می‌شود. نمودار هاس و ترتیب توپولوژیکی به شکل زیر خواهند بود.



ترتیب توپولوژیکی

نمودار هاس

۲- در نمودار هاسی که از حذف A ایجاد شده، مجدداً عضو مینمال را پیدا می‌نماییم. در این حالت عضو B و C مینمال هستند. هر کدام از اینها را می‌توان به دلخواه انتخاب نمود. عضو انتخابی را از نمودار هاس حذف و به ترتیب توپولوژیکی اضافه می‌نماییم. به عنوان مثال اگر در این مرحله C را انتخاب نماییم ترتیب توپولوژیکی، به شکل زیر خواهد بود.



ترتیب توپولوژیکی

نمودار هاس

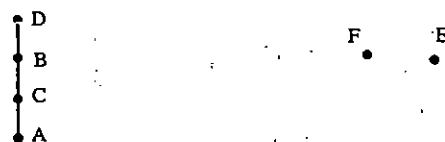
۳- در این مرحله عضو مینمال انتخابی B خواهد بود. با حذف B از نمودار هاس و اضافه به ترتیب توپولوژیکی خواهیم داشت:



ترتیب توپولوژیکی

نمودار هاس

۴- عنصر مینمال بعدی D خواهد بود، مانند مراحل قبل این عضو از نمودار هاس حذف و به ترتیب توپولوژیکی اضافه خواهد شد.

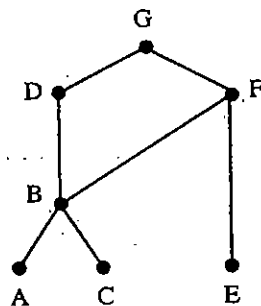


ترتیب توپولوژیکی

نمودار هاس

مثال ۳-۲۰: یک پروژه کامپیوتری نیاز به ۷ مرحله کاری دارد. برخی از این مراحل بعد از اتمام مراحل دیگر می‌توانند شروع شوند. رابطه ترتیب جزئی بین دو مرحله x و y به این صورت تعریف می‌شود که:

$x < y$ اگر و فقط اگر مرحله y نتواند قبل از اتمام مرحله x شروع شود. با توجه به نمودار هاس نشان داده شده در شکل ۳-۱۴ که براساس رابطه ترتیب جزئی بین این مراحل ترسیم شده است، یک ترتیب ممکن برای اجرای مراحل این پروژه پیدا نمایید.



شکل ۳-۱۴

حل:

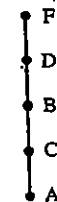
با استفاده از ترتیب توپولوژیکی می‌توان ترتیبی برای اجرای این مراحل به‌دست آورد. با اجرای قدم‌های لازم برای تولید ترتیب توپولوژیکی، ترتیب:

$$A < C < B < E < F < D < G$$

یکی از ترتیب‌های توپولوژیکی خواهد بود. و مراحل می‌توانند به این ترتیب اجرا شوند.

مثال ۳-۲۱: تعدادی از دروس رشته علوم کامپیوتر و پیش‌نیازهای آن‌ها در جدول ادامه نشان داده شده است. مدیر گروه می‌خواهد ترتیبی جهت اخذ دروس را پیشنهاد دهد. چه ترتیبی از دروس می‌تواند اخذ شود به‌طوری‌که پیش‌نیاز دروس رعایت شود و بیشترین دروس ممکن در یک ترم اخذ گردد؟

۵- در این مرحله دو عضو مینیمال داریم، که مانند مرحله شماره ۲، می‌توان یکی را به دلخواه انتخاب نمود. به‌عنوان مثال با انتخاب عضو F خواهیم داشت:



ترتیب توپولوژیکی

E

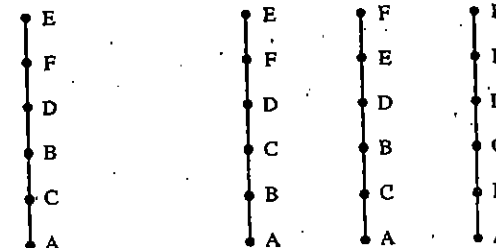
نمودار هاس

۶- آخرین عضو باقیمانده E است که به ترتیب توپولوژیکی اضافه می‌شود.



ترتیب توپولوژیکی

بنابراین ترتیب توپولوژیکی نمودار برابر $E < F < D < B < C < A$ خواهد بود. چنانچه در مرحله دوم، عنصر B انتخاب شود، و یا اینکه در مرحله پنجم، عضو E انتخاب شود، حالت‌های دیگری نیز برای ترتیب توپولوژیکی پیش می‌آید. برخی از ترتیب‌های ممکن در شکل زیر نشان داده شده است.



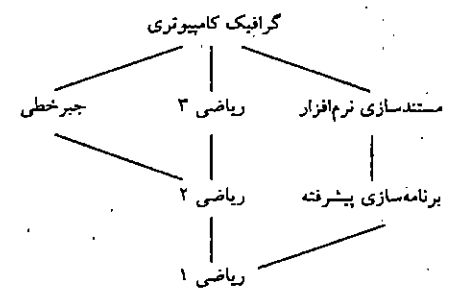
شکل ۳-۱۳

عنوان درس	پیش‌نیاز
ریاضی ۱	
ریاضی ۲	ریاضی ۱
ریاضی ۳	ریاضی ۲
جبرخطی	ریاضی ۲
برنامه‌سازی پیشرفته	ریاضی ۱
مستندسازی نرم‌افزار	برنامه‌سازی پیشرفته
گرافیک کامپیوتری	ریاضی ۳، جبرخطی، برنامه‌سازی پیشرفته

حل:

در ابتدا نمودار هاس این رابطه رسم می‌شود. برای استخراج ترتیب توبولوجیکی خواهیم داشت:

عنصر مینیمال در گراف «ریاضی ۱» است. آن را حذف می‌نماییم. بنابراین دانشجو در ترم اول می‌تواند درس «ریاضی ۱» را اخذ نماید.



شکل ۳-۱۵.

با حذف «ریاضی ۱» دو عنصر مینیمال «ریاضی ۲» و «برنامه‌سازی پیشرفته» در نمودار وجود دارند. بنابراین می‌توان به دانشجو پیشنهاد نمود در ترم دوم این دو درس را اخذ نمایند.

با حذف «ریاضی ۲» و «برنامه‌سازی پیشرفته» از نمودار، «مستندسازی نرم‌افزار»، «ریاضی ۳» و «جبرخطی» عناصر مینیمال هستند. بنابراین دانشجو می‌تواند در ترم سوم این سه درس را اخذ نماید. با حذف سه درس مرحله قبل، تنها درس «گرافیک کامپیوتری» باقی می‌ماند که به دانشجو پیشنهاد می‌شود. در ترم چهارم این درس را اخذ نماید.

۳-۱-۶- کران‌های بالا و پایین

در قسمت ۳-۱-۴ عناصر بزرگ‌ترین، کوچک‌ترین، ماکسیمال و مینیمال در مجموعه مرتب جزئی معرفی شدند، دو عنصر دیگر نیز در این بخش معرفی می‌شوند. فرض کنید $(A, \leq)$ مجموعه مرتب جزئی و $B \subseteq A$ باشد، در اینصورت:

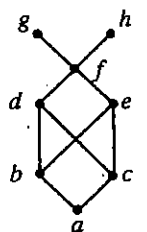
☐ کران بالای یک مجموعه: عضو $a \in A$ را کران بالای B نامیم هرگاه $\forall x \in B, x \leq a$

☐ کران پایین یک مجموعه: عضو $b \in A$ را کران پایین B نامیم هرگاه $\forall x \in B, b \leq x$

توجه:

کران بالا و پایین برای یک زیرمجموعه از عناصر مجموعه اصلی تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر کران بالا و پایین مجموعه B لزوماً به مجموعه B تعلق ندارد. تفاوت اصلی کران بالا و پایین با عنصر بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین در همین نکته است.

☐ مثال ۳-۲۲: در نمودار هاس شکل ۳-۱۶، $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$



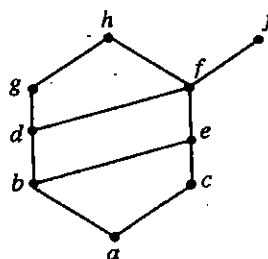
شکل ۳-۱۶.

الف) اگر $B = \{b, c\}$ آن‌گاه:

- کران‌های بالای $B = \{d, e, f, g, h\}$
- کران‌های پایین $B = \{a\}$

ب) اگر $C = \{d, e, f, g\}$ آن‌گاه:

- کران‌های بالای $C = \{g\}$
- کران‌های پایین $C = \{a, b, c\}$



شکل ۳-۱۷

اگر $B = \{a, b, c\}$ آن گاه:

✓ کران‌های بالای B برابر $\{ef, j, h\}$ بنابراین: $LUB(B) = \{e\}$

✓ کران‌های پایین $B = \{a\}$ بنابراین: $GLB(B) = \{a\}$

اگر $C = \{j, h\}$ آن گاه:

✓ کران‌های بالای C برابر $\{\}$ است، بنابراین: $LUB(C) = \{\}$

✓ کران‌های پایین C برابر $\{a, b, c, e, d, f\}$ است، بنابراین: $GLB(C) = \{f\}$

اگر $D = \{a, c, d, f\}$ آن گاه:

✓ کران‌های بالای D برابر $\{f, j, h\}$ بنابراین: $LUB(D) = \{f\}$

✓ کران‌های پایین D برابر $\{a\}$ بنابراین: $GLB(D) = \{a\}$

اگر $E = \{a, c\}$ آن گاه:

✓ کران‌های بالای $E = \{c, e, f, j, h\}$ بنابراین: $LUB(E) = \{c\}$

✓ کران‌های پایین $E = \{a\}$ بنابراین: $GLB(E) = \{a\}$

۳-۲- شبکه

شبکه: هر مجموعه مرتب جزئی $(A, \leq)$ که در آن هر زیرمجموعه دو عضوی، دارای یک LUB و یک GLB باشد را شبکه (یا لاتیس) نامند.

مثال ۳-۲۵: آیا نمودار هاس شکل ۳-۱۸ شبکه است؟

(ج) اگر $D = \{g, h\}$ آن گاه:

• کران‌های بالای $D = \{\}$

• کران‌های پایین $D = \{a, b, c, d, e, f\}$

(د) اگر $E = \{d, e\}$ آن گاه:

• کران بالای $E = \{f, g, h\}$

• کران پایین $E = \{b, c, a\}$

۳-۱-۷- کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین

فرض کنید $(A, \leq)$ مجموعه ترتیب جزئی و $D \subseteq A$ در این صورت:

■ کوچک‌ترین کران بالای یک مجموعه: اگر U مجموعه همه کران‌های بالای D باشد، آن گاه کوچک‌ترین عنصر U در صورت وجود کوچک‌ترین کران بالای D نامیده می‌شود و با $LUB(D)$ نشان داده می‌شود. به کوچک‌ترین کران بالا، سوپریمم نیز گفته می‌شود.

■ بزرگ‌ترین کران پایین یک مجموعه: اگر L مجموعه همه کران‌های پایین D باشد، آن گاه بزرگ‌ترین عنصر L در صورت وجود بزرگ‌ترین کران پایین D نامیده می‌شود و با $GLB(D)$ نشان داده می‌شود. به بزرگ‌ترین کران پایین، اینفیمم نیز گفته می‌شود.

کدام مثال ۳-۲۳: کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین هر کدام از مجموعه‌های مثال ۳-۲۲ را به دست آورید.

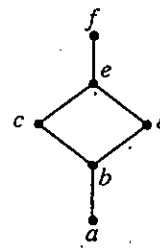
با توجه به کران‌های بالا و پایین مجموعه‌های مثال ۳-۲۲، داریم:

$$\begin{array}{llll} LUB(B) = \phi & LUB(C) = \{g\} & LUB(D) = \phi & LUB(E) = \{f\} \\ GLB(B) = \{a\} & GLB(C) = \phi & GLB(D) = \{f\} & GLB(E) = \phi \end{array}$$

کدام مثال ۳-۲۴: نمودار هاس شکل ۳-۱۷ را در نظر بگیرید:

حل:

باید بررسی نمود آیا هر دو عضو متمایز دارای یک LUB و یک GLB هستند یا خیر. این رابطه ترتیب جزئی، شبکه است. زیرا به عنوان مثال:



شکل ۱۸-۳

$$GLB(\{a,b\}) = \{a\} \quad GLB(\{a,c\}) = \{a\}$$

$$LUB(\{a,b\}) = \{b\} \quad LUB(\{a,c\}) = \{c\}$$

$$GLB(\{c,d\}) = \{b\} \quad GLB(\{f,c\}) = \{c\}$$

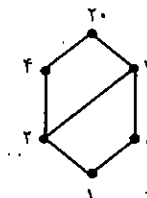
$$LUB(\{c,d\}) = \{e\} \quad LUB(\{f,c\}) = \{f\}$$

در مورد مابقی اعضاء نیز LUB و GLB قابل محاسبه هستند.

مثال ۲۶-۳: آیا مجموعه D_{20} (مجموعه مقسوم علیه های عدد ۲۰) یک شبکه است؟

حل:

ابتدا نمودار هاس D_{20} را رسم می کنیم (شکل ۱۹-۳).



شکل ۱۹-۳

این نمودار شبکه است، زیرا طبق نمودار، هر دو عضو دارای LUB و GLB است. به عنوان مثال:

$$GLB(\{5,20\}) = \{5\}$$

$$GLB(\{4,5\}) = \{1\}$$

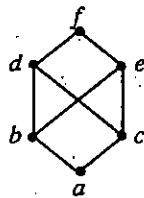
$$LUB(\{5,20\}) = \{20\}$$

$$LUB(\{4,5\}) = \{20\}$$

مثال ۲۷-۳: آیا نمودار هاس شکل ۲۰-۳ شبکه است؟

حل:

به عنوان مثال، مجموعه $\{b,c\}$ را در نظر بگیرید.

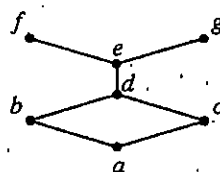


شکل ۲۰-۳

کران های بالای $\{b,c\}$ برابر $\{d,e,f\}$ است.

برای به دست آوردن کوچک ترین کران بالا نمی توان بین d و e انتخابی داشت. همین امر در مورد پیدا نمودن بزرگ ترین کران پایین برای $\{d,e\}$ حاکم است. کران های پایین این مجموعه $\{a,b,c\}$ هستند. در این حالت نمی توان بین b و c عضوی را به عنوان بزرگ ترین کران پایین انتخاب نمود؛ بنابراین این نمودار شبکه نمی باشد.

مثال ۲۸-۳: آیا نمودار هاس شکل ۲۱-۳ شبکه است؟



شکل ۲۱-۳

مجموعه $\{f,g\}$ را در نظر می گیریم. کران های بالای $\{f,g\}$ برابر $\{e\}$ است، بنابراین مجموعه $\{f,g\}$ دارای کوچک ترین کران بالا نمی باشد. لذا این نمودار شبکه نیست.

مثال ۲۹-۳: آیا نمودار شکل ۲۲-۳ شبکه است؟

شده باشد:

A = بسیار محرمانه

B = محرمانه

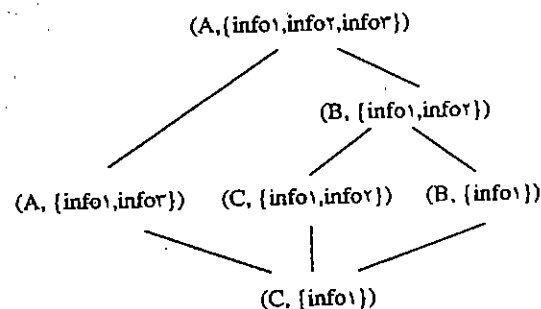
C = غیرمحرمانه

زوج (M, N) این گونه تعریف می‌شود که M نشان‌دهنده نوع دسترسی و N مجموعه اطلاعاتی است که با نوع دسترسی M قابل دسترسی است. به عنوان نمونه $(B, \{info_2, info_3\})$ نشان می‌دهد که دسترسی به اطلاعات $info_2$ و $info_3$ تنها با نوع دسترسی B امکان پذیر است. حال فرض نمایید:

$$(A_1, I_1) \leq (A_2, I_2) \text{ اگر و تنها اگر } A_1 \leq A_2 \text{ و } I_1 \subseteq I_2$$

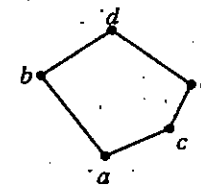
یعنی رابطه ترتیب جزئی $(A_1, I_1) \leq (A_2, I_2)$ زمانی برقرار است که مقدار A_1 از A_2 کوچکتر مساوی باشد (یعنی سطح دسترسی امنیتی A_1 از A_2 کمتر باشد) و ثانیا مجموعه اطلاعات I_1 زیرمجموعه‌ای از اطلاعات I_2 باشد. (دقت نمایید علامت $\leq$ در $(A_1, I_1) \leq (A_2, I_2)$ به معنی ترتیب جزئی و این نماد در $A_1 \leq A_2$ به معنای کوچکتر مساوی است).

حال گردش اطلاعات از کلاس امنیتی (A_1, I_1) وقتی به کلاس امنیتی (A_2, I_2) مجاز است که $(A_1, I_1) \leq (A_2, I_2)$.



شکل ۲۴-۳

بنابراین گردش اطلاعات از $(C, \{info_1\})$ به $(B, \{info_1\})$ و یا $(B, \{info_1, info_2\})$ امکان پذیر است، اما گردش اطلاعات از $(A, \{info_1\})$ به



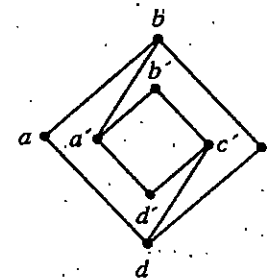
شکل ۲۲-۳

حل:

برای هر دو عضو انتخابی می‌توان یک LUB و یک GLB محاسبه نمود، بنابراین نمودار شبکه است.

کدام مثال ۳۰-۳: آیا نمودار شکل ۲۳-۳ شبکه است؟

حل:



شکل ۲۳-۳

اگر مجموعه دو عضوی $\{a, b'\}$ را در نظر بگیریم، کران بالایی برای آن وجود ندارد. در نتیجه این نمودار شبکه نیست.

کدام مثال ۳۱-۳: در برخی سیستم‌ها گردش اطلاعات از یک شخص یا برنامه کامپیوتری به دیگری نیاز به داشتن برخی مجوزهای امنیتی دارد. در این موارد می‌توان با به کار بردن شبکه، سیاست‌های امنیتی متفاوت را در مورد جریان اطلاعات اعمال نمود.

فرض کنید در یک سیستم امنیتی سه دسته اطلاعات $info_1, info_2, info_3$ وجود داشته باشند. هم‌چنین فرض نمایید، در این سیستم سه نوع دسترسی امنیتی زیر تعریف

$(B, \{info2, info3\})$ امکان‌پذیر نمی‌باشد. به راحتی مشخص است که برای نمایش گردش اطلاعات مجاز می‌توان از شبکه بهره گرفت. به‌عنوان مثال شبکه شکل ۳-۲۴، گردش اطلاعات بین ۶ شخص (کامپیوتر) را نشان می‌دهد.

نماد:

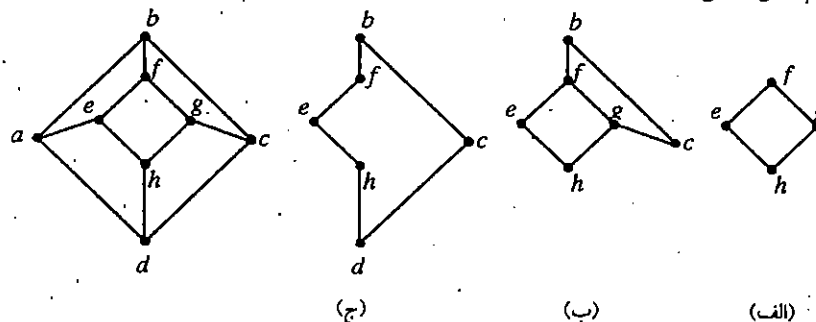
اگر (L, K) یک شبکه باشد، آن‌گاه به ازای هر $x, y \in A$ دو نماد $\vee$ و $\wedge$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$LUB(x, y) = x \vee y \quad \text{و} \quad GLB(x, y) = x \wedge y$$

۳-۲-۱- زیر شبکه

تعریف: فرض کنیم (L, K) یک شبکه و A زیرمجموعه‌ای ناتهی از L باشد، در این‌صورت (A, K) را یک زیر شبکه از (L, K) گویند هرگاه به ازای هر $a, b \in A$ عناصر $a \vee b$ و $a \wedge b$ نیز متعلق به مجموعه A باشد.

مثال ۳-۳۲: در مورد نمودار هاس مقابل، کدام یک از زیرمجموعه‌های نشان داده شده در قسمت (الف)، (ب) و (ج) شکل ۳-۲۵، یک زیر شبکه برای نمودار سمت چپ این شکل است؟



شکل ۳-۲۵

حل:

نمودار (الف) زیر شبکه است. زیرا هر دو عضوی که در نظر گرفته شود، LUB و GLB آن نیز در نمودار وجود دارد. به‌عنوان مثال e و g را در نظر بگیرید: در نمودار اصلی کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین این دو عضو به ترتیب h و f هستند که هر دو در این زیرمجموعه قرار گرفته‌اند.

نمودار (ب) زیر شبکه نیست؛ زیرا به‌عنوان نمونه $GLB(\{h, c\}) = d$ و عضو d در این نمودار وجود ندارد.

نمودار (ج) زیر شبکه نیست؛ زیرا $LUB(\{h, c\}) = g$ و عضو g در این نمودار وجود ندارد.

۳-۲-۲- خواص شبکه‌ها

اگر (L, K) یک شبکه باشد، آن‌گاه به ازای هر $x, y, z \in L$ داریم:

$$\text{الف)} \quad x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y, \quad x \wedge y = x$$

$$\text{ب)} \quad \text{خاصیت خود توانی: } x \vee x = x \quad \text{و} \quad x \wedge x = x$$

$$\text{ج)} \quad \text{خاصیت جابجایی: } x \vee y = y \vee x \quad \text{و} \quad x \wedge y = y \wedge x$$

$$\text{د)} \quad \text{خاصیت شرکت‌پذیری: } x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad \text{و} \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$\text{ه)} \quad \text{خاصیت جذب: } x \vee (x \wedge y) = x \quad \text{و} \quad x \wedge (x \vee y) = x$$

$$\text{و)} \quad \text{خاصیت هم‌نوازی: } x \vee z \leq y \vee z, \quad x \wedge z \leq y \wedge z \Rightarrow x \leq y$$

۳-۲-۳- شبکه محدود

تعریف: شبکه محدود: شبکه L را محدود نامند، هرگاه دارای یک بزرگ‌ترین عضو 1 و یک کوچک‌ترین عضو 0 باشد.

مثال ۳-۳۳: شبکه‌های زیر را در نظر بگیرید:

• شبکه $(\mathbb{Z}^+, |)$ شبکه محدود نیست. این شبکه دارای کوچک‌ترین عضو 1 است، اما بزرگ‌ترین عضو ندارد.

• شبکه $(D_{2n}, |)$ محدود است. کوچک‌ترین عنصر 1 و بزرگ‌ترین عنصر $2n$ است.

• شبکه $(P(\{a,b\}), \subseteq)$ محدود است که در آن کوچک‌ترین عضو $\emptyset$ و بزرگ‌ترین عضو $\{a,b\}$ است.

گزاره ۱-۳: در هر شبکه محدود داریم:

$$\forall x \in L: x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x \\ x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1$$

۳-۲-۴- شبکه توزیع‌پذیر

■ شبکه توزیع‌پذیر: شبکه L را توزیع‌پذیر گویند هرگاه به ازای هر α, y و z از L داشته باشیم:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \text{توزیع پذیری } \vee \text{ نسبت به } \wedge \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \text{توزیع پذیری } \wedge \text{ نسبت به } \vee$$

که مثال ۳-۳۴: شبکه $(P(S), \subseteq)$ توزیع‌پذیر است، زیرا برطبق نظریه مجموعه‌ها می‌دانیم اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها دارای خاصیت توزیع‌پذیری است.

که مثال ۳-۳۵: آیا شبکه $(\mathbb{Z}^+, /)$ توزیع‌پذیر است؟

حل:

فرض کنید $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ در اینصورت کافی است ثابت شود:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{و} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

حال با توجه به آنکه به ازای هر $x, y \in \mathbb{Z}^+$ داریم $x \vee y = [x, y]$ و $x \wedge y = (x, y)$:

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge ([b, c]) = (a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)] = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) = a \vee ([b, c]) = (a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)] = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

بنابراین این شبکه توزیع‌پذیر است.

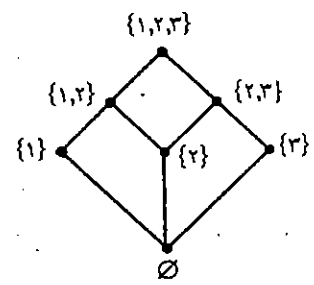
توجه نمایید که (x, y) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و $[x, y]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عنصر x و y است.

۱۴۱ ترتیب جزئی، شبکه، جبر بول

که مثال ۳-۳۶: فرض کنید $X = \{1, 2, 3\}$ شبکه $(P(X), \subseteq)$ را در نظر بگیرید، آیا شبکه مورد نظر توزیع‌پذیر است؟

حل:

در ابتدا نمودار هاس این شبکه را رسم می‌نماییم.



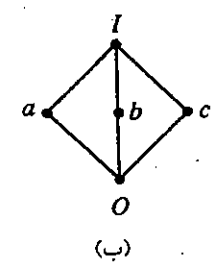
شکل ۳-۲۶

عضو $\{1\}$ ، $\{2\}$ و $\{3\}$ را انتخاب می‌نماییم.

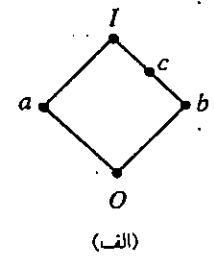
$$\{1\} \vee (\{2\} \wedge \{3\}) = \{1\} \vee \emptyset = \{1\} \\ (\{1\} \vee \{3\}) \wedge (\{1\} \vee \{2\}) = \{1, 3\} \wedge \{1, 2\} = \{1, 2\}$$

توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$ وجود ندارد. بنابراین این شبکه توزیع‌پذیر نیست.

که مثال ۳-۳۷: آیا نمودارهای هاس زیر شبکه توزیع‌پذیر هستند؟



(ب)



(الف)

شکل ۳-۲۷

حل:

شکل (الف):

$$b \vee (a \wedge c) = b \vee O = b \\ (b \vee a) \wedge (b \vee c) = I \wedge c = c$$

بنابراین این شبکه توزیع پذیر نیست.

شکل (ب):

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge I = a$$

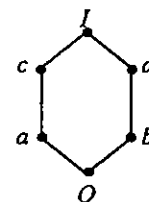
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = O \vee O = O$$

بنابراین این شبکه توزیع پذیر نیست.

از آنجا که بررسی توزیع پذیری یک شبکه عمل بسیار زمان گیری است و باید هر سه عضو متمایز انتخاب و توزیع پذیری بررسی گردد، برای این منظور از قضیه زیر استفاده می شود.

✓ قضیه ۱-۳: شبکه L توزیع پذیر است اگر و فقط اگر دارای زیر شبکه ای یکریخت با یکی از شبکه های شکل ۲۷-۳ نباشد.

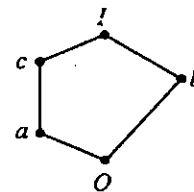
کمال مثال ۳-۳۸: آیا شبکه شکل ۲۸-۳ توزیع پذیر است؟



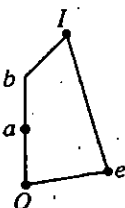
شکل ۲۸-۳

حل:

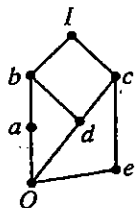
خیر، زیرا این شبکه دارای زیر شبکه زیر است که، یکریخت با شکل ۲۷-۳ (الف) می باشد.



کمال مثال ۳-۳۹: آیا شبکه شکل ۲۹-۳ (الف) توزیع پذیر است؟



(ب)



(الف)

شکل ۲۹-۳

حل:

شکل ۲۹-۳ (ب) زیر شبکه ای از این شبکه را نشان می دهد. این زیر شبکه یکریخت با شکل ۲۷-۳ (الف) است. بنابراین طبق قضیه ۱-۳، شبکه توزیع پذیر نیست.

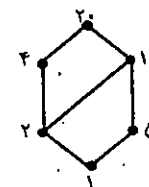
۳-۲-۵- شبکه متمم پذیر

☐ متمم یک عضو در شبکه: فرض کنید $(L, \leq)$ شبکه ای محدود به همراه بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد، منظور از متمم عضو $a \in L$ در این شبکه، عضوی منحصر بفرد مانند $a' \in L$ است به طوری که $a \wedge a' = O$ و $a \vee a' = I$

☐ شبکه متمم پذیر: شبکه L را متمم پذیر گویند هرگاه هر عنصر آن دارای متمم باشد.

کمال مثال ۳-۴۰: شبکه $(P(S), \subseteq)$ را در نظر بگیرید. این شبکه متمم پذیر است و برای هر $A \in P(S)$ متممی مانند A' وجود دارد به طوری که $A \cap A' = \emptyset$ و $A \cup A' = S$

کمال مثال ۳-۴۱: آیا شبکه $(D_{2^n}, |)$ متمم پذیر است؟


 شکل ۳-۳۰. شبکه D_6

حل:

در این شبکه ۴ و ۵ متمم یکدیگرند زیرا $4 \vee 5 = 1$ و $4 \wedge 5 = 2$. اما عضو ۲ دارای متمم نیست، زیرا: $2 \vee 5 = 1$ و $2 \wedge 5 = 1$.
به همین ترتیب، اگر عناصر دیگر را نیز بررسی نماییم، متممی برای ۲ پیدا نمی‌کنیم. بنابراین این شبکه متمم‌پذیر نیست.

۳-۳-۳ جبر بول

جبر بول: شبکه $(B, \leq)$ را جبر بول نامیم هرگاه $(B, \leq)$ شبکه‌ای محدود، توزیع‌پذیر و متمم‌پذیر باشد.

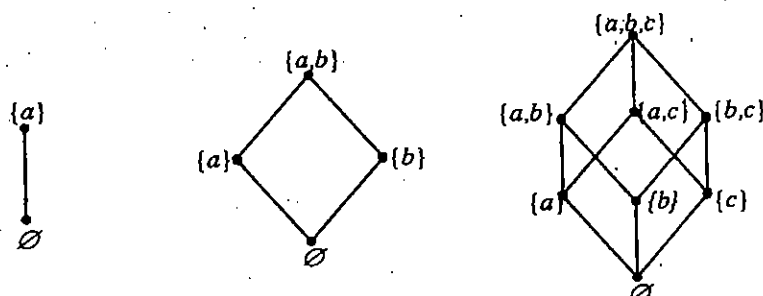
۳-۳-۱ خواص جبر بول

در جبر بول، علامت $\vee$ با $+$ نمایش داده می‌شود و به عنوان جمع بولی نامیده می‌شود که معادل عمل OR منطقی است. از سوی دیگر علامت $\wedge$ به عنوان ضرب بولی نامیده می‌شود و با علامت $*$ یا $\cdot$ هم نمایش داده می‌شود و معادل عمل AND منطقی است. گاهی نیز این عملگر بدون علامتی در نظر گرفته می‌شود، بنابراین از هر کدام از علامت‌های زیر می‌توان برای ضرب بولی استفاده نمود: $x * y \equiv x \cdot y \equiv xy$ در جبر بول متمم‌گیری نیز معادل عمل NOT منطقی است.
جدول ۳-۱، خواص جبر بول را نشان می‌دهد.

جدول ۳-۱. خواص جبر بول

$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	۱. تأثیر بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو
$\overline{\overline{x}} = x$ $x x' = 0$		۲. خاصیت عضو متمم
$x + x = x$ $x x = x$		۳. خاصیت تکرار
$x + y = y + x$ $xy = yx$		۴. خاصیت جابجایی
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$		۵. خاصیت شرکت‌پذیری
$x(y + z) = xy + xz$ $x + yz = (x + y)(x + z)$		۶. خاصیت توزیع‌پذیری
$(x + y)' = x' y'$ $(xy)' = x' + y'$		۷. قوانین دمورگان
$x + xy = x$ $x(x + y) = x$		۸. قوانین جذب

مثال ۳-۴۲: $(P(A), \subseteq, \cap, \cup)$ یک شبکه محدود، متمم‌پذیر و توزیع‌پذیر است، بنابراین جبر بول است. در شکل زیر این شبکه‌ها برای مجموعه‌های یک عضوی، دو عضوی و سه عضوی نشان داده شده‌اند.



الف. مجموعه یک عضوی

ب. مجموعه دو عضوی

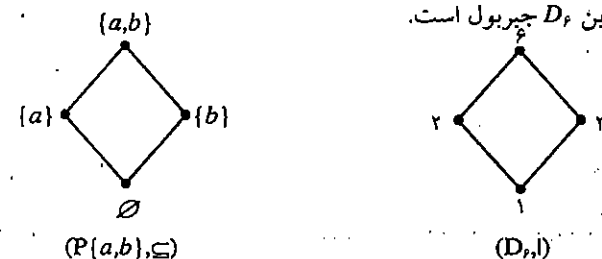
ج. مجموعه سه عضوی

شکل ۳-۳۱

نکته:

هر جبر بول یکریخت با یک شبکه $(P(A), \subseteq)$ می‌باشد، یعنی اگر شبکه‌ای یکریخت با شبکه $(P(A), \subseteq)$ باشد، جبر بول خواهد بود.

مثال ۳-۴۳: در شکل زیر مشخص است که D_6 و $(P(a, b), \subseteq)$ یکریخت هستند، بنابراین D_6 جبر بول است.



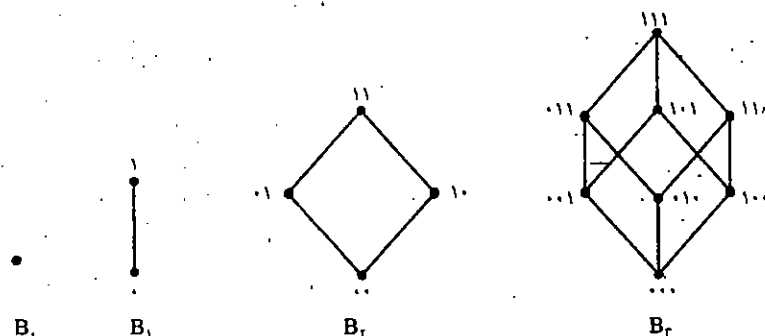
شکل ۳-۳۲

۳-۲-۳- نمایش جبر بول

اگر نمودار هاس شبکه $(P(A), \subseteq)$ را که در آن A دارای n عنصر است، با رسته‌هایی از صفر و یک به طول n برچسب زد، شبکه حاصل را B_n نامند. اگر $x = a_1 a_2 \dots a_n$ و $y = b_1 b_2 \dots b_n$ دو عضو از B_n باشند، در اینصورت:

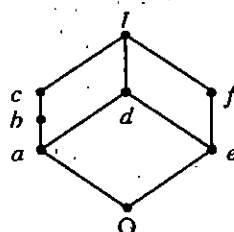
- $x \leq y$ اگر و تنها اگر $a_k \leq b_k$ ($k=1, 2, \dots, n$)
- $x \wedge y = c_1 c_2 \dots c_n$ که در آن $c_k = \min\{a_k, b_k\}$ ($k=1, 2, \dots, n$)
- $x \vee y = c_1 c_2 \dots c_n$ که در آن $c_k = \max\{a_k, b_k\}$ ($k=1, 2, \dots, n$)
- $x = x_1 x_2 \dots x_n$ دارای متمم $x' = y_1 y_2 \dots y_n$ است که در آن $y_k = 1$ اگر $x_k = 0$ و $y_k = 0$ اگر $x_k = 1$

طبق تعریف، تعداد رئوس نمودار هاس B_n 2^n خواهد بود. در شکل ۳-۳۳، B_3 به ازای $n=0, 1, 2, 3$ نشان داده شده است.



شکل ۳-۳۳

مثال ۳-۴۴: آیا شبکه شکل زیر جبر بول است؟

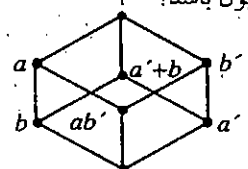


شکل ۳-۳۴

حل:

تعداد رئوس در این شبکه 2^3 است. اما اگر دقت نماییم عنصر f متمم منحصر بفرد ندارد و b و c هر دو متمم f هستند. در نتیجه این شبکه جبر بول نمی‌باشد.

مثال ۳-۴۵: یک جبر بول بوسیله نمودار هاس در شکل ۳-۳۵ زیر نشان داده شده است. کدام یک از زیرمجموعه‌های زیر می‌تواند یک جبر بول باشد؟



شکل ۳-۳۵

- (الف) $\{ab', b', a, 1\}$
- (ب) $\{b', ab', a', b\}$
- (ج) $\{a'+b, ab', 0, 1\}$
- (د) $\{a, b', 0, 1\}$

حل:

الف) $\{ab', b', a, 1\}$

در جبر بول عضو ۱ و ۰ باید وجود داشته باشد، در این مجموعه عضو ۰ قرار ندارد، بنابراین نمی‌تواند جبر بول باشد.

ب) $\{b', ab', a', b\}$

در این مجموعه عضو ۰ و ۱ وجود ندارد بنابراین جبر بول نیست.

ج) $\{a'+b, ab', 1, 0\}$

در این مجموعه عضو ۰ و ۱ وجود دارد. بنابراین بررسی خواهیم نمود آیا اعضاء مجموعه دارای متمم منحصر بفرد هستند یا خیر. دو عضو ۰ و ۱ متمم منحصر بفرد یکدیگرند. با دقت بر روی شکل می‌بینیم دو عضو ab' و $a'+b$ با یکدیگر متمم هستند، زیرا کوچک‌ترین کران بالای آنها ۱ و بزرگ‌ترین کران پایین آنها ۰ است. بنابراین این مجموعه جبر بول است.

د) $\{a, b', 0, 1\}$

با توجه به شکل متمم a عنصر a' است، و متمم b' عضو b است، که این دو عضو در مجموعه قرار ندارند، بنابراین این مجموعه جبر بول نیست.

۳-۳-۳-۳ تابع بولی

تعریف: تابع بولی: تابع $f: B_n \rightarrow B$ که دامنه آن B_n ($B \times B \times B \times \dots \times B$ n بار) است و برد آن $B = \{0, 1\}$ است یک تابع بولی نامیده می‌شود. با توجه به برد تابع بولی، خروجی یک تابع بولی ۰ یا ۱ است.

مثال ۳-۴۶: تابع بولی $f: B_2 \rightarrow B$ که در آن $f(x, y) = xy$ را در نظر بگیرید.

B_2 یعنی ۲ متغیر وجود دارد که اینها نسبت به هم $2^2 = 4$ حالت دارند. این تابع وقتی خروجی ۱ تولید می‌کند که x و y هر دو ۱ باشند در سایر موارد خروجی صفر خواهد بود.

تابع بولی می‌تواند به صورت‌های مختلف نشان داده شود. در ادامه، سه شیوه نمایش تابع بولی بیان شده است.

۳-۳-۱-۱ عبارت بولی

یکی از شیوه‌های نمایش تابع بولی استفاده از عبارات بولی است.

تعریف: عبارت بولی: یک عبارت بولی یا چندجمله‌ای بولی روی n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. $x_1, x_2, \dots, x_n$ هر کدام به تنهایی عبارت بولی هستند.

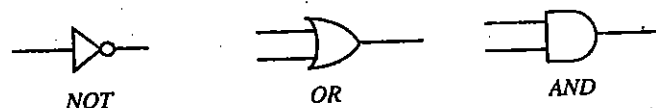
۲. نمادهای ۰ و ۱ عبارت بولی هستند.

۳. اگر $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ دو عبارت بولی باشند، آن‌گاه $P+Q$ و $P.Q$ نیز عبارت بولی هستند.

۴. اگر $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک عبارت بولی باشد، متمم آن یعنی $P'(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نیز یک عبارت بولی خواهد بود.

۳-۳-۲-۲ استفاده از نمودار منطقی برای نمایش عبارات بولی

یکی دیگر از شیوه‌های نمایش تابع بولی استفاده از نمودار منطقی (مدار منطقی) است. بطور کلی در نمودار منطقی برای نشان دادن AND، OR و NOT از نمودارهای زیر استفاده می‌شود:



شکل ۳-۴۶

هر کدام از این نمودارها، اصطلاحاً یک گیت نامیده می‌شود.

مثال ۳-۴۷: تابع $f(x, y) = x+y$ را در نظر بگیرید، نمایش نمودار منطقی تابع در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۳-۴۷

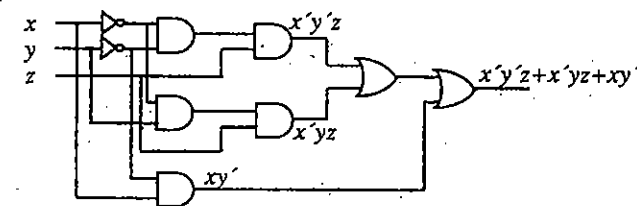
۳-۳-۳-۳ استفاده از جداول درستی برای نمایش عبارات بولی

در فصل ۱، جدول درستی و طریقه رسم آن نشان داده شده بود. یکی دیگر از شیوه‌های نمایش تابع بول استفاده از جدول درستی است. جدول درستی تابع f_1 در شکل زیر نشان داده شده است.

جدول ۲-۳. جدول درستی تابع f_1

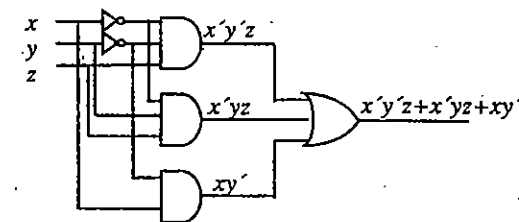
x	y	y'	$f_1 = x + y'$
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱

کلمه مثال ۳-۴۸: تابع $f_1: B_2 \rightarrow B$ که بصورت عبارت بولی $f_1 = x'y'z + x'yz + xy'$ تعریف شده است را با استفاده از نمودار منطقی و جدول درستی نمایش دهید.



شکل ۳-۴۸

اگر نمودارهای AND و OR بتوانند بیشتر از دو ورودی قبول نمایند، نمودار فوق به شکل زیر در می‌آید:



شکل ۳-۴۹

اگر از جدول درستی برای نمایش این عبارت بولی استفاده نماییم، حاصل به صورت جدول زیر خواهد شد:

جدول ۳-۳. جدول درستی تابع f_1

x	y	z	x'	y'	$x'y'z$	$x'yz$	xy'	$x'y'z + x'yz + xy'$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰

۳-۳-۴ صورت‌های نرمال نمایش عبارات بولی

۳-۴-۱-۳-۳ نمایش عبارات بولی به صورت جمع حاصل ضرب‌ها

لفظ: به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ اگر f تابع بولی از n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشد، هر x_i یا متمم آن $\bar{x}_i$ که $1 \leq i \leq n$ را یک لفظ گویند.

ترکیب عطفی بنیادی: هر عبارتی به صورت $y_1 y_2 \dots y_n$ که در آن هر y_i ($1 \leq i \leq n$) برابر x_i یا $\bar{x}_i$ است، یک ترکیب عطفی بنیادی نامیده می‌شود.

صورت نرمال فصلی: نمایشی از تابع بولی که به صورت مجموعی از ترکیب‌های عطفی بنیادی باشد، صورت نرمال فصلی (به اختصار $d.n.f$) نامیده می‌شود.

کلمه مثال ۳-۴۹: تابع $f = x'y' + xz' + xyz$ را به صورت $d.n.f$ بنویسید.

حل:

با توجه به جدول ۳-۴ مشاهده می‌شود که ستون f شامل پنج تا ۱ است. این پنج تا ۱ نشان می‌دهد که $d.n.f$ شامل پنج ترکیب عطفی بنیادی است. و از این رو:

$$f = x'y'z' + x'y'z + xy'z' + xyz' + xyz$$

جدول ۵-۳ ترکیب‌های عطفی بنیادی حاصل از ۳ متغیر

علامت	نشان دودویی	جمله ترکیب عطفی بنیادی	x	y	z
m_0	۰۰۰(=۰)	$x'y'z'$	۰	۰	۰
m_1	۰۰۱(=۱)	$x'y'z$	۰	۰	۱
m_2	۰۱۰(=۲)	$x'yz'$	۰	۱	۰
m_3	۰۱۱(=۳)	$x'yz$	۰	۱	۱
m_4	۱۰۰(=۴)	$xy'z'$	۱	۰	۰
m_5	۱۰۱(=۵)	$xy'z$	۱	۰	۱
m_6	۱۱۰(=۶)	xyz'	۱	۱	۰
m_7	۱۱۱(=۷)	xyz	۱	۱	۱

۳-۴-۳-۲- نمایش عبارات بولی به صورت ضرب حاصل جمع‌ها

ترکیب فصلی بنیادی: هر عبارتی به صورت $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ راه که در آن هر y_i ($1 \leq i \leq n$) برابر x_i یا $\bar{x}_i$ است، یک ترکیب فصلی بنیادی نامیده می‌شود.

صورت نرمال عطفی: نمایشی از تابع بولی که به صورت مجموعی از ترکیب‌های فصلی بنیادی باشد، صورت نرمال عطفی (به اختصار c.n.f) نامیده می‌شود. در حقیقت، c.n.f دوگان d.n.f است.

مثال ۵۰-۳: فرض کنید $f: B_3 \rightarrow B$ با جدول ۶-۳ داده شده است.

$$f = (x+y+z)(x+y'+z)(x'+y'+z)$$

جدول ۶-۳ جدول درستی تابع f

x	y	z	x+y+z	x+y'+z	x'+y'+z	$f = (x+y+z)(x+y'+z)(x'+y'+z)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۱	۰

جدول ۴-۳ جدول درستی تابع f

x	y	z	$x'y'$	xz'	xyz	f
۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۱	۱

راه دیگر برای ایجاد d.n.f این است که بدون استفاده از جدول درستی، ترکیبات عطفی بنیادی ایجاد شود. در این مثال تابع بولی f شامل جمع سه عبارت است. کافی است هر کدام از عبارات به صورت ترکیب عطفی بنیادی نمایش داده شوند:

در عبارت $x'y'$ متغیر z غایب است:

$$x'y' = x'y'(z+z') = x'y'z + x'y'z'$$

در عبارت xz' متغیر y غایب است:

$$xz' = xz'(y+y') = xyz' + xy'z'$$

از ویژگی خودتوانی + نتیجه می‌شود که d.n.f تابع f عبارت است از:

$$f = x'y'z' + x'y'z + xy'z' + xyz' + xyz$$

اگر n متغیر بولی وجود داشته باشد، 2^n ترکیب عطفی بنیادی وجود خواهد داشت. ترکیب‌های عطفی بنیادی با m_i ($0 \leq i \leq 2^n - 1$) نشان داده می‌شوند. جدول ۵-۳ ترکیب‌های عطفی بنیادی یک عبارت سه متغیره را نشان می‌دهد.

همان‌طور که در جدول ۵-۳ مشاهده می‌شود، i در m_i در حقیقت معادل دهمی نشان دودویی مقادیر متغیرها می‌باشد. در نمایش d.n.f یک تابع بولی می‌توان از m_i به جای عبارت بولی استفاده نمود. در مثال ۴۹-۳ تابع f از مجموع $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7$ حاصل می‌شود، از این‌رو: $f = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

ترکیب فصلی بنیادی $x+y+z$ در همه حالت‌ها دارای مقدار ۱ است، جز وقتی که $x=0, y=0, z=0$ باشد. ترکیب فصلی $x+y'+z$ در همه حالت‌ها دارای مقدار ۱ است، جز وقتی که $x=0, y=1, z=0$ چون این حالت‌ها همزمان روی نمی‌دهند، مقدار حاصل ضرب $(x+y+z)(x+y'+z)$ دقیقاً در همین دو حالت ۰ است. به همین ترتیب تابع f را می‌توان به صورت نشان داده شود:

$$f = (x+y+z)(x+y'+z)(x'+y'+z)$$

این نمایش، صورت $c.n.f$ تابع بولی f است.

اگر n متغیر بولی وجود داشته باشد، 2^n ترکیب فصلی بنیادی وجود خواهد داشت. ترکیب‌های فصلی بنیادی با M_i ($0 \leq i \leq 2^n - 1$) نشان داده می‌شوند. جدول ۷-۳ ترکیب‌های فصلی بنیادی یک عبارت سه متغیره را نشان می‌دهد.

جدول ۷-۳. ترکیب‌های فصلی بنیادی حاصل از ۳ متغیر

علامت	جمله ترکیب فصلی بنیادی	x	y	z
M_0	$x+y+z$	۰	۰	۰
M_1	$x+y+z'$	۰	۰	۱
M_2	$x+y'+z$	۰	۱	۰
M_3	$x+y'+z'$	۰	۱	۱
M_4	$x'+y+z$	۱	۰	۰
M_5	$x'+y+z'$	۱	۰	۱
M_6	$x'+y'+z$	۱	۱	۰
M_7	$x'+y'+z'$	۱	۱	۱

برای نمایش $c.n.f$ می‌توان از علامت $\prod$ به همراه شماره M_i استفاده می‌شود.

نکته:

با توجه به جدول ۵-۳ و جدول ۷-۳ می‌توان نتیجه گرفت که $m_i' = M_i$

مثال ۵۱-۳: تابع $f = x'y'z + xy'z' + xyz$ را به صورت $d.n.f$ و $c.n.f$ بنویسید.

حل:

در ابتدا، جدول درستی تابع f را به دست می‌آوریم:

جدول ۸-۳. جدول درستی تابع f

x	y	z	$x'y'z + xy'z' + xyz$
۰	۰	۰	$0 \rightarrow M_0$
۰	۰	۱	$1 \rightarrow m_1$
۰	۱	۰	$0 \rightarrow M_2$
۰	۱	۱	$0 \rightarrow M_3$
۱	۰	۰	$1 \rightarrow m_4$
۱	۰	۱	$0 \rightarrow M_5$
۱	۱	۰	$0 \rightarrow M_6$
۱	۱	۱	$1 \rightarrow m_7$

با استفاده از جدول درستی:

$$\begin{aligned} f &= x'y'z + xy'z' + xyz \\ &= m_1 + m_4 + m_7 \\ &= \sum m(1, 4, 7) \end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned} f &= (x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y'+z) \\ &= M_0 + M_2 + M_3 + M_5 + M_6 \\ &= \prod M(0, 2, 3, 5, 6) \end{aligned}$$

مثال ۵۲-۳: فرض کنید $g: B_3 \rightarrow B$ با $g(w, x, y, z) = wx + w'y + x'yz$ داده شده است.

بدون استفاده از جدول درستی این تابع را به صورت $d.n.f$ و $c.n.f$ بنویسید.

حل:

در ابتدا ترکیب عطفی بنیادی هر یک از عبارات را به دست می‌آوریم:



مثال ۳-۵۳: تابع $f = a + b'c$ را به صورت $d.n.f$ بنویسید.

حل:

در این تابع سه متغیر A ، B و C وجود دارند، پس هر ترکیب عطفی بنیادی باید شامل سه متغیر به صورت متمم یا غیرمتمم باشد. در اینجا دو جمله وجود دارد، جمله اول فاقد متغیر B و C است و جمله دوم فاقد متغیر A است. به مراحل انجام شده بر روی هر کدام از جملات دقت فرمایید:

$$\begin{aligned} a &= a(b+b')(c+c') \\ &= a(bc+bc'+b'c+b'c') \\ &= ab(c+c') + ab'(c+c') \\ &= abc+abc'+ab'c+ab'c' \end{aligned}$$

در مورد جمله دوم:

$$\begin{aligned} b'c &= (a+a')b'c \\ &= abc'+a'b'c' \end{aligned}$$

این تابع به صورت $d.n.f$

$$a+b'c = abc+abc'+ab'c'+ab'c+abc' = \sum m(1, 4, 5, 6, 7)$$

مثال ۳-۵۴: تابع بولی $f = xy + x'z$ را به صورت $c.n.f$ تبدیل نمایید.

حل:

در ابتدا جملات را به ضرب تبدیل می‌کنیم. با استفاده از خاصیت توزیع پذیری جمع نسبت به ضرب داریم:

$$\begin{aligned} xy + x'z &= (xy+x')(xy+z) \\ &= (x+x')(y+x')(x+z)(y+z) \\ &= (y+x')(x+z)(y+z) \end{aligned}$$

حال هر کدام از جملات را به ترکیب فصلی بنیادی تبدیل خواهیم نمود:

$$\begin{aligned} (x'+y) &= x'+y+0 \\ &= x'+y+zz' \\ &= (x'+y+z)(x'+y+z') \\ (x+z) &= x+0+z \\ &= x+yy'+z \\ &= (x+y+z)(x+y'+z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} wx &= wx(y+y')(z+z') \\ &= wx(yz+yz'+y'z+y'z') = wxyz+wxyz'+wxy'z+wxy'z' \end{aligned}$$

$$w'y = w'(x+x')y(z+z') = w'xyz+w'xyz'+w'x'yz+w'x'y'z'$$

$$x'yz = (w+w')x'yz = wx'yz+w'x'yz$$

با استفاده از قانون خودتوانی برای + می‌بینیم که $d.n.f$ تابع g برابر است با:

$$\begin{aligned} g &= wxyz+wxyz'+wxy'z+wxy'z'+w'xyz+w'xyz'+ \\ &\quad +w'x'yz+w'x'y'z'+wx'yz \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن هر یک از ترکیب‌های عطفی بنیادی که در $d.n.f$ تابع g وجود دارد، نشان‌های دودویی و شماره‌های m_i زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{lll} wxyz: 1111 (=15) & wxy'z': 1100 (=12) & w'x'yz: 0011 (=3) \\ wxyz': 1110 (=14) & w'xyz: 0111 (=7) & w'x'yz': 0010 (=2) \\ wxy'z: 1101 (=13) & w'xy'z': 0110 (=6) & wx'yz: 1011 (=11) \end{array}$$

در نتیجه:

$$g = \sum m(2, 3, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15)$$

از آنجا که $c.n.f$ دوگان $d.n.f$ است، داریم:

$$g = \prod M(0, 1, 4, 5, 8, 9, 10)$$

سرانجام با توجه به نشان دودویی:

$$\begin{array}{ll} 0 = 0000: w+x+y+z & 8 = 1000: w'+x+y+z \\ 1 = 0001: w+x+y+z' & 9 = 1001: w'+x+y+z' \\ 4 = 0100: w+x'+y+z & 10 = 1010: w'+x+y'+z \\ 5 = 0101: w+x'+y+z' & \end{array}$$

بنابراین $c.n.f$ تابع g عبارت است از:

$$\begin{aligned} g &= (w+x+y+z)(w+x+y+z')(w+x'+y+z)(w+x'+y+z') \\ &\quad (w'+x+y+z)(w'+x+y+z')(w'+x+y'+z) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(y+z) &= 0+y+z \\ &= xx'+y+z \\ &= (x+y+z)(x'+y+z)\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}f &= (x+y+z)(x'+y+z)(x'+y+z)(x'+y+z) \\ &= \prod M(0, 2, 4, 5)\end{aligned}$$

همین تابع به صورت $d.n.f$ برابر است با:

$$f = \sum m(1, 3, 6, 7)$$

۳-۳-۵- فرم‌های استاندارد

همان‌طور که در بخش قبل بیان شد، دو فرم نرمال جبر بول، با استفاده از جدول درستی یا مستقیماً قابل تولید بودند. نکته‌ای که در مورد این فرم‌ها وجود دارد این است که جملات این فرم‌ها دارای حداقل تعداد متغیرها نیستند. زیرا در هر ترکیب عطفی بنیادی و ترکیب فصلی بنیادی می‌بایست تمامی متغیرها به صورت متمم یا غیرمتمم حضور داشته باشند.

در این بخش دو فرم استاندارد معرفی می‌شوند، این دو فرم جمع حاصل ضرب‌ها (SOP) و دیگری ضرب حاصل جمع‌ها (POS) هستند. این دو فرم در قالب مثال بیان می‌شوند.

مثال ۳-۵۵: تابع $f=(AB+CD)(A'B'+C'D')$ را به فرم SOP و POS تبدیل نمایید.

حل:

برای تبدیل به فرم SOP با استفاده از قانون توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(AB+CD)(A'B'+C'D') &= ABA'B'+ABC'D'+A'B'CD+CD C'D' \\ &= 0+ABC'D'+A'B'CD+0 \\ &= ABC'D'+A'B'CD\end{aligned}$$

برای تبدیل به فرم POS با استفاده از قانون توزیع پذیری جمع نسبت به ضرب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(AB+CD)(A'B'+C'D') &= (AB+C)(AB+D)(A'B'+C')(A'B'+D') \\ &= (A+C)(B+C)(A+D)(B+D)(A'+C')(B'+C')(A'+D')(B'+D')\end{aligned}$$

مثال ۳-۵۶: یک موسسه کامپیوتری در نظر دارد برای آموزش $Java$, $C++$, CAD/CAM , $ORACLE$ و تست نرم افزار، اساتیدی را از بین متقاضیان گزینش نماید. ۵ متقاضی A, B, C, D, E فرم‌های تقاضای تدریس را پر نموده‌اند. هیچ کدام از این اساتید توانایی تدریس هر ۵ مهارت مورد نظر را با هم ندارند. جدول زیر مهارت‌های هر کدام از متقاضیان را نشان می‌دهد.

جدول ۳-۹.

تست نرم افزار	CAD/CAM	$ORACLE$	$Java$	$C++$	متقاضی
		✓		✓	A
	✓	✓			B
			✓	✓	C
✓			✓		D
	✓	✓	✓		E

از بین متقاضیان کدام یک از آنها انتخاب شوند، به‌طوری‌که با انتخاب حداقل تعداد متقاضیان بیشترین درس‌ها پوشش داده شوند؟

حل:

اگر متغیرهای بولی a, b, c, d, e انتخاب متقاضیان A, B, C, D, E را مشخص نماید. یعنی $a=1$ نشان می‌دهد که متقاضی A انتخاب شده است و $a=0$ نشان از عدم انتخاب A دارد.

با بررسی جدول مشخص می‌شود که $a+c$ متقاضیانی را نشان می‌دهد که توانایی تدریس $C++$ را دارند.

به همین ترتیب $c+d+e$ متقاضیانی را نشان می‌دهد که توانایی تدریس $Java$ را دارند. توانایی تدریس $ORACLE$ توسط متقاضیان $a+b+e$ امکان پذیر است. d و $b+c$

متقاضیانی را مشخص می‌نماید که به ترتیب توانایی تدریس CAD/CAM و تست نرم‌افزار را دارند.

در نظر بگیرید:

$\alpha = (a+c)(c+d+e)(a+b+e)(b+e)d$
برای جذب اساتید کافی است، به دنبال حالت‌هایی از انتخاب اساتید بود که $\alpha=1$ شود. برای انتخاب کمترین تعداد متقاضیان که توانایی تدریس مهارت‌های مورد نیاز را دارند، عبارت بولی را به صورت جمع حاصلضرب‌ها درمی‌آوریم:

$$\begin{aligned}\alpha &= (a+c)(c+d+e)(a+b+e)(b+e)d \\ &= (a+c)[e + (c+d)(a+e)b]d \\ &= (a+c)[e + (c+d)b]d \\ &= (a+c)[e+cd+db]d \\ &= ade + bcd + abd + cde\end{aligned}$$

بنابراین این موسسه می‌تواند به چهار طریق اساتید خود را انتخاب نماید. یعنی یا متقاضیان A,D,E را انتخاب نماید، یا متقاضیان B,C,D، یا متقاضیان A,B,D، یا متقاضیان C,D,E را انتخاب نماید.

۳-۳-۶- ساده‌سازی عبارات بولی

ساده‌سازی عبارات بولی، کاربردهای زیادی دارد. به‌عنوان مثال در بحث نمودارهای منطقی این موضوع مطرح می‌شود که اگر بتوان نمودار را با تعداد گیت‌های کمتری رسم نمود، مدار به لحاظ پیاده‌سازی اقتصادی‌تر خواهد بود.

عبارت بولی $xyz + x\bar{y}\bar{z}$ را در نظر بگیرید، دو حاصلضرب موجود در این عبارت فقط در لفظ تفاوت دارند. بنابراین می‌توان این دو عبارت را با یکدیگر ترکیب نمود:

$$\begin{aligned}xyz + x\bar{y}\bar{z} &= xz(y + \bar{y}) \\ &= xz.1 \\ &= xz\end{aligned}$$

یعنی $xyz + x\bar{y}\bar{z}$ هم‌ارز عبارت xz می‌باشد.

۳-۳-۱- ساده‌سازی عبارات بولی با روش کوین مک کلاسیکی

روش کوین مک کلاسیکی، روشی جهت ساده‌سازی عبارات بولی می‌باشد. در ابتدا با

یک مثال این روش توضیح داده می‌شود.

مثال ۳-۵۷: عبارت $xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ که شامل جمع تعدادی ترکیب عطفی بنیادی است، را در نظر بگیرید. مراحل ساده‌سازی با استفاده از روش کوین مک کلاسیکی به صورت زیر است:

مرحله اول، آماده نمودن جداول مورد نیاز:

در ابتدا، رشته بیتی برای هر ترکیب عطفی بنیادی استخراج می‌شود. رشته بیتی برای هر ترکیب عطفی بنیادی $x_1x_2...x_n$ به صورت $b_1b_2...b_n$ نشان داده می‌شوند، که در آن:

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \\ 0 & \text{if } \bar{x}_i \end{cases}$$

برای عبارت فوق، رشته‌های بیتی در جدول ۳-۱۰ (الف) نشان داده شده است.

جدول ۳-۱۰ (الف).

تعداد اها	رشته بیتی	ترکیب عطفی بنیادی
۳	۱۱۱	۱ xyz
۲	۱۰۱	۲ $x\bar{y}z$
۲	۰۱۱	۳ $\bar{x}yz$
۱	۰۰۱	۴ $\bar{x}\bar{y}z$
۰	۰۰۰	۵ $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

در این جدول دو ویژگی دیگر نیز وجود دارد. تعداد اهای موجود در هر رشته بیتی در ستون آخر جدول نگهداری می‌شود و نیز این ترکیبات براساس تعداد اهای موجود در رشته بیتی، گروه‌بندی شده‌اند.

مرحله دوم، ترکیب عبارات قابل ترکیب:

عباراتی می‌توانند ترکیب شوند که تنها در یک بیت از رشته بیتی اختلاف داشته باشند. بدیهی است که این ترکیب می‌تواند از دو گروه متفاوت، با یک شماره اختلاف باشد. یعنی اعضای گروه ۳ (که سه عدد ۱ در رشته بیت آن‌ها وجود دارد) با اعضای گروه ۲،

و اعضای گروه ۲ با اعضای گروه ۱ و اعضای گروه ۱ با اعضای گروه ۰ می‌توانند ترکیب شوند.

حاصل ترکیبات ممکن در جدول ۱۰-۳ (ب) نشان داده شده است.

جدول ۱۰-۳ (ب).

مرحله اول ترکیب				
عبارت	رشته بیتی	عبارت	رشته بیتی	عبارت
۱ xyz	۱۱۱	(۱,۲) xz	۱-۱	
۲ $xy\bar{z}$	۱۰۱	(۱,۳) yz	-۱۱	
۳ $\bar{x}yz$	۰۱۱	(۲,۴) $\bar{y}z$	-۰۱	
۴ $\bar{x}y\bar{z}$	۰۰۱	(۳,۴) $\bar{x}z$	۰-۱	
۵ $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	۰۰۰	(۴,۵) $\bar{x}\bar{y}$	۰۰۰	

در این جدول، رشته بیتی عبارت ۱ یعنی xyz و رشته بیتی عبارت $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ تنها در یک بیت اختلاف دارند، بنابراین با یکدیگر ترکیب می‌شوند. عبارت حاصل از ترکیب، برابر قسمت مشترک دو عبارت، یعنی xz خواهد بود. رشته‌های بیتی هر کدام از عبارت‌ها به ترتیب ۱۱۱ و ۱۰۱ هستند، که در دومین بیت اختلاف دارند. بنابراین رشته بیتی ترکیب، برابر خواهد بود با ۱-۱، یعنی بیت‌های مشترک نوشته می‌شود، اما بجای بیت متفاوت در دو عبارت، علامت - گذاشته می‌شود. به همین ترتیب ترکیبات دیگر به دست می‌آید.

پس از این مرحله، می‌بایست امکان ترکیب در عبارات جدید بررسی شود، مجدداً ترکیب در عباراتی انجام می‌شود که در رشته‌بیتی‌های آن‌ها، تنها یک تفاوت وجود داشته باشد؛ حاصل این ترکیب در جدول ۱۰-۳ (ج) نشان داده شده است. با ترکیب حالت (۱,۲) و (۳,۴)، یا (۱,۳) و (۲,۴)، حالت جدید (۱,۲,۳,۴) حاصل می‌شود. تنها حالتی که در این مرحله در ترکیب شرکت نداشته، حالت (۴,۵) است. ترکیب عبارات تاجایی ادامه می‌یابد که امکان ترکیب عبارات مرچود، وجود نداشته باشد.

مرحله سوم، انتخاب عبارات: با بررسی جدول ۱۰-۳ (ج)، عبارت‌هایی که با عبارت‌های دیگر ترکیب نشده‌اند انتخاب

می‌شوند. این عبارت‌ها عبارتند از z و $\bar{z}$.

جدول ۱۰-۳ (ج).

مرحله اول ترکیب			مرحله دوم ترکیب		
عبارت	رشته بیتی	عبارت	رشته بیتی	عبارت	رشته بیتی
۱ xyz	۱۱۱	(۱,۲) xz	۱-۱		
۲ $xy\bar{z}$	۱۰۱	(۱,۳) yz	-۱۱		
۳ $\bar{x}yz$	۰۱۱	(۲,۴) $\bar{y}z$	-۰۱		
۴ $\bar{x}y\bar{z}$	۰۰۱	(۳,۴) $\bar{x}z$	۰-۱		
۵ $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	۰۰۰				

حال در این مرحله جدول زیر رسم می‌شود. در این جدول مشخص می‌شود که هر کدام از ترکیبات عطفی بنیادی صورت مسأله، توسط کدام یک از عبارت‌های z و $\bar{z}$ پوشش داده می‌شوند. به عنوان نمونه ترکیبات عطفی بنیادی xyz ، $\bar{x}yz$ ، $\bar{x}y\bar{z}$ توسط z پوشش داده می‌شوند (یعنی z در آن‌ها وجود دارد). و ترکیبات عطفی بنیادی $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ و $\bar{x}\bar{y}z$ توسط $\bar{z}$ پوشش داده می‌شوند.

جدول ۱۰-۳ (د).

	xyz	$xy\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
z	✓	✓	✓	✓	
$\bar{z}$				✓	✓

در این مرحله، از بین عبارت‌های z و $\bar{z}$ آن‌هایی انتخاب می‌شوند که برای تولید هر کدام از ترکیبات عطفی بنیادی ضروری هستند. عبارت z باید باشد، زیرا برای تولید سه عبارت xyz ، $\bar{x}yz$ ، $\bar{x}y\bar{z}$ فقط از آن استفاده می‌شود. از طرف دیگر نیز برای پوشش عبارت $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ مورد نیاز است. بنابراین عبارت ساده شده به صورت $z + \bar{x}\bar{y}$ خواهد بود.

جدول ۳-۱۱ (الف).

تعداد اها	رشته بیتی	ترکیب عطفی بنیادی
۳	۱۱۱	xyz
۲	۱۰۱	$xy\bar{z}$
۲	۱۱۰	$xy\bar{z}$
۱	-۱-	y

مرحله دوم، ترکیب عبارات قابل ترکیب:

حالت‌های قابل ترکیب و عبارات ترکیب شده در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول ۳-۱۱ (ب).

مرحله دوم ترکیب		مرحله اول ترکیب			
رشته بیتی	عبارت	رشته بیتی	عبارت	رشته بیتی	عبارت
				۱۱۱	xyz
		۱۱-	xy	۱۰۱	$xy\bar{z}$
				۱۱۰	$xy\bar{z}$
				-۱-	y

مرحله سوم، انتخاب عبارات:

جدول ۳-۱۱ (ج)، عباراتی که در ترکیب شرکت نکرده‌اند و نیز پوشش هر کدام از عبارات موجود در صورت سوال نشان داده شده است.

جدول ۳-۱۱ (ج).

	xyz	$xy\bar{z}$	$xy\bar{z}$	y
xz	✓	✓		
y	✓		✓	✓

هر دو عبارت ضروری هستند، بنابراین عبارت حاصل به صورت $xz+y$ خواهد بود.

الگوریتم کوپین مک کلاسیکی:

مرحله اول، آماده نمودن جداول مورد نیاز:

۱. رشته بیتی هر کدام از ترکیبات عطفی بنیادی به دست می‌آید.
۲. رشته‌های بیتی بر اساس تعداد اهای موجود در هر رشته، گروه‌بندی می‌شوند.
۳. مرحله دوم، ترکیب عبارات قابل ترکیب: عبارات بولی که قابلیت ترکیب دارند، مشخص می‌شوند. عباراتی می‌توانند ترکیب شوند که تنها در یک بیت از رشته بیتی‌شان تفاوت داشته باشند.
۴. حاصل ترکیب به صورت عبارت بولی‌ایی نوشته می‌شود که فقط شامل قسمت مشترک خواهد بود. رشته بیتی عبارت حاصل نیز، همان رشته بیتی اولیه خواهد بود، با این تفاوت که جای بیت متفاوت در دو رشته بیتی، علامت - قرار داده می‌شود.
۵. مرحله ۳، تا جایی که عبارات‌هایی برای ترکیب وجود نداشته باشند، ادامه پیدا می‌کند.

مرحله سوم، انتخاب عبارات:

همه عبارات بولی که در ترکیب و ایجاد عبارات کوچک‌تر شرکت ننموده‌اند را مشخص نمایید.

۶. در یک جدول جدید، ترکیبات عطفی بنیادی به عنوان سطر اول و عبارات در نظر گرفته شده در مرحله ۵، به عنوان ستون اول در نظر گرفته می‌شوند. در هر ردیف مشخص می‌شود که هر کدام از ترکیبات عطفی بنیادی توسط کدامیک از عبارات ستون اول پوشش داده می‌شوند.

۷. عبارات ضروری، یعنی عباراتی که وجود آن‌ها برای تولید ترکیبات عطفی بنیادی ضروری هستند انتخاب شده، و در نهایت جمع بولی بین این عبارات ضروری، نشان‌دهنده عبارت ساده خواهد بود.

مثال ۳-۵۸: عبارت $xyz + xy\bar{z} + xy\bar{z} + y$ را ساده نمایید.

حل:

مرحله اول، آماده نمودن جداول مورد نیاز:

جدول مربوط به مشخصات رشته بیتی هر کدام از عبارات، عبارت است از:

مثال ۳-۵۹: می‌توان ساده‌سازی عبارات بولی را بدون استفاده از روش، و با استفاده از خواص جبر بول، انجام داد. مثال ۳-۵۷ با استفاده از خواص جبر بول به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \text{خاصیت تکرار} \\
 & xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
 & = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
 & = (xyz + x\bar{y}z) + (\bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z) + (\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}) \\
 & = xz(y + \bar{y}) + \bar{x}z(y + \bar{y}) + \bar{x}\bar{y}(z + \bar{z}) \\
 & = xz + \bar{x}z + \bar{x}\bar{y} \\
 & = z(x + \bar{x}) + \bar{x}\bar{y} \\
 & = z + \bar{x}\bar{y}
 \end{aligned}$$

به همین ترتیب مثال ۳-۵۸ می‌تواند به صورت زیر ساده شود:

$$xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + y = xz(y + \bar{y}) + \bar{y}(x\bar{z} + 1) = xz + y$$

چند نمونه مسأله حل شده

۱. کدام یک از رابطه‌های زیر ترتیب جزئی است؟

الف) $\forall x, y \in \mathbb{Z}: xRy \Leftrightarrow x = y$

ب) $\forall x, y \in \mathbb{Z}: xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$

ج) $\forall x, y \in \mathbb{Z}: xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{m}$

حل:

الف) خاصیت بازتابی، ضدتقارن و تعدی در مورد این رابطه برقرار است، بنابراین رابطه ترتیب جزئی است.

ب) خاصیت بازتابی و تعدی برقرار است، اما خاصیت ضدتقارن برقرار نیست، زیرا از اینکه $x^2 = y^2$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $x = y$ به عنوان مثال عدد ۲ و عدد -۲ را در نظر بگیرید. $(2)^2 = (-2)^2$ ولی $2 \neq -2$.

ج) این رابطه دارای خاصیت بازتابی و تعدی است، اما خاصیت ضدتقارن ندارد. به عنوان مثال $5 \equiv 3 \pmod{2}$ و $3 \equiv 5 \pmod{2}$ اما $3 \neq 5$. بنابراین رابطه ترتیب جزئی نیست.

۲. برای هر کدام از رابطه‌های زیر تعیین نمایید آیا این روابط ترتیب جزئی و ترتیب کامل هستند یا خیر؟

الف) $A = P(\{1, 2, 3\}, \subseteq)$

ب) $a, b \in \mathbb{Z}$ در رابطه R است (aRb) به طوری که $a - b$ عدد صحیح مثبت باشد.

ج) $A = R \times R$ و $a \leq a', b \leq b' \Leftrightarrow (a, b) R (a', b')$ که در آن $\leq$ رابطه کوچکتر مساوی است.

حل:

الف) این رابطه ترتیب جزئی است، اما ترتیب کامل نیست زیرا به عنوان مثال در مورد دو عضو $\{1\}$ و $\{2, 3\}$: $\{1\} \subset \{2, 3\}$ و $\{2, 3\} \not\subset \{1\}$.

ب) این رابطه ترتیب جزئی است. زیرا برای هر دو عدد صحیح یا $a-b$ یا $b-a$ مثبت هستند. از آنجا که بین هر دو عضو این رابطه وجود دارد این رابطه ترتیب کامل نیز می‌باشد.

ج) این رابطه خاصیت بازتابی، ضدمتقارن و متعدی دارد، بنابراین رابطه ترتیب جزئی است. اما رابطه ترتیب کامل نیست زیرا به‌عنوان مثال: $(۲,۶)$ و $(۸,۳)$ در این رابطه نیستند.

۳. مجموعه اعداد صحیح و رابطه $R = \{(a,b) | a,b,r \in \mathbb{Z}, a = b^r\}$ را در نظر بگیرید. آیا این رابطه ترتیب جزئی و ترتیب کامل است؟

حل: این رابطه خاصیت بازتابی دارد زیرا اگر r را برابر ۱ در نظر بگیریم برای هر عدد صحیحی داریم: $a = a^1$
برای بررسی خاصیت ضد تقارن باید بررسی نمود که آیا رابطه زیر برقرار است یا نه:

$$a = b^r, b = a^s \Rightarrow a = b$$

اگر $a = b^r$ باشد، می‌دانیم که $b = a^s$ و در این حالت توان a یک عدد صحیح نیست. بنابراین با توجه به اینکه قسمت مقدم صحیح نیست، کل عبارت شرطی درست است. بنابراین خاصیت ضد تقارن در این عبارت برقرار است.
در مورد خاصیت متعدی داریم:

$$a = b^r, b = c^s \Rightarrow a = c^{rs}$$

که حاصل rs یک عدد صحیح است. بنابراین خاصیت متعدی نیز در اینجا برقرار است.

بنابراین این رابطه ترتیب جزئی است.

خاصیت ترتیب کامل برقرار نیست. زیرا به‌عنوان مثال در مورد عدد ۵ و ۲ نمی‌توان توان صحیحی پیدا نمود به‌طوری‌که $5 = 2^x$ باشد.

توجه نمایید اگر توان به صورت اعداد حقیقی در نظر گرفته شود این رابطه دارای ترتیب کامل خواهد بود.

ترتیب جزئی، شبکه، جبر بول ۱۶۹

۴. کدام یک از مجموعه‌های زیر با رابطه بخش‌پذیری، مجموعه مرتب کامل است؟

الف) $\{۲۴, ۲۶\}$

ب) $\{۲, ۸, ۲۵, ۴\}$

ج) $\{۷\}$

حل:

الف) می‌دانیم رابطه بخش‌پذیری همواره دارای خاصیت بازتابی، متعدی و ضدمتقارن است. بنابراین این رابطه خاصیت ترتیب جزئی دارد.

اعضای مجموعه داده شده طوری است که هر دو عضوی که انتخاب شوند دارای رابطه بخش‌پذیری هستند، بنابراین هر دو عضوی مقایسه‌پذیرند. بنابراین این مجموعه مرتب کامل است.

ب) هر دو عضو انتخابی قابل مقایسه نیستند. به‌عنوان مثال $۲۵ \nmid ۲$ ، $۲ \nmid ۲۵$. بنابراین ترتیب کامل نیست.

ج) چون مجموعه داده شده تک عضوی است، دارای خاصیت ترتیب کامل است.

۵. در مجموعه مرتب جزئی عضو a را مقدم عضو b گویند، اگر aRb باشد. حال اگر بین a و b عضو دیگری از مجموعه قرار نداشته باشد، عضو a را مقدم بی‌واسطه b گویند.

مجموعه S و رابطه عادی کردن را در نظر بگیرید، مقدم‌ها و مقدم‌های بی‌واسطه ۱۲ را در مجموعه S بدست آورید.

$$S = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۱۲, ۱۶, ۲۴, ۳۶, ۴۸\}$$

حل:

اعداد ۲، ۳ و ۴ همگی مقدم‌های ۱۲ هستند، چون قبل از ۱۲ قرار دارند. توجه دارید که ۲ مقدم بی‌واسطه ۱۲ نیست، زیرا $۲/۴/۱۲$ ، اما ۳ و ۴ مقدم‌های بی‌واسطه ۱۲ هستند. زیرا هیچ عضوی در S بین ۳ و ۱۲ یا بین ۴ و ۱۲ نیست.

۶. نشان دهید چرا هر عضو یک مجموعه مرتب کامل می‌تواند حداکثر یک مقدم بی‌واسطه داشته باشد.

حل:

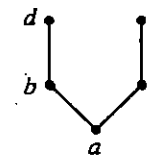
عضوهای a و b از مجموعه مرتب کامل S را در نظر بگیرید. به برهان خلف فرض کنید a هر دو مقدم‌های بی‌واسطه c باشند. از آنجا که S ترتیب کامل است، هر دو عضو دلخواه از S قابل مقایسه هستند. بنابراین یا $a \leq b$ یا $b \leq a$ بدون اینکه خللی به کلیت اثبات وارد شود، فرض کنید $a \leq b$. آن‌گاه عضو b بین a و c قرار دارند و در نتیجه به تناقض می‌رسیم. از این‌رو a و b هر دو نمی‌توانند مقدم‌های بی‌واسطه c باشند.

۷. چند رابطه روی مجموعه n عضوی A وجود دارد که ترتیب کامل باشد.

حل:

ترتیب کامل یک زنجیر است و تعداد زنجیرهای n عضوی $n!$ می‌باشد. بنابراین به تعداد $n!$ رابطه ترتیب کامل روی A می‌توان تعریف کرد.

۸. ماتریس رابطه تعریف شده بوسیله نمودار هاس زیر را به دست آورید.



شکل ۳-۳۹

حل:

در نمودار هاس تمامی طوقه‌ها حذف می‌شوند و خطوطی که از تعدی بودن به دست می‌آیند نیز نمایش داده نمی‌شوند. بنابراین ماتریس رابطه داده شده به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

۹. نشان دهید هر مجموعه مرتب کامل یک شبکه است؟

حل:

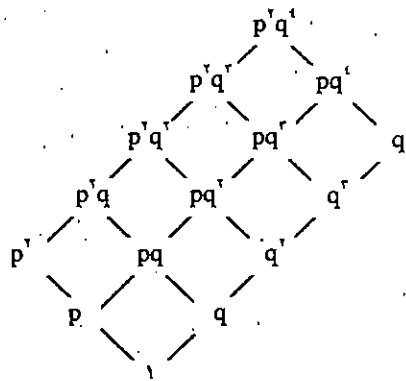
از آنجا که هر دو عضو در مجموعه مرتب کامل مقایسه‌پذیر هستند، لذا برای هر دو عضو a, b یا $a \leq b$ یا $b \leq a$.

اگر فرض کنیم $a \leq b$ باشد، آن‌گاه $GLB(\{a, b\}) = a$ و $LUB(\{a, b\}) = b$ در نتیجه هر مجموعه مرتب کامل یک شبکه است.

۱۰. اگر p و q اعداد اول متمایز باشند و m و n اعداد صحیح مثبت باشند، چه تعداد یال در نمودار هاس $(D_k, |)$ که $k = p^m q^n$ است، وجود خواهد داشت؟

حل:

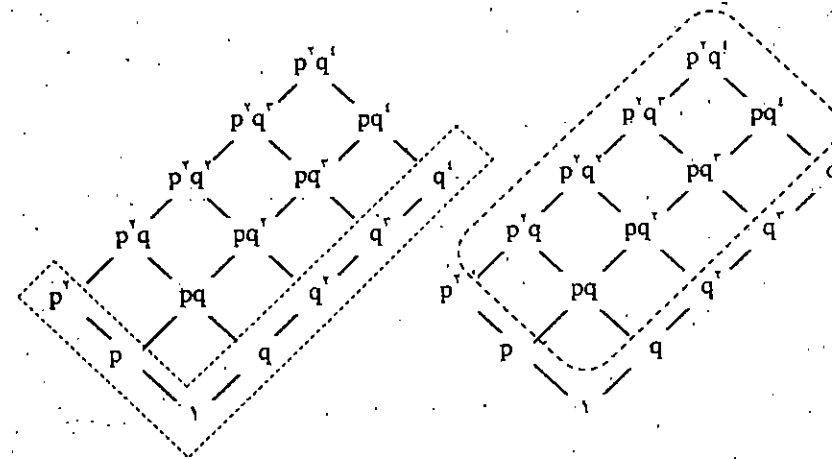
برای حل از یک مثال کمک می‌گیریم. به عنوان مثال نمودار هاس $p^4 q^4$ را در نظر بگیرید:



شکل ۳-۴۰ (الف)

همان‌طور که در شکل ۳-۴۰ (ب) مشخص است، از عضو ۱ به p و از عضو p به q^r جمعاً دو یال وجود دارد. به همین ترتیب از ۱ تا q^r ۴ یال وجود دارد. بنابراین برای q^m $n+m$ یال از ۱ وجود خواهد داشت.

از طرف دیگر با توجه به شکل ۳-۴۰ (ج) در مورد رئوس میانی، از آنجا که به تعداد nm رأس میانی وجود دارد که هر کدام دارای دو یال هستند، در نتیجه $2nm$ یال وجود خواهد داشت. بنابراین تعداد کل یال‌های برابر است با: $n+m+2nm$



شکل ۳-۴۰ (ب)

شکل ۳-۴۰ (ج)

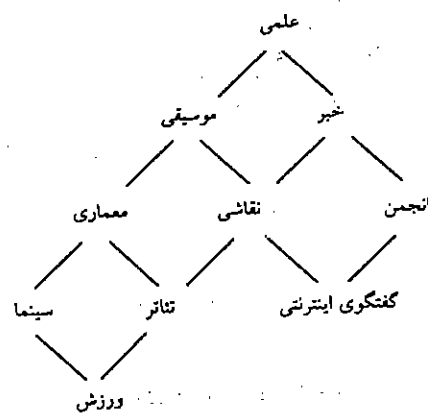
ترتیب جزئی، شبکه، جبر بول ۱۷۳

الف) نمودار هاس رابطه ترتیب جزئی $(X, \leq)$ را رسم نمایید.

ب) موضوعاتی که بیشتر از همه مورد علاقه کاربران است کدام است؟ موضوعاتی که در کمترین توجه قرار می‌گیرد کدام است؟

ج) یک ترتیب توپولوژیک برای این علائق ترسیم نمایید.

ترجیح کاربر روی موضوع	نسبت به موضوع
علمی	خبر
علمی	موسیقی
موسیقی	معماری
موسیقی	نقاشی
خبر	نقاشی
خبر	انجمن‌ها
معماری	سینما
معماری	تئاتر
نقاشی	تئاتر
نقاشی	گفتگوی اینترنتی
انجمن‌ها	گفتگوی اینترنتی
سینما	ورزش
تئاتر	ورزش



شکل ۳-۴۱

حل:
(الف)

۱۱. فرض کنید یک شرکت کامپیوتری در نظر دارد که اطلاعاتی از علائق کاربران سایت خود جمع‌آوری نماید تا با استفاده از این اطلاعات به شخصی‌سازی اطلاعات صفحه وب هر کاربر پردازد.

اگر X مجموعه موضوعاتی باشد که کاربران این سایت به جستجو در مورد آنها می‌پردازند، رابطه بین $x, y \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

{مشتري صفحات با موضوع y را به صفحات با موضوع x ترجیح می‌دهد} $x \leq y$

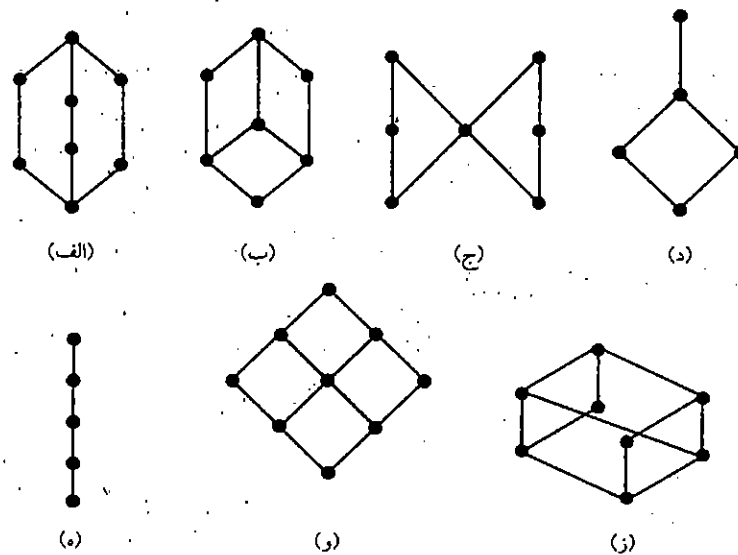
فرض کنید شرکت اطلاعات جدول زیر را از علائق برخی از کاربران سایت خود به دست آورده است.

ب) گفتگوی اینترنتی و ورزش، دو عضو مینمال این نمودار هستند، بنابراین کمترین علائق مربوط به این دو موضوع است. عضو ماکسیمال این نمودار موضوع علمی است و این به این معنی است که بیشترین علاقه کاربران این سایت به موضوع علمی است.

ج) ترتیب:

علمی، خبر، موسیقی، انجمن، نقاشی، معماری، گفتگوی اینترنتی، تئاتر، سینما، ورزش
یک ترتیب توپولوژیکی است.

۱۲. کدام یک از ترتیب‌های جزئی زیر، شبکه هستند؟

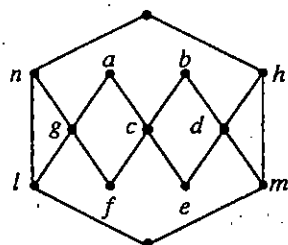


شکل ۲۲-۳

حل:

به جزء شکل (ج)، تمام ترتیب‌های جزئی فوق شبکه هستند. در شکل (ج)، دو عضو مینمال شکل دارای GLB نیستند. یا دو عضو ماکسیمال شکل دارای LUB نیست.

۱۳. آیا نمودار هاس شکل ۳-۲۳ شبکه است؟



شکل ۲۳-۳

حل:

خیر. زیرا به عنوان مثال $LUB(\{a, b\})$ یا $GLB(\{f, e\})$ وجود ندارد.

۱۴. ثابت نمایید شبکه $(D_n, |)$ (مقسوم‌های عدد n) متمم‌پذیر خواهد بود، اگر $n = p_1 p_2 \dots p_k$ به طوری که هر p_i ($1 \leq i \leq k$) عدد اول متمم‌پذیر باشند.

حل:

اگر p_i و p_j اعداد اول متمم‌پذیر نباشند، آن‌گاه a و b را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$a = p_i, b = p_i \times p_j$$

آن‌گاه:

$$a \vee b = b, a \wedge b = a$$

حال فرض کنید c متمم عضو a باشد، آن‌گاه:

$$a \vee c = I, a \wedge c = O$$

حال، با توجه به اینکه برای هر عضو در شبکه:

$$\forall x \in L: x \vee O = x, x \wedge I = x \\ x \wedge O = O, x \vee I = I$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} a \wedge c = O &\Rightarrow b \vee (a \wedge c) = b \vee O \\ &\Rightarrow (b \vee a) \wedge (b \vee c) = b \\ &\Rightarrow b \wedge (b \vee c) = b \\ &\Rightarrow b \vee c = I \quad (1) \end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned} a \vee c = I &\Rightarrow b \wedge (a \vee c) = b \wedge I \\ &\Rightarrow (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = b \\ &\Rightarrow a \vee (b \wedge c) = b \\ &\Rightarrow c \vee (a \vee (b \wedge c)) = c \vee b \\ &\Rightarrow (c \vee a) \vee (b \wedge c) = c \vee b \\ &\Rightarrow I \vee (b \wedge c) = c \vee b \\ &\Rightarrow I = c \vee b \quad (2) \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه ۱ و ۲ نتیجه گرفته می‌شود که c متمم b هم هست. بنابراین متمم c منحصر بفرد نیست. یعنی این شبکه متمم‌پذیر نیست.

۱۵. آیا شبکه (D_{20}, I) و (D_{30}, I) متمم‌پذیر هستند؟

حل:

داریم $30 = 2 \times 3 \times 5$ یعنی حاصلضرب سه عامل اول متمایز، بنابراین این شبکه (D_{30}, I) متمم‌پذیر است.

در مورد D_{20} داریم $20 = 2 \times 2 \times 5$ درست است ۲ و ۵ اول هستند اما ۲ متمایز نیست و دوبار تکرار شده، بنابراین شبکه متمم‌پذیر نیست.

►

۱۶. ثابت کنید که شبکه (D_n, I) که در آن $n = p_1 p_2 \dots p_k$ در صورتی جبر بول است که هر کدام از p_i (که $k \geq 1$) اعداد اول متمایز باشند.

حل:

به ازای هر n که $k \geq 1$ روشن است که $p_1 p_2 \dots p_k = d$ یک مقسوم علیه n است. هم‌چنین تمامی مقسوم‌علیه‌های n به جز ۱ به صورت فوق هستند. تابع $f: D_n \rightarrow B_k$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(d) = \begin{cases} \text{شماره مرتبه } k & d=1 \\ b_1 b_2 \dots b_k & d>1 \end{cases}$$

که در آن:

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } p_i | d \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

ترتیب جزئی، شبکه، جبر بول ۱۷۷

بنابراین تابع f یکریختی است. بنابراین D_n یک جبر بول است.

۱۷. رابطه بخش‌پذیری روی مجموعه اعداد اول $S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ را در نظر بگیرید. عضوهای ماکسیمال و مینیمال را به دست آورید.

حل:

از آنجا که هر عدد اول تنها بر خودش و یک بخش‌پذیر است و اعداد اول نیست، از این‌رو هر دو عدد در مجموعه بی‌پایان S قابل مقایسه نیستند. از این‌رو هر عضو S هم ماکسیمال و هم مینیمال است. نمودار هاس حاصل به شکل زیر خواهد بود.



►

۱۸. فرض کنید مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ با k مرتب شده است. در صورت وجود، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو، مجموعه کران بالا و کران پایین و LUB و GLB را مشخص کنید.

حل:

مجموعه $A = (0, 1)$ مرتب کامل است، اما عضو بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ندارد. مجموعه $\{x/x \geq 1\}$ کران بالا و $\{x/x \leq 0\}$ کران پایین این مجموعه هستند. LUB این مجموعه ۱ و GLB برابر ۰ است.

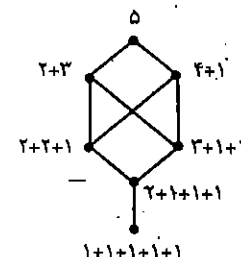
►

۱۹. یک افزاز یک عدد صحیح مثبت m مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت است که مجموعشان m باشد. مثلاً عدد ۵ دارای ۷ افزاز است:

$$1+1+1+1+1, 2+1+1+1, 3+1+1, 4+1, 2+2+1, 3+2, 5$$

گوییم افزاز p_1 یا افزاز p_2 رابطه دارد، هرگاه اعداد موجود در p_2 از جمع اعداد موجود در p_1 حاصل شود. نمودار هاس رابطه بین افزازهای عدد ۵ را رسم نمایید. آیا این نمودار شبکه است؟

حل:



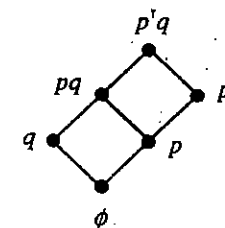
شکل ۴۴-۳

این نمودار شبکه نیست، زیرا به عنوان مثال دو عضو $2+3$ و $4+1$ دارای بزرگ‌ترین کران پایین منحصریفر نیستند.

۲۰. نمودار هاس مربوط به رابطه مقسوم‌علیه‌های $p^i q$ (p و q اعداد اول هستند) را رسم نمایید. این نمودار شبکه هست یا خیر؟ یک ترتیب توپولوژیکی برای این نمودار به دست آورید.

حل:

مقسوم‌علیه‌ها عبارتند از: $\{\phi, p, q, pq, p^2, p^2 q\}$. نمودار هاس برابر است با:

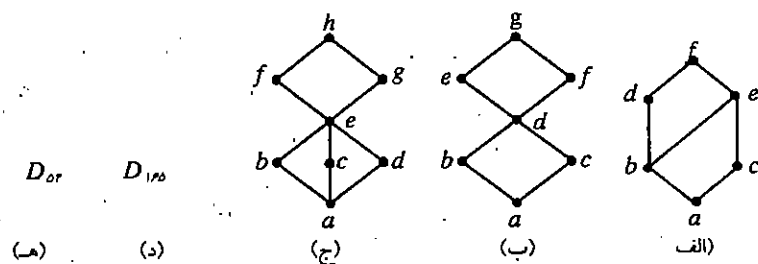


شکل ۴۵-۳

این نمودار شبکه است.

به عنوان مثال ترتیب $\phi < p < q < pq < p^2 < p^2 q$ یک ترتیب توپولوژیکی است.

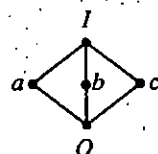
۲۱. کدام یک از مجموعه‌های با ترتیب جزئی زیر معرف یک جبر بول است؟



شکل ۴۶-۳

حل:

- می‌دانیم یک جبر بول یکریخت با یک B_n خواهد بود. بنابراین باید تعداد اعضاء 2^n باشد. با این استدلال (الف) و (ب) جبر بول نیستند.
- نمودار (ج)، دارای $2^3 = 8$ عضو است. اما اگر دقت نماییم این شبکه دارای زیر شبکه زیر است.



شکل ۴۷-۳

که این زیر شبکه یکریخت با شکل (ب) قضیه ۳-۱ است. بنابراین این شبکه توزیع پذیر نیست و لذا جبر بول نمی‌باشد.

- می‌دانیم $165 = 3 \times 5 \times 11$ ، یعنی حاصلضرب اعداد اول منحصریفر است. بنابراین D_{165} شبکه جبر بول است.

- $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$ در این حاصلضرب عامل‌های اول منحصریفر نیست و عدد ۳ بیش از یکبار تکرار شده است. بنابراین این شبکه جبر بول نیست.

روش دوم:

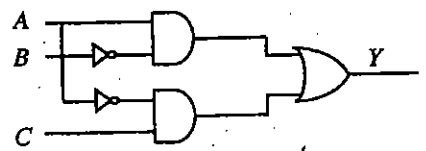
$$\begin{aligned} ((x+y)' + (x'+y)')(z+y) &= (x'y' + x''y'')(z+y) \\ &= (x'y' + xy)(z+y) \\ &= x'y'z + x'y'y + xyz + xyy \\ &= x'y'z + 0 + xyz + xy \\ &= x'y'z + xyz + xy(z+z') \\ &= x'y'z + xyz + xyz' \end{aligned}$$

در نتیجه: $x'y'z + xy z' + xyz = \sum m(1, 6, 7)$

۲۴. برای نمودار منطقی شکل زیر:

الف. خروجی Y را به صورت یک عبارت بولی برحسب ورودی‌های A ، B و C بیان کنید.

ب. جدول درستی را به دست آورید.



شکل ۴۸-۳

حل:

الف. ورودی‌های مدار AND اول، A و B' و مدار AND دوم B' و C هستند. از این رو $Y = AB' + B'C$

ب. جدول درستی به صورت زیر است:

A	B	C	Y
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۰

۲۲. مجموعه $D_v = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$ یعنی مقسوم‌علیه‌های 70 را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید چگونه D_v به جبر بول تبدیل می‌شود.
ب) $10 + 14$ ، $10 * 14$ و $10'$ را به دست آورید.
حل:

الف) از آنجا که $70 = 2 \times 5 \times 7$ است، در نتیجه D_v جبر بول است. حال $+$ ، $*$ و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} a+b &= [a, b] \\ a*b &= (a, b) \end{aligned}$$

$[a, b]$ = کوچک‌ترین مضرب مشترک a و b

(a, b) = بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b

که 1 کوچک‌ترین و 70 بزرگ‌ترین عنصر باشد.
ب)

$$10 + 14 = [10, 14] = 70$$

$$10 * 14 = (10, 14) = 2$$

$$10' = 7$$

۲۳. عبارت $((x+y)' + (x'+y)')(z+y)$ را به صورت $d.n.f$ بنویسید.
حل:

روش اول (با استفاده از جدول درستی):

x	y	z	$((x+y)' + (x'+y)')(z+y)$
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱

۲۵. عبارت $wxyz + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z$ را ساده نمایید.

مرحله اول، آماده نمودن جداول مورد نیاز:

جدول مربوط به مشخصات رشته یبتهی هر کدام از عبارات، عبارت است از:

تعداد اما	رشته یبتهی	ترکیب عطفی بنیادی
۳	۱۱۱۰	۱. $wxyz$
۳	۱۰۱۱	۲. $w\bar{x}yz$
۳	۰۱۱۱	۳. $\bar{w}xyz$
۲	۱۰۱۰	۴. $w\bar{x}\bar{y}z$
۲	۰۱۰۱	۵. $\bar{w}\bar{x}yz$
۲	۰۰۱۱	۶. $\bar{w}x\bar{y}z$
۱	۰۰۰۱	۷. $\bar{w}xyz$

مرحله دوم، ترکیب عبارات قابل ترکیب:

حالت‌های قابل ترکیب و عبارات ترکیب شده در جدول زیر نشان داده شده است.

مرحله اول ترکیب		مرحله دوم ترکیب		
عبارت	رشته یبتهی	عبارت	رشته یبتهی	عبارت
۱. $wxyz$	۱۱۱۰			
۲. $w\bar{x}yz$	۱۰۱۱			
۳. $\bar{w}xyz$	۰۱۱۱			
۴. $w\bar{x}\bar{y}z$	۱۰۱۰	(۳,۵) $\bar{w}xz$	۰۱-۱	
۵. $\bar{w}\bar{x}yz$	۰۱۰۱	(۳,۶) $\bar{w}yz$	۰-۱۱	
۶. $\bar{w}x\bar{y}z$	۰۰۱۱	(۵,۷) $\bar{w}yz$	۰-۰۱	
۷. $\bar{w}xyz$	۰۰۰۱	(۶,۷) $\bar{w}xz$	۰۰-۱	

مرحله سوم، انتخاب عبارات:

جدول زیر، عباراتی که در ترکیب شرکت نکرده‌اند و نیز پوشش هر کدام از عبارات موجود در صورت سوال نشان داده شده است.

	$wxyz$	$w\bar{x}yz$	$\bar{w}xyz$	$w\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}x\bar{y}z$	$\bar{w}xyz$
wyz	✓			✓			
$w\bar{x}y$		✓		✓			
$\bar{x}yz$		✓				✓	
$\bar{w}z$			✓		✓	✓	✓

از آنجا که $wxyz$ تنها با wyz و نیز $\bar{w}xyz$ و $w\bar{x}\bar{y}z$ تنها با $\bar{w}z$ پوشش داده می‌شوند، وجود این دو عبارت، ضروری است. با انتخاب $w\bar{x}y$ و یا $\bar{x}yz$ کل عبارت پوشش داده می‌شود.

بنابراین عبارت ساده شده به صورت $wyz + \bar{w}z + w\bar{x}y$ و یا $wyz + \bar{w}z + \bar{x}yz$ خواهد بود.

تمرین‌های فصل

۱. برای هر کدام از روابط زیر خاصیت ترتیب جزئی و ترتیب کامل را بررسی نمایید:

الف) رابطه $R = \{(x, y) / y = x \vee y = x + 1\}$ در مجموعه اعداد طبیعی.

ب) رابطه $R = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2) / x_1 = y_1\}$ در مجموعه اعداد طبیعی.

ج) رابطه $R = \{(a, b) / a \text{ بر } b \text{ عمود است}\}$

د) رابطه $R = \{(x, y) / x - y = 1\}$ در مجموعه اعداد طبیعی.

۲. اگر مجموعه‌ای که رشته‌هایی از حروف انگلیسی باشد، در مورد مجموعه‌های زیر خاصیت ترتیب جزئی و ترتیب کامل را بررسی نمایید.

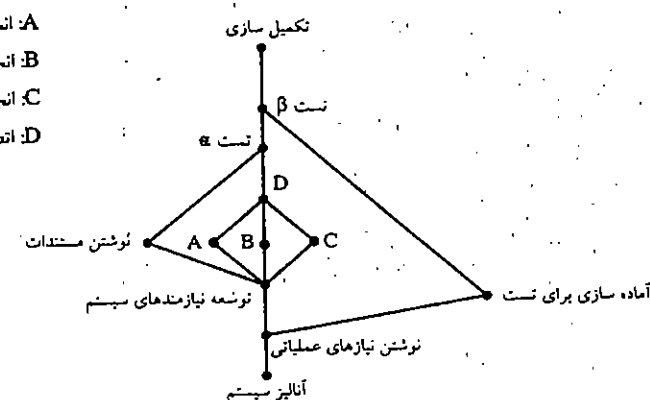
الف) $R = \{(x, y) / x \text{ و } y \text{ حرف مشترکی نداشته باشند}\}$

ب) $R = \{(x, y) / x \text{ و } y \text{ طول یکسان نداشته باشند}\}$

ج) $R = \{(x, y) / x \text{ طول بیشتر از } y \text{ باشد}\}$

۳. نمودار هاس زیر ترتیب انجام مراحل یک پروژه نرم‌افزاری را نشان می‌دهد. یک ترتیب توپولوژیکی برای اجرای مراحل پیدا کنید.

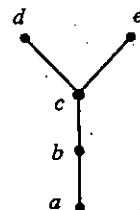
- A: انجام مرحله اول
- B: انجام مرحله دوم
- C: انجام مرحله سوم
- D: اتصال مراحل



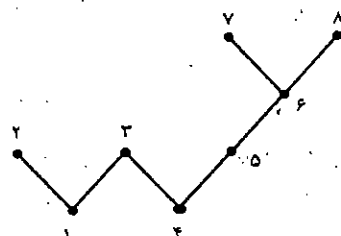
ترتیب جزئی، شبکه، جبر بول ۱۸۵

۴. فرض کنید مجموعه $A = \{2, 3, 6, 8, 9, 18\}$ و رابطه بخش‌پذیری بر روی اعضای آن وجود داشته باشد. اعضای غیرقابل مقایسه را مشخص نمایید.

۵. رابطه تعریف شده به وسیله نمودار هاس زیر را به صورت ماتریس رابطه آن نمایش دهید.



۶. کدام یک از موارد زیر می‌تواند ترکیب توپولوژیکی برای نمودار هاس داده شده باشد (از چپ به راست)؟



الف) $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8$

ب) $4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 1 < 2 < 3$

ج) $1 < 4 < 3 < 2 < 5 < 6 < 7 < 8$

۷. در شبکه L به ازای هر عضو $a, b \in L$ کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

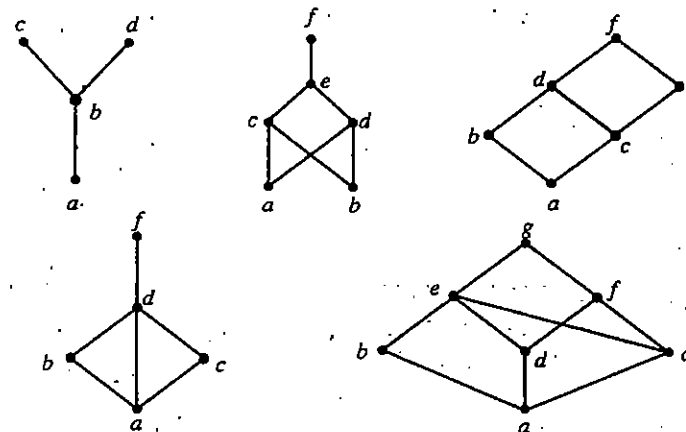
الف) $a \vee (a \wedge b) = b$

ب) $a \wedge (a \vee b) = a$

ج) $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge b) \vee c$

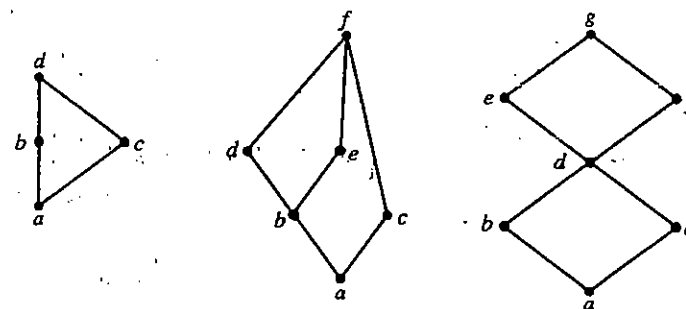
۸. آیا می‌توان گفت هر شبکه، رابطه ترتیب کامل است؟

۹. کدام یک از نمودارهای هاس زیر یک شبکه هستند؟

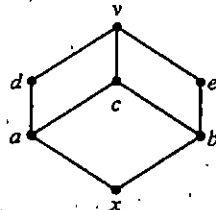


۱۰. نشان دهید هر شبکه با ۳ عنصر یا کمتر یک ترتیب کامل است؟

۱۱. کدام یک از شبکه‌های زیر توزیع پذیر هستند؟



۱۲. شبکه L در شکل زیر را در نظر بگیرید.



تعیین کنید: آیا هر یک از مجموعه‌های زیر، یک زیر شبکه از L هستند یا خیر؟

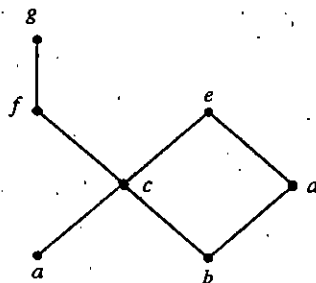
الف. $L_1 = \{x, a, b, y\}$

ب. $L_2 = \{x, a, e, y\}$

ج. $L_3 = \{a, c, d, y\}$

د. $L_4 = \{x, c, d, y\}$

۱۳. عضوهای ماکسیمال و مینیمال مجموعه مرتب جزئی شکل زیر را به دست آورید.



۱۴. شبکه D_{12} مقسوم علیه‌های ۱۲ را با رابطه بخش پذیری در نظر بگیرید.

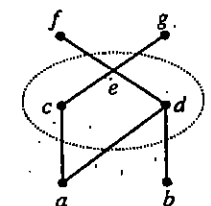
الف. کران پایین و کران بالای D_{12} را به دست آورید.

ب. متمم (های) ۴ و ۶ را به دست آورید.

ج. آیا این شبکه متمم پذیر است؟

۱۵. تقاضای استخدام شما در شرکت ایران خودرو پذیرفته شده است. شغل شما طراحی شبکه منطقی برای یک خودرو دنده اتوماتیک است. شبکه باید چنان طراحی شود که راننده تنها زمانی بتواند ماشین را روشن کند که دنده اتوماتیک در وضعیت خلاص یا پارک و کمر بند ایمنی بسته باشد. در صورتیکه خلاص x_1 و پارک x_2 و کمر بند ایمنی x_3 باشد، عبارت بولی آن را بنویسید.

۱۶. فرض کنید رابطه ترتیب جزئی عناصر $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ مطابق شکل زیر باشد و $X=\{c,d,e\}$ باشد. کران‌های بالا و پایین و همچنین کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین X را به دست آورید.



۱۷. مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$ با ترتیب معمولی و زیرمجموعه $D=\{x: x \in \mathbb{Q}, 8 < x^2 < 15\}$ را در نظر بگیرید:

- الف. آیا D کران بالا و کران پایین دارد؟
ب. آیا بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالا در D وجود دارد؟

۱۸. نشان دهید عبارت‌های زیر در جبر بول هم‌ارز هستند.

الف. $a+b=b'$

ب. $ab=a$

ج. $a'+b=1$

د. $ab'=0$

۱۹. با استفاده از نتایج مسأله قبل، نشان دهید در جبر بول $a \leq b$ اگر و فقط اگر $b' \leq a'$

۲۰. برای عبارت $E=((ab)'c)'((a'+c)(b'+c'))'$

الف. $d.n.f$ را به دست آورید.

ب. $c.n.f$ را به دست آورید.

ج. فرم استاندارد جمع حاصلضرب‌ها را به دست آورید.

د. فرم استاندارد ضرب حاصلجمع‌ها را به دست آورید.

۲۱. $d.n.f$ مربوط به عبارت بولی $f(x,y,z)=y'$ دارای چند ترکیب عطفی بنیادی است؟

۲۲. مدار منطقی متناظر با عبارت بولی $Y=(a+bc)' + b$ را رسم نمایید و جدول درستی آن را به دست آورید.

۲۳. عبارت $wxyz + \overline{w}xy\overline{z} + \overline{w}xy\overline{z} + \overline{w}xy\overline{z} + \overline{w}xy\overline{z}$ را ساده نمایید.

فصل چهارم

گراف

اهداف:

در پایان این فصل انتظار می‌رود:

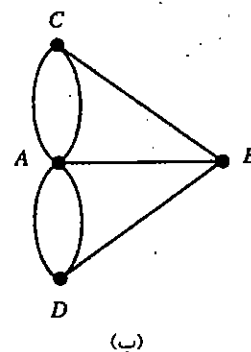
- دانشجو با مفهوم گراف، گراف جهت‌دار و زیرگراف آشنا شود.
- با نمایش گراف آشنا شود و بتواند گراف‌های یکریخت را تشخیص دهد.
- مفهوم مسیر و دور و کاربرد آن را بشناسد.
- گذر و مدار اولیه را در گراف تشخیص دهد.
- مسیر و دور همیتونی را در گراف تشخیص دهد.
- با گراف‌های وزن‌دار و مسائل مربوط به آن آشنا شود.
- بتواند از الگوریتم دی‌جکسترا جهت یافتن طول کوتاه‌ترین مسیر همیتونی استفاده نماید.
- بتواند از قاعده نزدیک‌ترین همسایه جهت یافتن دور همیتونی نیمه بهینه استفاده نماید.
- با گراف مسطح و خواص آن آشنا شود و بتواند گراف مسطح را تشخیص دهد.
- دانشجو بتواند با استفاده از الگوریتم‌های معرفی شده موضوعات مطرح در زندگی روزمره را که می‌توانند با گراف حل شوند، پاسخ دهد.

۱-۴- تاریخچه و تعاریف مقدماتی گراف

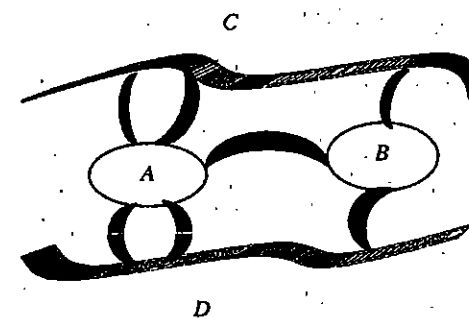
همان‌طور که در فصل دو دیده شد می‌توان رابطه دوتایی روی مجموعه A را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $A \times A$ تعریف نمود، و آن را با گراف یا ماتریس نمایش داد. در این فصل ابتدا تاریخچه چگونگی تشکیل نظریه گراف ارائه و سپس مفهوم گراف به صورت عمومی‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در قرن هجده میلادی، شهر کونیگسبرگ^۱ از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره تشکیل شده بود که ۷ پل این چهار منطقه را (مطابق شکل ۴-۱ الف) به هم وصل می‌کرد. معمایی سال‌ها شهروندان را به‌خود سرگرم کرده بود: که آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق، در شهر گشتی زد به‌طوری‌که از هر پل فقط یکبار عبور نمود و به محل اولیه بازگشت؟

در سال ۱۷۳۶ میلادی با حل این معما توسط اویلر^۲، نظریه گراف‌ها پایه‌گذاری شد، بدین صورت که به هر ۴ منطقه، نقطه‌ای از صفحه اختصاص داده و به ازای هر پل واصل بین دو منطقه، پاره خط بین دو نقطه متناظر با آنها رسم نمود. بدین ترتیب مطابق شکل ۴-۱ (ب) به مدل ریاضی دست‌یافت و به سادگی پاسخ معما که منفی بود، مشخص گردید.



(ب)



(الف)

شکل ۴-۱.

گراف ۱۹۳

از گراف‌ها برای حل مسائل زیادی در ریاضیات و علوم کامپیوتر استفاده می‌شود. در علوم کامپیوتر، گراف‌ها در دروس مدار منطقی (برای نمایش مدارها)، نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها (جهت رسم ماشین‌ها)، سیستم عامل (ارتباط بین حالت‌های یک فرآیند) و کامپایلر (رسم نمودارهای تغییر حالت) کاربرد زیادی دارند.

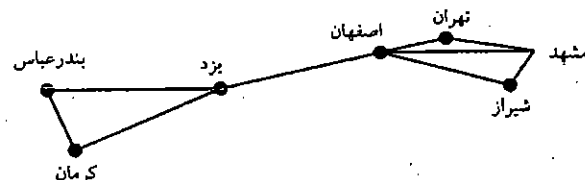
جهت نمایش ارتباط و لینک بین وب سایت‌ها نیز می‌توان از گراف استفاده نمود. برای این منظور هر وب سایت به صورت رأس و ارتباط و لینک بین وب سایت‌ها به صورت یال گراف نمایش داده می‌شود.

از گراف‌ها در مسائلی مانند طراحی مدارهای الکتریکی، اصلاح هندسی خیابان‌ها، حل مشکل ترافیک نیز استفاده می‌شود.

هر گراف از دو مجموعه $V \neq \emptyset$ به نام مجموعه رئوس و مجموعه E به نام مجموعه یال‌ها تشکیل شده است. به‌طور معمول هر رأس گراف با یک نقطه یا دایره کوچک در صفحه نشان داده می‌شود؛ یال‌ها که نشان‌دهنده نحوه ارتباط رئوس با یکدیگر می‌باشند، با یک پاره خط (جهت‌دار یا فاقد جهت) مشخص می‌شوند. مجموعه یال‌های یک گراف را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$E = \{uv \mid u, v \in V, uRv\}$$

مثال ۴-۱: یک شرکت مخابراتی برای یکی از سرویس‌های شبکه‌ای خود، تعدادی دیتاستر را در شهرهای تهران، اصفهان، شیراز، مشهد، کرمان، یزد و بندرعباس راه‌اندازی نموده است. جهت مدل نمودن این سیستم‌ها و ارتباط آن‌ها می‌توان از گراف استفاده نمود؛ به‌طوری‌که محل هر دیتاستر به صورت یک رأس و ارتباط بین آنها به صورت یال نشان داده شود.



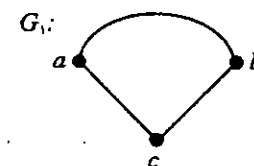
شکل ۴-۲.

۱. Kvnysbrg

۲. Euler

📖 **گراف:** فرض کنید V یک مجموعهٔ غیرتهی متناهی و E زیر مجموعه‌ای از مجموعه تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V باشد، در این صورت $G=(V,E)$ را گراف می‌نامیم. همان‌طور که بیان شد، مجموعهٔ V را مجموعهٔ رئوس و E را مجموعهٔ یال‌ها گوئیم. برای نمایش یالی که از دو رأس a و b عبور می‌کند، از نمایش $\{a,b\}$ یا ab استفاده می‌شود. در این کتاب نمایش ab مورد استفاده قرار می‌گیرد.

📖 **مثال ۴-۲:** مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف G_1 در زیر نشان داده شده است.



شکل ۴-۳.

$$V=\{a,b,c\}$$

$$E=\{ab,bc,ac\}$$

📖 **گراف تهی:** گراف بدون یال را گراف تهی می‌نامند. گراف تهی با N_p نشان داده می‌شود. گراف‌های تهی از مرتبهٔ ۱، ۲، ۳ و ۴ در شکل ۴-۴ نشان داده شده است.



شکل ۴-۴.

📖 **طوقه:** یالی که تنها یک رأس دارد را طوقه یا حلقه می‌نامند.

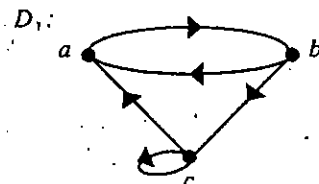
📖 **گراف جهت‌دار:** فرض کنید V یک مجموعهٔ متناهی غیرتهی و $E \subseteq V \times V$ باشد، در این صورت $D=(V,E)$ را گراف جهت‌دار می‌نامیم. در گراف جهت‌دار برای رئوس u و v ، دو یال (u,v) و (v,u) (در صورت وجود) متمایز از یکدیگر می‌باشند.

📖 **مثال ۴-۳:** مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف D_1 در زیر داده شده است. گراف را رسم نمایید.

$$V=\{a,b,c\}$$

$$E=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,a),(c,c)\}$$

حل:



شکل ۴-۵.

📖 **یال‌های موازی:** هرگاه بین دو رأس یک گراف، بیش از یک یال موجود باشد، آن یال‌ها را یال‌های موازی گویند. در گراف جهت‌دار، یال‌های بین دو رأس را موازی نامند هرگاه یال‌ها، هم‌جهت باشند.

📖 **مثال ۴-۴:** در گراف‌های زیر، بین دو رأس a و b یال‌های موازی وجود دارد.



شکل ۴-۶.

📖 **گراف ساده:** گراف فاقد یال موازی و طوقه را گراف ساده می‌نامند. گراف ساده جهت‌دار، به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

📖 **گراف چندگانه:** گرافی که شامل یال موازی باشد، گراف چندگانه گویند. هم‌چنین گراف جهت‌دار شامل یال موازی، گراف چندگانه جهت‌دار نامیده می‌شود.

📖 **گراف مختلط:** گرافی که شامل یال‌های جهت‌دار و غیرجهت‌دار باشد، گراف مختلط می‌نامند.

📖 **رئوس مجاور:** در گراف $G=(V,E)$ ، دو رأس u و v را مجاورگویند، هرگاه u و v دو سر یک یال در G باشند.

📖 **مرتبه و اندازه گراف:** تعداد رئوس یک گراف، مرتبه گراف و تعداد یال‌های آن، اندازه گراف نامیده می‌شود. مرتبه گراف با نماد n ($|V|=n$) و اندازه گراف با m ($|E|=m$) نشان داده می‌شود.

☑ **گزاره ۴-۱:**

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2}$$

اثبات:

طبق تعریف گراف، مجموعه یال‌های گراف، زیرمجموعه تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی از V می‌باشند، بنابراین حداکثر تعداد یال‌ها برابر با $\binom{n}{2}$ و حداقل تعداد یال‌ها برای گراف تهی با $m=0$ است؛ لذا:

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

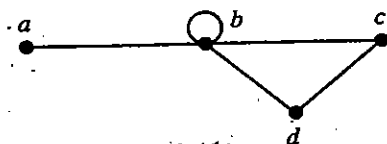
📖 **درجه رأس u_i در گراف:** تعداد یال‌های متصل به رأس u_i را، درجه آن رأس گویند و با $\deg(u_i)$ نشان می‌دهند.

🔍 **توجه:**

درجه رأسی که دارای یال طوقه باشد، استثناء است و هر یال طوقه ۲ واحد در درجه رأس، مخاسبه می‌شود.

🔍 **مثال ۴-۵:** در گراف شکل ۴-۷، درجه رئوس عبارت است از:

$$\begin{aligned} \deg(a) &= 1 \\ \deg(b) &= 5 \\ \deg(c) &= \deg(d) = 2 \end{aligned}$$



شکل ۴-۷

فرض کنید $u_i \in V$ یک رأس دلخواه گراف D باشد، آن‌گاه:

📖 **درجه ورودی u_i :** تعداد یال‌هایی که به رأس u_i وارد می‌شوند، درجه ورودی u_i نامیده و با نماد $id(u_i)$ نشان داده می‌شود.

📖 **درجه خروجی u_i :** تعداد یال‌هایی که از رأس u_i خارج می‌شوند، درجه خروجی u_i نامیده و با نماد $od(u_i)$ نشان داده می‌شود.

📖 **مجموع درجه u_i :** مجموع درجه‌های ورودی و خروجی u_i را مجموع درجه آن می‌نامند؛ به عبارت دیگر:

$$\deg(u_i) = id(u_i) + od(u_i)$$

و لذا مجموع درجه رئوس گراف D برابر است با:

$$\sum_{i=1}^n \deg(u_i) = \sum_{i=1}^n id(u_i) + \sum_{i=1}^n od(u_i)$$

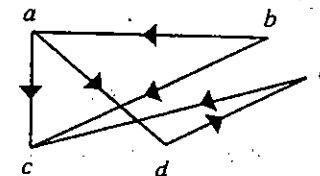
📖 **رأس متفرد:** رأسی که درجه آن صفر باشد، رأس متفرد یا تنها نامیده می‌نامند.

📖 **رأس معلق:** رأسی که درجه آن یک باشد، رأس معلق یا آویزان می‌نامند. به همین ترتیب یالی که تنها یک رأس آن، رأس معلق باشد، یال معلق می‌نامند.

📖 **رأس فرد:** رأسی که درجه آن عددی فرد باشد، رأس فرد می‌نامند.

📖 **رأس زوج:** رأسی که درجه آن عددی زوج باشد، رأس زوج می‌نامند.

مثال ۴-۶: در گراف جهت‌دار شکل ۴-۸، درجه هر رأس، مرتبه و اندازه گراف را بیابید.



شکل ۴-۸

حل:

$od(a)=2$	$id(a)=1$	$deg(a)=3$
$od(b)=2$	$id(b)=0$	$deg(b)=2$
$od(c)=0$	$id(c)=3$	$deg(c)=3$
$od(d)=1$	$id(d)=1$	$deg(d)=2$
$od(e)=1$	$id(e)=1$	$deg(e)=2$

$$\sum_{i=1}^{n=5} od(u_i) = 6 \quad \sum_{i=1}^{n=5} id(u_i) = 6 \quad \sum_{i=1}^n deg(u_i) = 12$$

بنابراین گراف از مرتبه ۵ ($n=5$) و اندازه ۱۲ ($m=12$) می‌باشد.

قضیه ۴-۱: در گراف $G=(V,E)$ داریم:

$$\sum_{i=1}^n deg(u_i) = 2 |E|$$

اثبات:

از آنجایی که هر یال به دو رأس متصل است، پس در مجموع درجه‌های رئوس، هر یال ۲ بار محاسبه می‌گردد، بنابراین مجموع درجه‌های رئوس گراف، ۲ برابر تعداد یال‌های آن می‌باشد.

نتیجه:

در هر گراف، تعداد رئوس با درجه فرد، عددی زوج است.

قضیه ۴-۲: در گراف $D=(V,E)$ داریم:

$$\sum_{i=1}^n od(u_i) = \sum_{i=1}^n id(u_i) = |E| = m$$

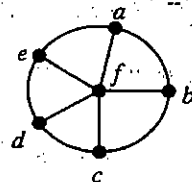
اثبات:

در گراف جهت‌دار، هر یال از یک رأس خارج و به رأس دیگر وارد می‌گردد، بنابراین مجموع درجه‌های خروجی رئوس و مجموع درجه‌های ورودی رئوس یکسان و هر دو این مجموع‌ها، همان تعداد یال‌های گراف می‌باشند.

رأس ماکزیمم: بزرگ‌ترین درجه در بین درجه‌های رئوس گراف $G=(V,E)$ را ماکزیمم درجه نامند و با $\Delta(G)$ نمایش می‌دهند؛ به عبارت دیگر: $\Delta(G) = \max \{deg(u_i) \mid u_i \in V\}$ رأس متناظر با $\Delta(G)$ را رأس ماکزیمم می‌نامند.

رأس مینیمم: کوچک‌ترین درجه در بین درجه‌های رئوس گراف $G=(V,E)$ را مینیمم درجه نامند و با $\delta(G)$ نمایش می‌دهند؛ به عبارت دیگر: $\delta(G) = \min \{deg(u_i) \mid u_i \in V\}$ رأس متناظر با $\delta(G)$ را رأس مینیمم می‌نامند.

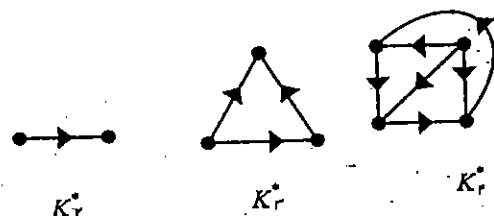
مثال ۴-۷: گراف شکل ۴-۹ را در نظر بگیرید. رئوس فرد، زوج گراف و نیز رأس ماکزیمم و مینیمم آن را مشخص نمایید.



شکل ۴-۹

حل:

$$deg(a)=deg(b)=deg(c)=deg(d)=deg(e)=3, \quad deg(f)=5$$

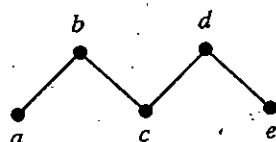


شکل ۱۱-۴

گراف دو بخشی: گرافی که بتوان مجموعه رئوس آن را به دو زیر مجموعه V_1 و V_2 چنان افراز نمود، به طوری که هر یال آن دارای یک رأس در V_1 و یک رأس در V_2 باشد، گراف دوبخشی نامند. به عبارت دیگر:

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset \\ uv \in E \Rightarrow u \in V_1, v \in V_2$$

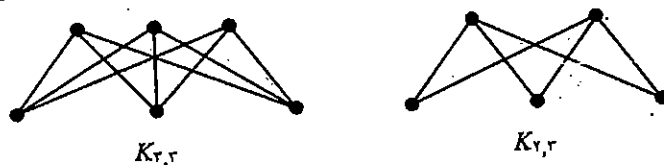
مثال ۹-۴: گراف زیر، یک گراف دوبخشی است.



شکل ۱۲-۴

$$V_1 = \{a, c, e\}, \quad V_2 = \{b, d\}$$

گراف دوبخشی کامل: گراف دو بخشی G با مجموعه افراهای V_1 و V_2 را کامل گویند، هرگاه هر رأس بخش V_1 با هر رأس بخش V_2 مجاور باشد. اگر V_1 شامل m رأس و V_2 شامل n رأس باشد، گراف دو بخشی کامل فوق با $K_{m,n}$ نشان داده می‌شود. مثال ۱۰-۴: شکل ۱۳-۴ دو گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$ و $K_{2,3}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱۳-۴

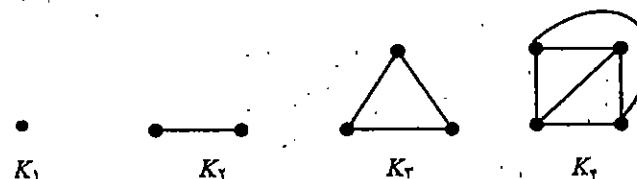
در این گراف، تمامی رئوس از درجه فرد می‌باشند. پس $\Delta(G) = 5$ و $\delta(G) = 3$. رأس گراف، رأس ماکزیم و مابقی رئوس گراف، رأس مینیم می‌باشند.

دنباله درجه‌های گراف: دنباله‌ای نزولی از درجه‌های رئوس گراف را، دنباله درجه‌های گراف گویند.

مثال ۸-۴: دنباله درجه‌های گراف مثال ۷-۴ عبارت است از: $5, 3, 3, 3, 3, 3$.

۲-۴ گراف‌های ساده خاص

گراف کامل: گراف ساده G را کامل نامند، هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن دقیقاً یک یال موجود باشد. به عبارتی، هر رأس، گراف کامل با $(n-1)$ رأس دیگر، مجاور است. گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهند. گراف‌های کامل K_1 و K_2 و K_3 در شکل ۱۰-۴ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰-۴

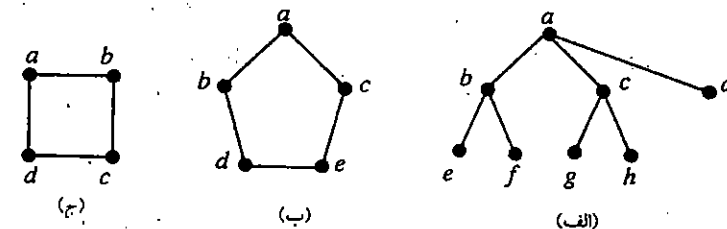
طبق تعریف گراف کامل، درجه هر رأس در گراف کامل، $(n-1)$ است، بنابراین:

$$\sum_{i=1}^n \deg(u_i) = n(n-1) \Rightarrow |E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

تورنمنت: تورنمنت گرافی است جهت‌دار، که بین هر دو رأس متمایز u و v در آن، دقیقاً یک یال وجود داشته باشد. تورنمنت n رأسی را با K_n^* نشان می‌دهند.

در شکل ۱۱-۴ چند نمونه تورنمنت نشان داده شده‌است.

کدام یک از گراف‌های شکل زیر دوبخشی است؟ مثال ۴-۱۱:



شکل ۴-۱۴

حل:

گراف (الف) دوبخشی است، با مجموعه رئوس $V_1 = \{a, e, f, g, h\}$ و $V_2 = \{b, c, d\}$

گراف (ب) بنا به تعریف، گراف دوبخشی نمی‌باشد.

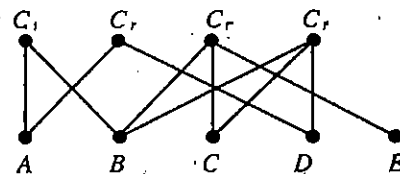
گراف (ج) دوبخشی است، با مجموعه رئوس $V_1 = \{a, c\}$ و $V_2 = \{b, d\}$

کدام یک از گراف‌های شکل زیر دوبخشی است؟ مثال ۴-۱۲: فرض کنید موسسه‌ای در نظر دارد ۴ دبیر $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ ، برای تدریس دروس A, B, C, D, E انتخاب نماید. مهارت‌های هر دبیر در جدول زیر نشان داده شده است. هدف تعیین دروس برای هر دبیر است به طوری که آن دبیر در دروس مورد نظر مهارت داشته باشد و هیچ دو دبیری درس مشترک نداشته باشند.

دبیر	مهارت
C_1	A, B
C_2	A, D
C_3	B, C, E
C_4	B, C, D

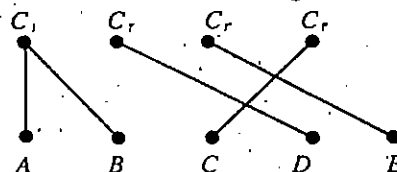
حل:

ارتباط بین دبیران و مهارت تدریس آن‌ها در دروس را می‌توان با یک گراف دوبخشی با مجموعه رئوس $V = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ و $V = \{A, B, C, D, E\}$ به صورت شکل ۴-۱۵ نشان داد.



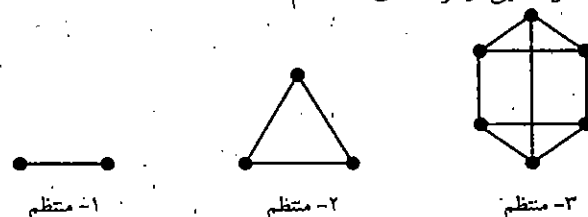
شکل ۴-۱۵

با توجه به شکل ۴-۱۵، یکی از انتخاب‌ها را می‌توان به صورت زیر تعیین نمود:
 رأس E معلق و تنها انتخاب آن رأس C_4 است، رئوس C_2, E و تمامی یال‌های متصل به آن‌ها را حذف نموده؛ رأس انتخابی بعدی، رأس معلق C است که آن‌هم تنها یک انتخاب رأس C_3 را دارد، رأس C و C_3 و تمام یال‌های متصل به آن را نیز حذف نموده؛ رأس معلق D رأس انتخابی بعدی است، که آن‌هم تنها یک انتخاب رأس C_1 را دارد؛ رأس D و C_1 و تمام یال‌های متصل به آن را حذف نموده و در انتها رئوس A و B تنها انتخاب C_4 را دارند؛ شکل ۴-۱۶.

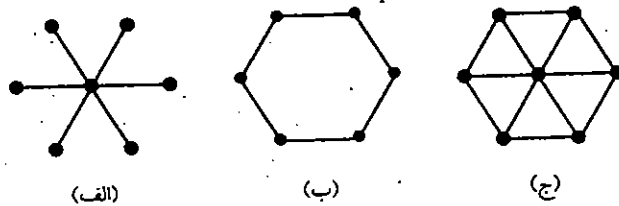


شکل ۴-۱۶

گراف r -متنظم: برای عدد صحیح $r (r \geq 0)$ ، گراف ساده $G=(V, E)$ را r -متنظم گویند، هرگاه درجه هر رأس آن r باشد؛ به عبارت دیگر، $\forall u \deg(u) = r$.
 در شکل زیر، نمونه‌هایی از گراف‌های r -متنظم نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۷



شکل ۴-۱۸

۳-۴ زیرگراف و انواع آن

برای درک بهتر مفهوم زیرگراف، به مثال زیر توجه نمایید.

مثال ۴-۱۵: فرض کنید شبکه بزرگ مخابراتی کشور فقط به اطلاعات مبادله شده بین شهرهای تهران، اصفهان، شیراز و مشهد احتیاج دارد. برای این منظور کافی است تمامی خطوط ارتباطی بین شهرها بجز خطوط ارتباطی که حداقل ۲ شهر از ۴ شهر مذکور را به یکدیگر متصل می‌کنند، حذف شود. با این کار، اولاً شهرها به ۴ شهر مورد نظر محدود شده، ثانیاً فقط خطوط ارتباطی بین این ۴ شهر در دسترس می‌باشد.

زیرگراف: گراف $G_1=(V_1, E_1)$ را زیرگراف $G=(V, E)$ گویند، هرگاه:

$$E_1 \subseteq E, \quad \emptyset \neq V_1 \subseteq V$$

گراف G_1 زیرگراف سره گراف G است، هرگاه:

$$E_1 \subseteq E, \quad \emptyset \neq V_1 \subset V$$

برخی از زیرگراف‌های ویژه عبارتند از:

زیرگراف فراگیر (پوشا): زیرگرافی که همه رئوس گراف را در برداشته باشد،

زیرگراف فراگیر نامیده می‌شود. بنابراین در زیرگراف فراگیر، $V_1=V$ و $E_1 \subseteq E$.

مثال ۴-۱۳: گراف $K_n, (n-1)$ -منتظم است.

مثال ۴-۱۴: یکی از کاربردهای گراف در طراحی شبکه‌های محلی است. فرض کنید در یک آپارتمان سیستم‌های کامپیوتری متفاوت با وسایل جانبی از قبیل پرینتر، اسکنر و رسام موجود باشند. برای استفاده بهینه ساکنان قرار است آنها به نحوی بهم متصل شوند که ساکنان بتوانند از اطلاعات و امکانات موجود کمال استفاده را نمایند. برای این منظور مدل‌های زیر جهت اتصال این کامپیوترها معرفی می‌شوند:

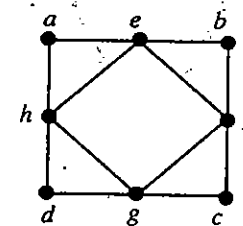
- شبکه ستاره‌ای: در این شبکه یکی از کامپیوترها به عنوان کامپیوتر مرکزی در نظر گرفته شده و سایر کامپیوترها به آن متصل می‌شوند. شبکه محلی طراحی شده به این صورت، همانند یک گراف کامل K_{n-1} است. در این طراحی مطابق شکل ۴-۱۸ (الف)، اطلاعات از کامپیوتر مرکزی به سایر کامپیوترها ارسال می‌شود.
- شبکه حلقه‌ای: در این شبکه هر کامپیوتر دقیقاً با دو کامپیوتر دیگر متصل است. گراف حاصل از شبکه‌های محلی با این نوع مدل را گراف‌های دور نامند و با C_n نشان می‌دهند. در شکل ۴-۱۸ (ب) یک C_6 نشان داده شده است. در این نوع شبکه اطلاعات از یک کامپیوتر به کامپیوتر مجاور ارسال می‌شود و ارسال اطلاعات تا زمانی ادامه دارد که کامپیوتر ارسال کننده اطلاعات، مجدداً اطلاعات را دریافت نماید.

- شبکه ترکیبی: در این نوع طراحی شبکه، ترکیبی از شبکه‌ی ستاره و حلقه استفاده می‌شود. اطلاعات می‌تواند از کامپیوتر مرکزی به سایر کامپیوترها یا از یک کامپیوتر به سایر کامپیوترهای مجاور ارسال گردد. این ویژگی باعث بالا رفتن قابلیت اطمینان می‌گردد.

این نوع گراف اصطلاحاً چرخ نامیده می‌شود و با W_n نشان داده می‌شود. یک W_6 در شکل ۴-۱۸ (ج) نشان داده شده است.

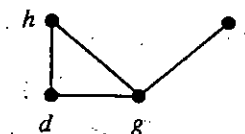
❏ زیرگراف القایی رئوس V_1 : زیرگرافی که تمام یال‌هایی از گراف G که دو سر آنها در V_1 است را شامل شود، زیرگراف القایی مجموعه رئوس V_1 نامند.

کج مثال ۴-۱۶: گراف شکل ۴-۱۹ را در نظر بگیرید.



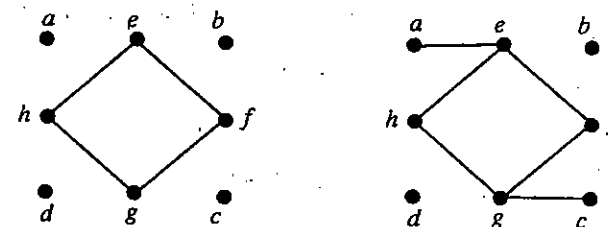
شکل ۴-۱۹.

الف) زیرگراف القایی مجموعه رئوس $V_1 = \{h, d, g, f\}$ عبارت است از:



شکل ۴-۲۰.

ب) دو نمونه از زیرگراف‌های فراگیر گراف فوق عبارت است از:

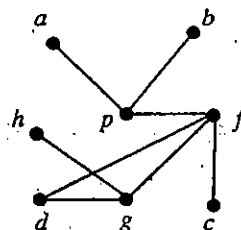


شکل ۴-۲۱.

❏ زیرگراف $G-v$: زیرگرافی است که از حذف رأس v از مجموعه رئوس گراف G و حذف تمام یال‌های متصل به v بدست می‌آید.

❏ زیرگراف $G-e$: زیرگرافی است که از حذف یال e از مجموعه یال‌های گراف G بدست می‌آید. به عبارت دیگر $V(G-e) = V(G)$ و $E(G-e) = E(G) - \{e\}$.

کج مثال ۴-۱۷: گراف G در شکل زیر داده شده است.

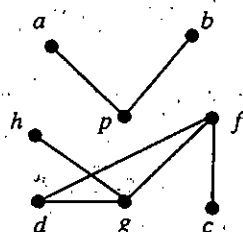


شکل ۴-۲۲.

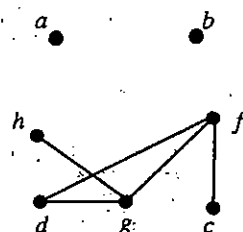
الف) زیرگراف $G-p$ را به دست آورید.

ب) زیرگراف $G-pf$ را به دست آورید.

حل:



(ب)



(الف)

شکل ۴-۲۳.

۴-۴- نمایش گراف و یکریختی گراف‌ها

۴-۴-۱- نمایش گراف

یکی از مهم‌ترین کاربردهای گراف، مدل‌سازی موضوعات گوناگون مانند طراحی نقشه شبکه بزرگ، متروی شهری و آبراه‌ها و بررسی آنها می‌باشد. باتوجه به حجم زیاد

اطلاعات و عدم وجود فضای کافی، می‌توان از ماتریس برای نمایش گراف این نقشه‌ها استفاده نمود. در ادامه، ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع، که ماتریس‌هایی برای نمایش گراف می‌باشند، معرفی می‌شوند. با استفاده از این دو ماتریس، به‌عنوان مثال می‌توان ارتباط نقاط شهری با یکدیگر و یا ارتباط هریک از نقاط شهری با یکی از خطوط ارتباطی را نمایش داد.

📖 **ماتریس مجاورت گراف:** فرض کنید $G=(V,E)$ ، گراف ساده n رأسی باشد. ماتریس مجاورت گراف G را با A_G نمایش می‌دهند که در آن:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E \\ 0 & v_i v_j \notin E \end{cases} \quad \text{و } v_i, v_j \in V$$

ماتریس مجاورت برای گراف دارای طوقه و یا یال‌های چندگانه نیز تعریف می‌شود، در این صورت ماتریس مجاورت، ماتریسی با دارایی‌های صفر-یک نمی‌باشد، زیرا برای رئوس v_i و v_j با یال‌های چندگانه، a_{ij} برابر تعداد یال‌های بین آن دو رأس می‌باشد؛ و برای هر رأس v_i با یال طوقه، تعریف می‌کنیم: $a_{ii} = 1$.

📌 **مثال ۴-۱۸:** ماتریس مجاورت گراف‌های زیر را به‌دست آورید.



شکل ۴-۲۲.

حل:

$$A_{G_1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad A_{G_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

نکات زیر در ماتریس مجاورت گراف برقرار است:

- ماتریس مجاورت گراف، متقارن است.
- در گراف‌های فاقد طوقه، مجموع درایه‌های هر سطر یا ستون با درجه رأس نظیر آن سطر یا ستون، برابر است. در صورت وجود طوقه در گراف، به ازای هر طوقه، به مجموع سطر یا ستون متناظر، یک واحد اضافه می‌شود.
- در گراف‌های فاقد طوقه، مجموع درایه‌های ماتریس با مجموع درجه‌های گراف، برابر است. به عبارت دیگر:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = 2|E|$$

در صورت وجود طوقه در گراف، به ازای هر طوقه، به مجموع فوق یک واحد اضافه می‌شود.

- در گراف ساده G ، درایه قطر اصلی ماتریس A^r ، درجه رئوس گراف را نشان می‌دهد.

📖 **ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار:** فرض کنید $D=(V,E)$ گرافی بدون یال چندگانه با n رأس باشد. ماتریس مجاورت گراف D نیز با A_D نمایش داده می‌شود که در آن برای هر $v_i, v_j \in V$ داریم:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

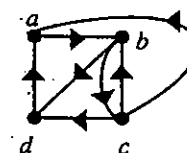
ماتریس مجاورت برای گراف جهت‌دار چندگانه نیز تعریف می‌شود، در این صورت ماتریس مجاورت، ماتریسی با دارایی‌های صفر-یک نمی‌باشد، برای رئوس v_i و v_j با یال‌های چندگانه، a_{ij} برابر تعداد یال‌های است که از رأس v_i خارج و به رأس v_j وارد می‌شود.

📌 **مثال ۴-۱۹:** ماتریس مجاورت گراف‌های شکل ۴-۲۵ را به‌دست آورید.

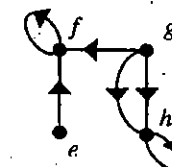
حل:

شکل ۴-۲۵.

D_1 :



D_2 :



$$A_{D_1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_{D_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{matrix} e \\ f \\ g \\ h \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

نکات زیر در ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار برقرار است:

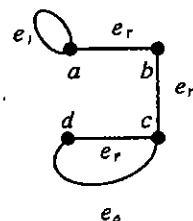
- ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار، الزاماً متقارن نیست.
- در ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار، جمع درایه‌های هر سطر با درجه خروجی رأس متناظر آن سطر در گراف، برابر است.
- در ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار، جمع درایه‌های هر ستون با درجه ورودی رأس متناظر آن در گراف برابر است.

❏ ماتریس وقوع گراف: فرض کنید گراف $G=(V,E)$ دارای n رأس و m یال باشد، قراردید $E=\{e_j: j=1,2,\dots,m\}$ ماتریس وقوع G با $M=[m_{ij}]_{n \times m}$ نمایش داده می‌شود؛ که در آن هر m_{ij} ارتباط بین رأس v_i و یال e_j را نشان می‌دهد، و:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & e_j = v_i v_k \in E \text{ یا } e_j = v_k v_i \in E \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که $v_i, v_j \in V$

کدام مثال ۴-۲۰: ماتریس وقوع گراف زیر را بیابید.



شکل ۴-۲۶.

حل:

در گراف فوق $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ می‌باشد. ماتریس وقوع، یک ماتریس 4×6 است که سطرهای آن معرف رئوس گراف و ستون‌های آن بیانگر یال‌های گراف است؛ بنابراین:

$$M_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

نکات زیر در ماتریس وقوع گراف، برقرار است:

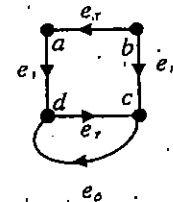
- مجموع اعداد در هر ستون ۲ است؛ زیرا هر ستون معرف یک یال بوده و هر یال تنها دوسر دارد. در صورتی‌که گراف دارای یال طوقه باشد، مجموع اعداد ستون مذکور، ۱ خواهد بود.
- در گراف فاقد یال طوقه، مجموع اعداد در هر سطر برابر با درجه آن رأس است؛ زیرا هر سطر بیانگر تعداد یالی است که رأس متناظر یکی از دوسر آن است.

ماتریس وقوع گراف جهت‌دار: فرض کنید گراف جهت‌دار $D=(V,E)$ دارای n رأس و m یال باشد، قرار دهید $E=\{e_j : j=1,2,\dots,m\}$ ماتریس وقوع D را با $M=[m_{ij}]_{n \times m}$ نمایش داده می‌شود؛ که در آن هر m_{ij} ارتباط بین رأس v_i و یال e_j را نشان می‌دهد، و:

$$m_{ij} = \begin{cases} -1 & e_j=(v_i, v_k) \in E \\ 1 & e_j=(v_k, v_i) \in E \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و $v_i, v_j \in V$

مثال ۴-۲۱: ماتریس وقوع گراف زیر را بیابید.



شکل ۴-۲۱.

حل:

$$M_D = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

نکات زیر در ماتریس وقوع گراف جهت‌دار، برقرار است:

- مجموع اعداد در هر ستون ۰ است؛ زیرا هر ستون معرف یک یال بوده و هر یال تنها دوسر دارد.
- در هر سطر مجموع (۱)ها یا درجه ورودی، مجموع (۱-)ها یا درجه خروجی و مجموع قدرمطلق آنها، با درجه رأس متناظر آن سطر، برابر است.

با توجه به خصوصیت و ویژگی‌های ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع، این سؤال مطرح می‌شود که: حافظه‌ای که ماتریس وقوع نیاز دارد بیشتر است یا حافظه مورد نیاز ماتریس مجاورت؟ به عبارت دیگر، استفاده از کدام نوع ماتریس مقرون به صرفه است؟ پاسخ به این سؤال کاملاً بستگی به نوع گراف و به خصوص تعداد یال‌ها دارد؛ به این مفهوم که، در گراف تهی، ماتریس وقوع از اندازه $|V| \times |E| = 0$ است، ولی ماتریس مجاورت همواره از اندازه $|V| \times |V|$ می‌باشد؛ اما بدترین حالت زمانی است که گراف کامل باشد؛ در این حالت، تعداد یال‌های ماتریس مجاورت مضربی از $|V| \times |V| = |V|^2$ و تعداد یال‌های ماتریس وقوع مضربی از $|V|^2$ است؛ بنابراین حجم ماتریس مجاورت در این حالت کم‌تر است.

۴-۴-۲- یکرختی گراف‌ها

گراف‌های یکرخت: دو گراف $G_1=(V_1, E_1)$ و $G_2=(V_2, E_2)$ را یکرخت گویند، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا مانند $f: V_1 \rightarrow V_2$ بتوان یافت طوری که:

$$\forall v_i, v_j \in V_1: v_i v_j \in E_1 \Leftrightarrow f(v_i) f(v_j) \in E_2$$

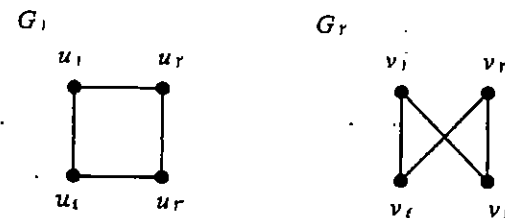
شرایط لازم برای یکرختی:

بنا به تعریف یکرختی، برای اینکه دو گراف G_1 و G_2 یکرخت باشند، باید:

- $|E_1| = |E_2|$ ، $|V_1| = |V_2|$
- تعداد رئوس از درجه k در گراف G_1 با تعداد رئوس از درجه k در گراف G_2 برابر است.

برای بیان ویژگی f (حفظ ارتباط رئوس با یکدیگر در دو گراف)، می‌توان نشان داد ماتریس مجاورت گراف G_1 با ماتریس مجاورت گراف G_2 مطابق با سطر و ستون‌های تابع تعریف شده روی G_1 ، یکسان هستند؛ به عبارت دیگر با انجام اعمال سطری و یا ستونی مقدماتی از ماتریس G_1 ، می‌توان به ماتریس G_2 رسید.

مثال ۴-۲۲: آیا دو گراف G_1 و G_2 یکرخت می‌باشند؟



شکل ۲۸-۴

حل:

تابع یک به یک و پوشای $f: G_1 \rightarrow G_2$ را می‌توان مطابق شکل ۲۸-۴، به صورت زیر تعریف نمود:

$$f(u_1) = v_l, \quad f(u_r) = v_r, \quad f(u_r) = v_r, \quad f(u_l) = v_l$$

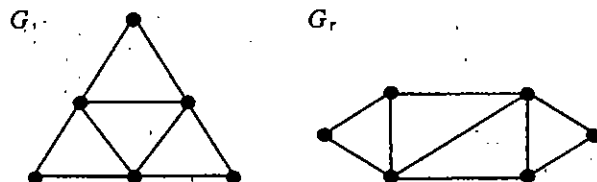
برای مشاهده حفظ ارتباط رئوس با یکدیگر، نشان می‌دهیم ماتریس مجاورت گراف G_1 با ماتریس مجاورت گراف G_2 یکسان است.

$$A_{G_1} = \begin{matrix} & u_1 & u_r & u_r & u_l \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_r \\ u_r \\ u_l \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{و} \quad A_{G_2} = \begin{matrix} & v_l & v_r & v_r & v_l \\ \begin{matrix} v_l \\ v_r \\ v_r \\ v_l \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مثال ۲۳-۴: آیا دو گراف G_1 و G_2 در شکل ۲۹-۴، یکریخت می‌باشند؟

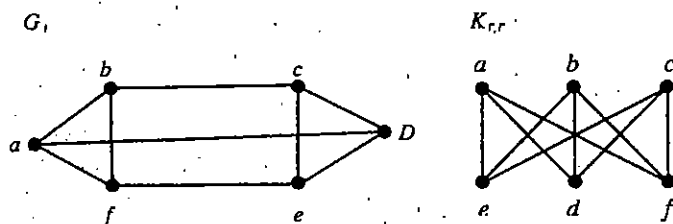
حل:

با توجه به شکل، هر دو گراف دارای ۶ رأس و ۹ یال می‌باشند، بنابراین باید تابع یک به یک و پوشایی را بیابیم که تحت آن گراف G_1 به گراف G_2 تبدیل شود؛ به عبارت دیگر، این تابع باید درجه رئوس در گراف را حفظ نماید. از طرفی درجه‌های رئوس گراف G_1 به ترتیب صعودی برابر است با ۲، ۲، ۲، ۴، ۴، ۴ و درجه‌های رئوس گراف G_2 به ترتیب صعودی برابر است با ۲، ۲، ۳، ۳، ۴، ۴. بنابراین این دو گراف یکریخت نمی‌باشند.



شکل ۲۹-۴

مثال ۲۴-۴: دو گراف زیر را در نظر بگیرید. هر دو گراف دارای ۶ رأس و ۹ یال و دنباله درجه‌های ۳، ۳، ۳، ۳، ۳، ۳ می‌باشند، ولی این دو گراف یکریخت نیستند؛ زیرا در گراف $K_{4,2}$ ، رأس ۳ و a و b وجود دارد که دو به دو با یکدیگر مجاور نمی‌باشند، ولی در گراف G_1 نمی‌توان ۳ رأس با این ویژگی یافت؛ به بیان دیگر در گراف $K_{4,2}$ زیرگرافی به شکل مثلث وجود ندارد، ولی در گراف G_1 چنین زیرگرافی وجود دارد.



شکل ۳۰-۴

مثال ۲۵-۴: گراف $K_{m,n}$ و گراف $K_{n,m}$ یکریخت است.

۵-۴- مکمل گراف

مکمل گراف: فرض کنید $G=(V,E)$ ، گراف ساده n رأسی باشد. گراف مکمل $\bar{G}$ گراف ساده‌ای است که رئوس آن همان مجموعه V و یال‌های آن، یال‌هایی است که در گراف G وجود ندارد. گراف مکمل را با نماد $\bar{G}=(V,\bar{E})$ نشان می‌دهند.

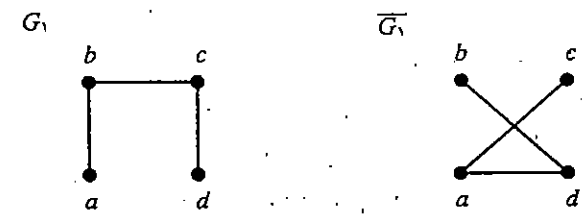
بنابراین:

$$\forall u, v \in V: uv \in E \Leftrightarrow uv \in \bar{E}, \quad GU\bar{G} = K_n$$

با توجه به تعریف مکمل گراف، داریم:

$$|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

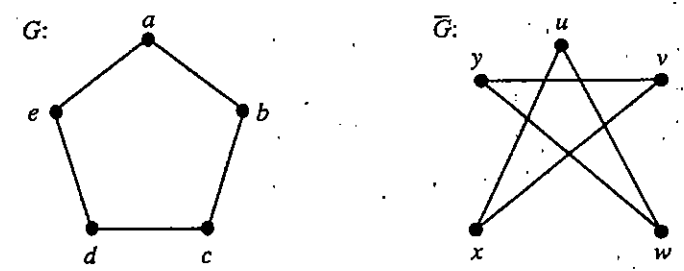
مثال ۴-۲۶: در شکل زیر، گراف G_1 و مکمل آن نشان داده شده است.



شکل ۴-۳۱

گراف خودمکمل: گراف G را خودمکمل گویند، هرگاه G و $\bar{G}$ یکریخت باشند.

مثال ۴-۲۷: آیا دو گراف شکل ۴-۳۲ خودمکمل می‌باشند؟



شکل ۴-۳۲

حل:

بله، تابع یک به یک و پوشای $f: G \rightarrow \bar{G}$ به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(a)=u \quad f(b)=y \quad f(c)=v \quad f(d)=w \quad f(e)=x$$

ملاحظه می‌شود ماتریس مجاورت دو گراف نیز یکسان است.

$$A_G = \begin{matrix} & u & y & v & w & x \\ \begin{matrix} u \\ y \\ v \\ w \\ x \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_{\bar{G}} = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مثال ۴-۲۸: آیا گرافی که دارای ۱۰ رأس است، می‌تواند خودمکمل باشد؟
حل:

طبق تعریف گراف خودمکمل، تعداد یال‌های G و $\bar{G}$ با هم برابر می‌باشند، و بر اساس رابطه $GU\bar{G} = K_1$ ، مجموع یال‌های آن‌ها با تعداد یال‌های K_1 ، یعنی $\frac{10(10-1)}{2} = 45$ برابر است؛ لذا نمی‌توان ۴۵ یال را به دو قسمت مساوی تقسیم کرد، پس چنین گرافی خود مکمل نیست.

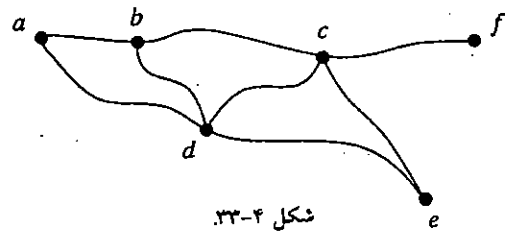
۴-۶- مسیر و دور در گراف

گشت: یک گشت از رأس u به رأس v دنباله‌ای از رئوس و یال‌هاست که از رأس u شروع و به رأس v ختم می‌شود.

گذر: اگر هیچ یالی در گشت تکراری نباشد، آنرا گذر گویند؛ اگر $v = u$ (یعنی رأس ابتدا و انتها یکسان باشد)، آنرا مدار یا گذر بسته گویند.

مسیر: اگر هیچ رأسی در گشت تکراری نباشد، آنرا مسیر گویند؛ اگر $v = u$ ، آنرا دور یا یک مسیر بسته گویند.

مثال ۴-۲۹: گراف زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۴-۳۳

در این گراف:

- گشت $bcdecf$ یک گذر است.
- گشت $bcdecf$ مسیر نیست، زیرا رأس c در آن تکرار شده است.
- گشت $fedca$ یک گذر است. این گشت مسیر نیز می‌باشد.
- گشت $abcdceda$ یک گذر است و چون دو رأس ابتدا و انتها یکی است، این گشت، مدار نیز می‌باشد.
- گذر $abdceda$ چون دارای رأس تکراری d است، بنابراین مسیر نیست.
- گشت $abcda$ یک مسیر است، و از آنجا که دو رأس ابتدایی و انتهایی یکی است، این مسیر دور نیز می‌باشد.

طول گشت: تعداد یال‌های پیموده شده در گشت از رأس u به رأس v ، طول آن گشت نامیده می‌شود.

گزاره ۴-۲: اگر بین دو رأس u و w در گراف $G=(V,E)$ یک گشت وجود داشته باشد، آن‌گاه یک مسیر از رأس u به رأس w در گراف وجود دارد.

اثبات:

چون یک گشت از u به w وجود دارد، پس یکی از گشت‌ها با کوتاه‌ترین طول را انتخاب می‌کنیم. به عنوان نمونه، گشت $u, v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n, w$ را در این حالت داریم: $v_k = v_m$ ؛ این امکان‌پذیر است، زیرا برای $k < m$ داریم $v_k = v_m$ و برای $k = m$ داریم $v_k = v_m$ و $v_k = w$ $k = n+1$.

حال اگر رأس‌های تکراری را از گشت فوق حذف نماییم، در این صورت گشت کوتاهی بین دو رأس u و w به دست می‌آید و این متناقض با کوتاه‌ترین گشت بودن $u, v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n, w$ است. بنابراین اگر بین دو رأس u و w در گراف $G=(V,E)$ یک گشت وجود داشته باشد، آن‌گاه یک مسیر از رأس u به رأس w در گراف وجود دارد.

قضیه ۴-۳: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف $G=(V,E)$ یا گراف جهت‌دار $D=(V,E)$ (شامل یال موازی و یا طوقه) باشد؛ آن‌گاه تعداد مسیرهای متفاوت به طول k از رأس v_i به رأس v_j برابر است با درایه a_{ij} در ماتریس A^k .

اثبات:

فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G با مجموعه راس‌های $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ با استقرا روی تعداد مسیرها، می‌توان حکم را ثابت نمود.

بنابه تعریف ماتریس مجاورت، تعداد مسیرها به طول ۱ از v_i به v_j متناظر با درایه a_{ij} در A است.

فرض استقرا: فرض کنید تعداد مسیرهای متفاوت به طول k از v_i به v_j متناظر با درایه a_{ij} در A^k باشد.

می‌دانیم $A^{k+1} = A^k \cdot A$ بنابراین درایه a_{ij}^{k+1} در A^{k+1} برابر با $\sum_{r=1}^n b_{ir} a_{rj}$ است، که در آن b_{ir} متناظر با درایه a_{ir} در A^k است. با توجه به فرض استقرا، b_{ir} تعداد مسیرها به طول k از v_i به v_r می‌باشد. یک مسیر به طول $(k+1)$ از v_i به v_j از مسیری به طول k از v_i به v_r (دلخواه) و یک یال از v_r به v_j به دست می‌آید. تعداد مسیرها به طول k از v_i به v_r و a_{rj} تعداد یال‌ها از v_r به v_j می‌باشد، بنابراین $b_{ir} a_{rj}$ تعداد مسیرها به طول $(k+1)$ از v_i به v_j با عبور از هر رأس دلخواه v_r است؛ بنابراین تعداد کل مسیرهای متفاوت به طول $(k+1)$ از v_i به v_j برابر با $\sum_{r=1}^n b_{ir} a_{rj}$ است.

مثال ۴-۳۰: گراف شکل ۴-۳۴ را در نظر بگیرید.

الف) چند مسیر متفاوت به طول ۳ بین دو رأس a و b وجود دارد؟

ب) چند نمونه از مسیرهای متفاوت بین دو رأس a و b به طول‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را بیابید.

حل:

الف) طبق قضیه ۴-۳، ۱۳ مسیر متفاوت بین این دو رأس وجود دارد

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow A^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 12 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 12 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

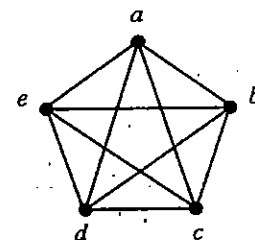
(ب)

• ab : مسیر به طول ۱.

• aeb, adb, acb : مسیرهایی به طول ۲.

• $aedb, aecb, adeb, adcb, acdb, aceb$: چند نمونه از مسیرهایی به طول ۳.

• $aedcb, aecdb, acdeb, acedb, adceb, adecb$: چند نمونه از مسیرهایی به طول ۴.



شکل ۴-۳۴.

۴-۶-۱- گراف همبند

❏ گراف همبند: گراف $G=(V,E)$ را همبند گویند، هرگاه بین هر دو رأس آن، حداقل یک مسیر موجود باشد، در غیر این صورت گراف را ناهمبند گویند.

❏ مؤلفه (مؤلفه همبندی): هرگراف ناهمبند، شامل چندین زیرگراف همبند است، که هر کدام را یک مؤلفه همبندی می‌نامیم.

همبندی در گراف جهت‌دار:

در گراف‌های جهت‌دار، سه نوع همبندی به شرح زیر مطرح می‌شود:

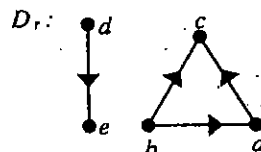
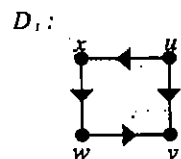
❏ همبند قوی: گراف جهت‌دار را همبند قوی گویند، هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل یک مسیر جهت‌دار وجود داشته باشد.

گراف ۲۲۱

❏ همبند یک‌طرفه: گراف جهت‌دار را همبند یک‌طرفه گویند، هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل از یک طرف مسیر وجود داشته باشد.

❏ همبند ضعیف: گراف جهت‌دار را همبند ضعیف گویند، هرگاه بدون در نظر گرفتن جهت، بین هر دو رأس دلخواه آن مسیری موجود باشد. به عبارت دیگر، گراف زمینه آن همبند باشد.

❏ مثال ۴-۳۱: کدام یک از گراف‌های شکل زیر، همبند و کدام یک ناهمبند هستند؟



شکل ۴-۳۵.

حل:

گراف D_1 همبند یک‌طرفه و گراف D_2 ناهمبند و دارای دو مؤلفه همبندی است.

❏ رأس برشی: رأس v در گراف همبند G ، رأس برشی نامیده می‌شود، هرگاه زیرگراف $G-v$ ناهمبند شود.

❏ پل: پل e ، یک پل برای گراف همبند G است، هرگاه زیرگراف $G-e$ ناهمبند باشد.

❏ مثال ۴-۳۲: در گراف مثال ۴-۲۹، رأس c ، رأس برشی و پل cf پل می‌باشد.

❏ قضیه ۴-۴: گراف ساده $G=(V,E)$ ، دوبخشی است اگر و تنها اگر فاقد دوری به طول فرد باشد.

اثبات:

شرط لازم: فرض کنید گراف ساده G دوبخشی است، نشان می‌دهیم فاقد دوری به طول فرد است.

فرض کنید $G = V_1 \cup V_2$ که در آن $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ و $V_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ با توجه به ساختار گراف دوبخشی، هر دور در گراف دوبخشی به یکی از صورت‌های زیر است:

$$v_{i_1}, w_{j_1}, v_{i_2}, w_{j_2}, \dots, v_{i_r}, w_{j_r}, v_{i_1}$$

$$w_{k_1}, v_{l_1}, w_{k_2}, v_{l_2}, \dots, w_{k_s}, v_{l_s}, w_{k_1}$$

در حالت اول طول دور $2s$ و در حالت دوم طول دور $2r$ می‌باشد؛ بنابراین گراف دوبخشی G فاقد دوری به طول فرد است.

شرط کافی: فرض کنید گراف فاقد دوری به طول فرد باشد، نشان می‌دهیم گراف دوبخشی است.

بدون ایجاد خللی در کلیت مسأله، فرض می‌کنیم گراف همبند باشد (اگر گراف همبند نباشد، مؤلفه‌های همبند گراف نیز، دوری به طول فرد ندارند و طبق اثباتی که ارائه می‌شود، مؤلفه‌های همبند، دوبخشی خواهند شد و در نتیجه، گراف دوبخشی خواهد بود).

فرض کنید a یک رأس دلخواه از G باشد، بنابه همبندی گراف، بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل یک مسیر وجود دارد؛ تعریف می‌کنیم:

$$V_1 = \{v \in V \mid \text{مسیری به طول زوج از } a \text{ به } v \text{ باشد}\}$$

$$V_2 = V - V_1$$

بنابراین $a \in V_1$ (مسیری به طول صفر است)؛ با استفاده از برهان خلف می‌توان نشان داد $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (اثبات برعهده دانشجو)، بنابراین V_1 و V_2 مجموعه V را افرازی می‌کنند. ادعا می‌کنیم V_1 و V_2 مستقل می‌باشند؛ به عبارت دیگر، هیچ دو رأس مجموعه V_1 به هم متصل نمی‌باشند و هم‌چنین هیچ دو رأس مجموعه V_2 به هم متصل نمی‌باشند.

فرض کنید $u, v \in V_1$ ، پس از a به u و از a به v به ترتیب مسیرهایی به طول زوج مانند $a \rightarrow v_1 \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i+k} \rightarrow u$ و $a \rightarrow w_1 \rightarrow w_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow w_{j+s} \rightarrow v$ وجود دارد؛ اگر یال uv موجود باشد، آن‌گاه طول دور زیر، فرد است؛ و این متناقض با فرض مسأله می‌باشد.

$$a \rightarrow v_1 \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i+k} \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w_{j+s} \rightarrow \dots \rightarrow w_{j+1} \rightarrow w_j \rightarrow a$$

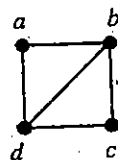
بنابراین هیچ کدام از رئوس مجموعه V_1 با هم در ارتباط نمی‌باشند؛ به همین ترتیب اعضای مجموعه V_2 نیز با هم در ارتباط نیستند. پس گراف G دوبخشی است.

۴-۶-۲- گراف اویلری

گذر اویلری: گذری که از تمام یال‌های گراف عبور کند، گذر اویلری می‌نامند. به عبارت دیگر، گشتی که از تمام یال‌های گراف، فقط یکبار عبور نماید، گذر اویلری گویند.

مدار اویلری: مداری که از تمام یال‌های گراف عبور کند، مدار اویلری نام دارد. به عبارت دیگر، مدار اویلری، گشتی که از تمام یال‌های گراف فقط یکبار عبور نموده و به نقطه شروع بازگردد. گراف دارای مدار اویلری، گراف اویلری نامیده می‌شود.

مثال ۴-۳: گراف شکل زیر، گذر اویلری $bcadb$ دارد، ولی مدار اویلری ندارد.



شکل ۴-۳.

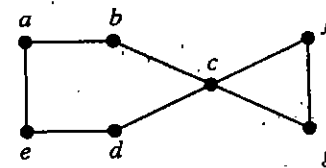
قضیه ۴-۵: گراف همبند (چندگانه) G دارای مدار اویلری است، اگر و تنها اگر G همبند بوده و درجه تمام رئوس آن زوج باشد. اثبات در [۴] قضیه ۳-۱۱ بیان شده است.

قضیه ۴-۶: گراف همبند (چندگانه) G دارای گذر اویلری است اگر و تنها اگر G دقیقاً دارای دو رأس از درجه فرد باشد. اثبات در [۴] قضیه ۲-۱۱ بیان شده است.

طبق قضیه ۴-۶، گذر اویلری، از یک رأس فرد شروع و به رأس فرد دیگر، ختم می‌شود.

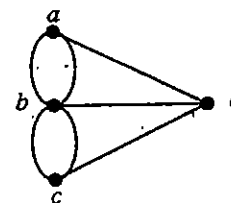
مثال ۴-۳۴: طبق قضیه ۴-۵، گراف $K_{m,n}$ برای m و n زوج، اویلری است.

مثال ۴-۳۵: طبق قضیه ۴-۵، گراف زیر مدار اویلری دارد و $abcfgcdcab, bcfgcdcab, abcfgcdcab$ همگی مدارهای اویلری آن می‌باشند.



شکل ۴-۳۷

مثال ۴-۳۶: گذر و مدار اویلری را در گراف شکل ۴-۳۸، در صورت وجود بیابید.



شکل ۴-۳۸

حل:

$$\deg(a)=\deg(c)=\deg(d)=3, \quad \deg(b)=5$$

طبق قضیه ۴-۵، گراف فوق مدار اویلری ندارد؛ گراف ۴ رأس از درجه فرد دارد و بنا به قضیه ۴-۶، گذر اویلری نیز ندارد.

✓ قضیه ۴-۷: گراف (چندگانه) D دارای مدار اویلری جهت‌دار است اگر و تنها اگر D همبند ضعیف بوده و درجه ورودی هر رأس برابر درجه خروجی آن باشد. یعنی:

$$\forall u_i \in V \quad od(u_i)=id(u_i)$$

اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

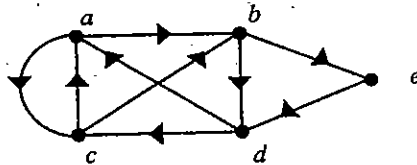
✓ قضیه ۴-۸: گراف (چندگانه) D دارای گذر اویلری آن است اگر و تنها اگر D همبند ضعیف بوده و به غیر از دو رأس v_1 و v_2 درجه ورودی و خروجی سایر رئوس برابر باشند و برای دو رأس v_1 و v_2 داشته باشیم:

$$id(v_1)=od(v_1)+1$$

$$od(v_2)=id(v_2)+1$$

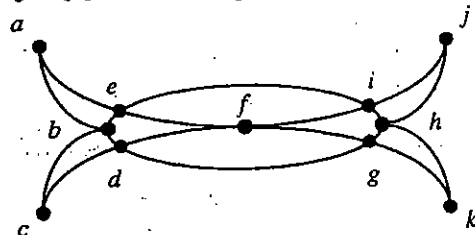
در این صورت، گذر اویلری از رأس v_2 شروع و به رأس v_1 ختم می‌شود. اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

مثال ۴-۳۷: مدار اویلری گراف جهت‌دار شکل زیر عبارتست از: $abedcacbdba$



شکل ۴-۳۹

مثال ۴-۳۸: برای گراف زیر بررسی نمایید، آیا گذر و مدار اویلری وجود دارد یا خیر؟



شکل ۴-۴۰

حل:

طبق قضیه ۴-۵، گراف مدار اولیه دارد، به عنوان نمونه $abdghijhkgfcdbeifea$ یک مدار اولیه آن است. واضح است که گذر اولیه ندارد.

۴-۶-۳- گراف همیتونی

مسیر همیتونی: مسیری است که از تمامی رئوس گراف عبور کند. به عبارت دیگر، گشتی که از تمام رئوس گراف فقط یکبار عبور نماید، مسیر همیتونی نامیده می‌شود.

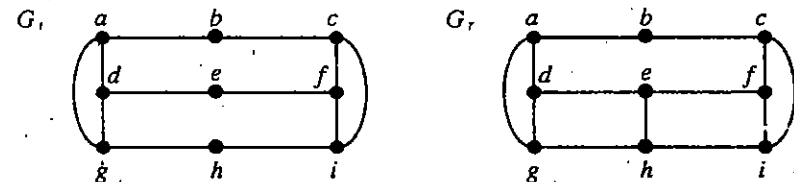
دور همیتونی: دوری است که از تمامی رئوس گراف عبور کند. به عبارت دیگر، گشتی که از تمام رئوس گراف فقط یکبار عبور نماید و به رأس شروع بازگردد، دور همیتونی نامیده می‌شود. به گرافی که دور همیتونی دارد، گراف همیتونی گویند.

گزاره ۴-۳: اگر گراف G دارای دور همیتونی باشد، آن گاه G دارای مسیر همیتونی است.

اثبات:

بنابراین فرض، گراف شامل دوری است که از تمام رئوس آن فقط یکبار عبور کرده و به رأس شروع باز می‌گردد، با حذف یال بین رأس شروع و رأس خاتمه دور، مسیر همیتونی به دست می‌آید.

مثال ۴-۳۹: در گراف‌های زیر مسیر و دور همیتونی را بررسی نمایید.

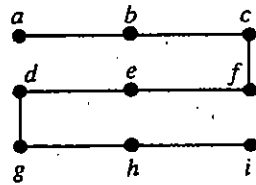


شکل ۴-۴۱.

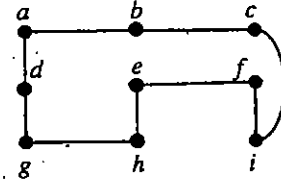
حل:

گراف G_1 دور همیتونی ندارد، ولی مطابق شکل ۴-۴۲ (الف) دارای مسیر همیتونی $abcfedghi$ است.

گراف G_2 ، طبق گزاره ۴-۴، دارای مسیر همیتونی $abcifedgh$ و مطابق شکل ۴-۴۲ (ب)، دارای دور همیتونی $abcifehgda$ است.



(الف)

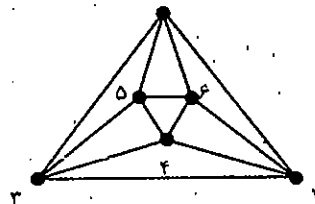


(ب)

شکل ۴-۴۲.

- باتوجه به مثال قبل، نتایج مفیدی جهت یافتن دور همیتونی به دست می‌آید، از آن جمله:
- اگر گراف G همیتونی باشد، آن گاه داریم: $\forall v \in V: \deg(v) \geq 2$.
 - اگر $\exists v \in V: \deg(v) = 2$ ، آن گاه دو یال مجزا و متصل به v باید در دور همیتونی قرار داشته باشند.

مثال ۴-۴۰: گراف هشت وجهی مقابل، یک گراف همیتونی است. در این گراف دور ۱۲۳۴۵۶۱ یک دور همیتونی است.



شکل ۴-۴۳.

مثال ۴-۴۱: نشان دهید گراف K_n برای $n > 2$ همیتونی است.

حل:

بنابر تعریف، دوری همیتونی است که از تمام رأس‌های گراف فقط یکبار عبور نماید.

به ترتیب زیر می‌توانیم دورهمیلتونی را بسازیم: از هر رأس دلخواه گراف شروع می‌کنیم، چون بین هر دو رأس گراف کامل یالی وجود دارد، پس بین هر دو رأس گراف، مسیری به طول یک می‌باشد؛ بنابراین می‌توانیم بدون تکرار رأسی، از هر رأس گراف به رأس دیگر رفت تا به آخرین رأس گراف برسیم، از طرفی بین رأس ابتدایی و رأس انتهایی مسیر، نیز یالی موجود است که با طی این مسیر، دور همیلتونی حاصل می‌شود.

کج مثال ۴-۴۲: فرض کنید در یک مؤسسه، جهت تشکیل و تأیید چارت سازمانی، n نفر (n عددی فرد) دور یک میزگرد تعدادی جلسه می‌دهند. نشان دهید:

الف) به چند طریق این افراد می‌توانند دور این میزگرد بنشینند.

ب) اگر قرار باشد در هر جلسه، هر نفر تنها با دو نفر مجاور خود مذاکره نماید به طوری که در روزهای قبل مذاکراتی با آن دو صورت نگرفته است. چند جلسه باید به این طریق تشکیل شود قبل از اینکه دو نفر برای بار دوم باهم مذاکره نمایند؟

حل:

الف) می‌دانیم n نفر به تعداد $n/2$ می‌توانند کنار یکدیگر بنشینند. از طرفی چون دور میزگرد می‌نشینند، بنابراین مکان‌هایی که نفر اول برای نشستن انتخاب می‌کند یکسان است (n حالت یکسان)، هم‌چنین طریقه نشستن در جهت عقربه‌های ساعت یا خلاف آن حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند (۲ حالت یکسان)، بنابراین تعداد حالت برابر است با

$$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$$

ب) این مثال را می‌توان با دو روش افزایش مجموعه و استفاده از دور همیلتونی حل نمود. روش اول: n نفر $v_1, \dots, v_n$ تشکیل دور $v_1, \dots, v_n, v_1$ می‌دهند، بنا به فرض مسأله هر نفر باید با $(n-1)$ نفر دیگر مذاکره نماید، به طوری که در هر جلسه مجاز است فقط با دو نفر مذاکره نماید که قبلاً مذاکراتی با آن دو نداشته است، این بدان معنی است که $(n-1)$ نفر باید به مجموعه‌های ۲ عضوی افزایش شوند؛ بنابراین تعداد جلسه‌های مورد نیاز، همان تعداد افزایش‌ها یعنی $\frac{(n-1)}{2}$ می‌باشد.

روش دوم: برای حل، گراف K_n با n رأس فرد در نظر می‌گیریم. گراف دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است؛ از طرفی هر دورهمیلتونی دارای n یال است، بنابراین حداکثر $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} = \frac{(n-1)}{2}$ دور همیلتونی وجود دارد که یال مشترک ندارند.

کج قضیه ۴-۹: فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی n رأسی و فاقد طوقه باشد. اگر به ازای هر u و v دلخواه داشته باشیم: $deg(u) + deg(v) \geq n-1$ آن‌گاه: G دارای مسیر همیلتونی است.

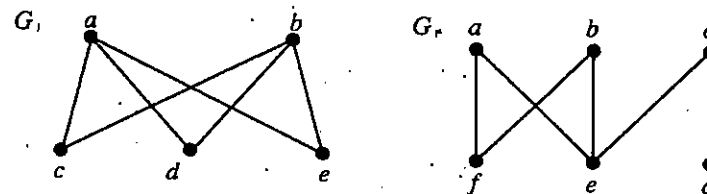
اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

کج قضیه ۴-۱۰: در گراف ساده G ، اگر برای هر $v \in V$ داشته باشیم: $deg(v) \geq \frac{(n-1)}{2}$ آن‌گاه G دارای مسیر همیلتونی است. اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

کج قضیه ۴-۱۱: فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی فاقد طوقه و $|V|=n \geq 3$. اگر برای هر دو رأس غیر مجاور u و v داشته باشیم: $deg(u) + deg(v) \geq n$ آن‌گاه G دارای دور همیلتونی است. اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

کج قضیه ۴-۱۲: اگر درجه هر رأس گراف G حداقل $\frac{n}{2}$ باشد، آن‌گاه G دورهمیلتونی دارد. اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

کج مثال ۴-۴۳: کدام یک از گراف‌های دویخشی زیر، دارای مسیر و دور همیلتونی هستند.



شکل ۴-۲۲.

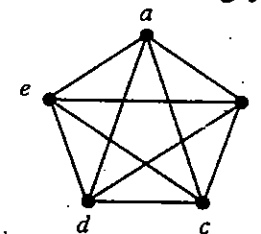
حل:

گراف G_1 یک گراف $K_{5,3}$ است و طبق قضیه ۴-۱۲، دورهمیتونی ندارد. این گراف دارای مسیرهای همیتونی $cadbe$ و $dbeac$ است. گراف G_2 دور همیتونی ندارد؛ زیرا $\deg(d)=1$. این گراف دارای مسیر همیتونی $afbecd$ است.

مثال ۴-۴۴: ۵ دانشجوی یک کلاس تصمیم گرفته‌اند، که هر شب شام را باهم و دور یک میزگرد صرف کنند. برای این منظور به هنگام صرف شام هر یک در کنار دو نفری می‌نشینند که در روزهای پیش کنار آن‌ها نشسته‌اند. برای چند روز می‌توانند این کار را انجام دهند؟

حل:

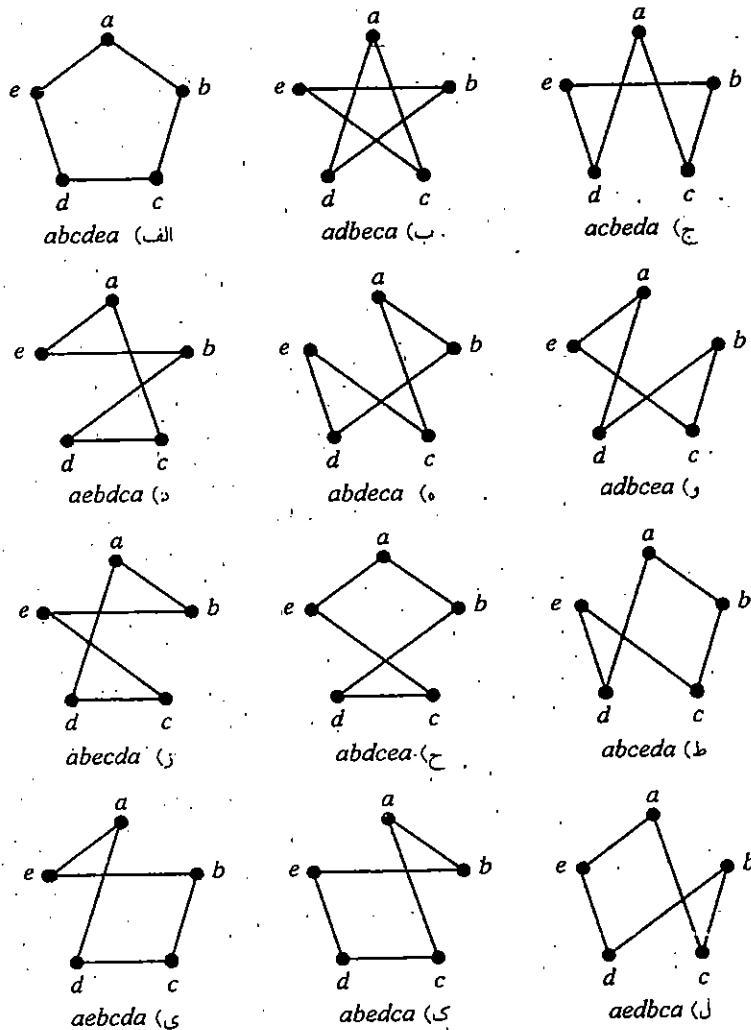
پاسخ این مسأله، معادل این است که تعداد دورهای همیتونی در K_5 محاسبه شوند، به‌طوری‌که با یکدیگر یال مشترکی نداشته باشند.



شکل ۴-۴۵.

با توجه به مثال ۴-۴۲، تعداد دورهای همیتونی K_5 برابر است با $\frac{(5-1)!}{2} = 12$ از این تعداد، $2 = \frac{(5-1)}{2}$ دور با یال‌های غیر مشترک وجود دارند.

در شکل ۴-۴۵ دورهای همیتونی K_5 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، گراف شکل‌های ۴-۴۶ (الف) و ۴-۴۶ (ب) یال مشترکی ندارند.



شکل ۴-۴۶.

۴-۳-۶-۱- کاربردهایی از مسیرها و دورهای همیتونی

برای درک بهتر، ابتدا دو نمونه از کاربردهای مسیر و دور همیتونی که در زندگی روزمره با آن مواجه هستیم، بیان نموده؛ سپس برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر همیتونی، الگوریتم دیجکسترا و برای یافتن دور همیتونی نیمه‌بهینه، الگوریتم قاعده نزدیک‌ترین همسایه معرفی می‌شود.

کج مثال ۴-۴۵: حرکت اسب در صفحه شطرنج، یعنی دو خانه در امتداد افقی یا قائم و یک خانه در امتداد عمود بر آن‌را، در نظر بگیرید. اسب در صفحه ۶۴ خانه‌ای شطرنج، می‌تواند از هر خانه مفروضی به خانه دیگری برود؛ پس گراف بازی همبند است. حال سؤال این است که آیا می‌توان اسب را از هر خانه دلخواهی در صفحه طوری حرکت داد که پس از فقط یکبار اشغال هر خانه، در کمترین زمان ممکن، دوباره به خانه اولیه بازگردد؟

کج مثال ۴-۴۶: خطوط هوایی یا ریلی کشور را در نظر بگیرید. می‌خواهیم کوتاه‌ترین زمان رسیدن یا کوتاه‌ترین مسافت طی شده، از یک شهر به شهر دیگر، به طوری که از هر شهر بین آن دو شهر، فقط یکبار عبور نماید، را به دست آوریم. خطوط هوایی یا ریلی بین شهرها را می‌توان با گراف نمایش داد؛ در این صورت شهرها رئوس گراف و خطوط هوایی یا ریلی بین آن‌ها، یال‌های گراف را تشکیل می‌دهند؛ با توجه به مسأله، می‌توان متناظر با زمان رسیدن یا مسافت طی شده، به هر یال عددی نسبت داد. مسائلی مشابه از قبیل یافتن کوتاه‌ترین مسیر و یا محاسبه کمترین هزینه نقل و انتقال موجودی انبارها را می‌توان با استفاده از گراف‌های وزن‌دار و یافتن مسیرهای همیتونی حل نمود.

گراف وزن‌دار: گرافی که در آن به هر یال، وزنی (عدد مثبت) نسبت داده شود، گراف وزن‌دار می‌نامند. این گراف با $G=(V,E,W)$ نشان داده می‌شود، که در آن W مجموعه وزن‌های گراف می‌باشد.

گراف ۲۳۳

• الگوریتم دیجکسترا

فرض کنید $G=(V,E,W)$ یک گراف وزن‌دار و u و v دو رأس از آن باشد. مسأله اصلی یافتن مسیری بین این دو رأس است، به طوری که کم‌ترین وزن را داشته باشد. در صورت وجود، به چنین مسیری کوتاه‌ترین مسیر بین u و v می‌گویند. الگوریتم دیجکسترا، یک روش برای یافتن چنین مسیری است که مراحل آن به صورت زیر است.

۱. با شروع از رأس u ، $P=\{u\}$ و $T=V-\{u\}$ مقداردهی می‌شود. برای هر $x \in T$ که $l(x)=W(u,x)$ که کوتاه‌ترین مسیر ممکن از u به x است $l(x)$ وزن یال ux است و اگر یالی بین u و x وجود نداشته باشد $W(u,x)=\infty$.

۲. فرض کنید $x \in T$ رأسی باشد که کوتاه‌ترین مسیر را نسبت به اعضای P دارد، اگر $x=v$ باشد، الگوریتم خاتمه می‌یابد؛ در غیر این صورت، قرار می‌دهیم:

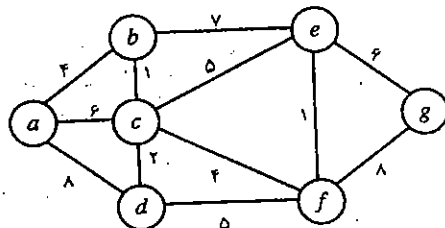
$$P'=P \cup \{x\} \quad T'=T-\{x\}$$

و برای هر $t \in T'$ تعریف می‌کنیم:

$$l'(t)=\min\{l(t), l(x)+W(x,t)\}$$

این مرحله با جایگزینی P با P' و T با T' تکرار می‌شود.

کج مثال ۴-۴۷: کوتاه‌ترین مسیر بین رأس a و g در گراف شکل ۴-۴۷، را به دست آورید.



شکل ۴-۴۷

حل:

مراحل الگوریتم و بررسی وضعیت هر رأس در ادامه توضیح داده شده است.

مرحله ۱:

در این مرحله رأس a انتخاب می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$P=\{a\}$$

$$T=\{b,c,d,e,f,g\}$$

مرحله ۲:

با توجه به رئوس P مسیرهایی که از رأس a شروع شده و کوتاه‌ترین وزن را نسبت به رئوس مجموعه T دارند، عبارتند از: $ad=8$ و $ac=6$ $ab=4$ پس کوچک‌ترین مسیر، $ab=4$ است. بنابراین رأس b انتخاب می‌شود.

$$P=\{a,b\}$$

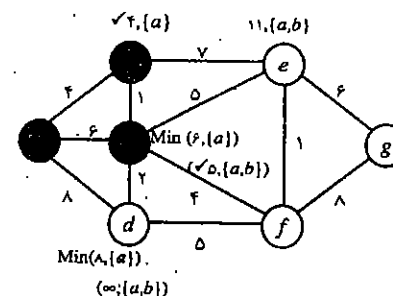
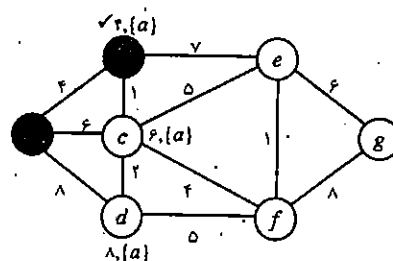
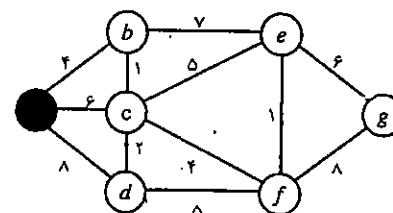
$$T=\{c,d,e,f,g\}$$

مرحله ۳:

با توجه به رئوس P مسیرهایی که از رأس a شروع شده و یا از b می‌گذرد و کوتاه‌ترین وزن را نسبت به رئوس مجموعه T دارند، عبارتند از: $abc=5$ و $ad=8$ $ac=6$ $abc=5$ کوچک‌ترین مسیر مربوط به $abc=5$ است. بنابراین رأس c انتخاب می‌شود.

$$P=\{a,b,c\}$$

$$T=\{d,e,f,g\}$$



مرحله ۴:

مسیر رئوس P با دیگر رئوس مجموعه T یعنی $\{d,e,f,g\}$ محاسبه می‌شود. همان‌طور که در شکل مقابل مشخص است، کوچک‌ترین مسیر مربوط به رأس d است و فاصله آن ۷ است.

$$P=\{a,b,c,d\}$$

$$T=\{e,f,g\}$$

مرحله ۵:

همان‌طور که در شکل مقابل نشان داده است، انتخاب بعدی رأس f است.

$$P=\{a,b,c,d,f\}$$

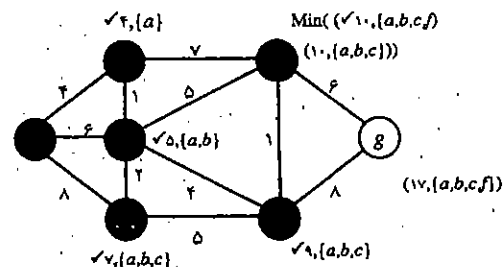
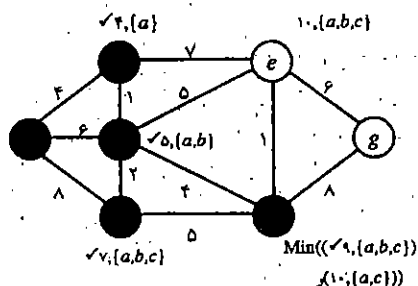
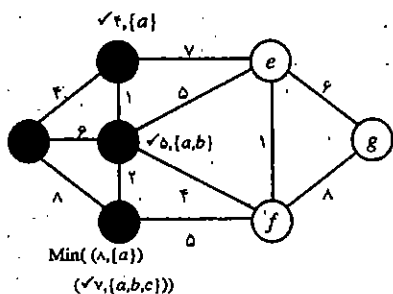
$$T=\{e,g\}$$

مرحله ۶:

انتخاب بعدی با توجه به مقادیر نشان داده شده در شکل، رأس e است.

$$P=\{a,b,c,d,f,e\}$$

$$T=\{g\}$$

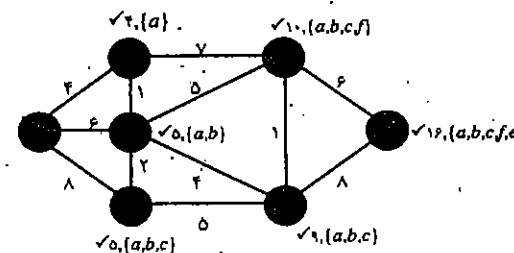


مرحله ۷:

آخرین انتخاب نیز رأس g خواهد بود.

$$P = \{a, b, c, d, f, e, g\}$$

$$T = \{\}$$



مسئله فروشنده دوره گرد

مسئله فروشنده دوره گرد، با هدف به دست آوردن دور همیلتونی نیمه بهینه تعریف می شود.

فرض کنید $K_n = (V, E, W)$ یک گراف کامل وزن دار با n رأس باشد. در این گراف، رئوس به منزله شهرها، یال‌ها مسیر بین شهرها و $W(i, j)$ مسافت یا هزینه لازم برای عبور از مسیری است که دو شهر i و j را به هم وصل کرده است.

فروشنده‌ای در نظر دارد برای فروش کالای خود طوری حرکت نماید که از هر شهر فقط یکبار عبور کند و سرانجام به شهر خود بازگردد، به طوری که مسافت‌های طی شده (هزینه صرف شده برای طی مسیرها) حداقل باشد.

از آنجا که تعداد دورهای همیلتونی در یک گراف کامل با n رأس، برابر با $\frac{(n-1)!}{2}$ است، بنابراین پیدا نمودن دور همیلتونی بهینه، به خصوص برای n های بزرگ، امکان پذیر نیست. از این رو از الگوریتم قاعده نزدیک‌ترین همسایه برای پیدا نمودن دور همیلتونی نیمه بهینه استفاده می شود.

با توجه به هدف مسأله که یافتن دوری با ماکزیمم یا مینیمم مجموع طول مسیرها در دور همیلتونی می باشد، منظور از دور همیلتونی بهینه، دور همیلتونی است که هدف مسأله را برآورده سازد و با انتخاب هر دور دیگری، نتوان به هدف مسأله نائل آمد؛ هم چنین به دور همیلتونی که نزدیک‌ترین مقدار هدف را با دور همیلتونی بهینه داشته باشد، دور همیلتونی نیمه بهینه گویند.

قاعده نزدیک‌ترین همسایه

برای به دست آوردن دور همیلتونی نیمه بهینه H در یک گراف، می توان از روش قاعده نزدیک‌ترین همسایه استفاده نمود. این الگوریتم به ترتیب زیر عمل می نماید:

۱. $H = \emptyset$ را مجموعه یال‌ها و $P = \{\}$ مجموعه رئوس انتخاب شده برای دور همیلتونی نیمه بهینه در نظر گرفته می شود.

۲. فرض کنید $x \in V$ رأسی دلخواه باشد. این رأس به عنوان اولین رأس P در نظر گرفته می شود. بنابراین $P = \{x\}$ هم چنین مقدار متغیر a را برابر $a = x$ قرار می دهیم.

۳. برای $i = 1$ تا $j = n - 1$ مراحل زیر انجام می شود:

۱-۳. اگر $y \in P$ و $y \neq x$ رأسی باشد که $W(x, y)$ مینیمم باشد، بنابراین

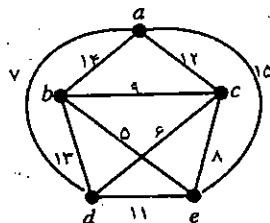
$$H = H \cup \{xy\} \text{ و } P = P \cup \{y\}$$

که به مجموعه H اضافه می شود.

۲-۳. $x \leftarrow y$ و به ابتدای مرحله ۱-۳ بازگشته و الگوریتم ادامه پیدا می کند.

۴. در آخرین مرحله $H = H \cup \{xa\}$ یالی است که اولین رأس انتخابی و آخرین رأس انتخابی را به هم وصل می کند.

مثال ۴-۴۸: با استفاده از قاعده نزدیک‌ترین همسایه، دور همیلتونی نیمه بهینه را برای گراف شکل ۴-۴۸ بیابید.



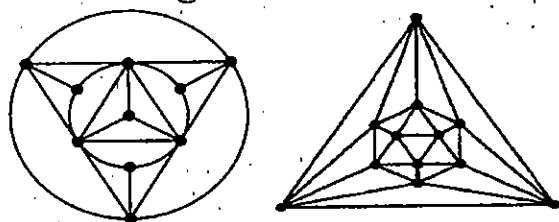
شکل ۴-۴۸

حل:

در ابتدا $P = \{a\}$ حال در ادامه، مراحل دور همیلتونی به صورت زیر است:

۷-۴- گراف مسطح

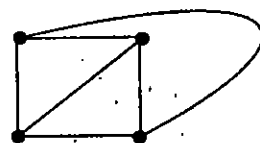
گراف مسطح: گراف $G=(V,E)$ را مسطح گوئیم، هرگاه بتوان آن را به گونه‌ای در صفحه رسم کرد که یال‌های آن (به جز در رئوس ابتدا و انتها) همدیگر را قطع نکنند. گراف‌های شکل ۴-۵۰، نمونه‌هایی از گراف‌های مسطح می‌باشند:



شکل ۴-۵۰

مثال ۴-۵۰: به وضوح گراف‌های K_3 ، K_4 و K_5 مسطح می‌باشند. می‌توان نشان داد که گراف K_6 نیز مسطح است؛ برای این منظور کافی است، نشان‌دهیم گراف K_6 با گراف شکل ۴-۵۱ یکریخت است (برعهده دانشجو).

G

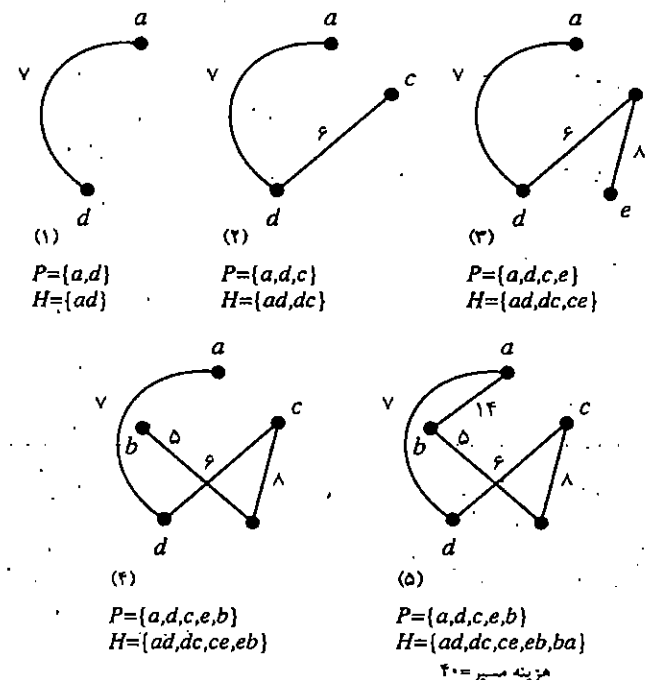


شکل ۴-۵۱

ناحیه (وجه): در ترسیم گراف مسطح، قسمتی از شکل که توسط تعدادی یال محصور شده است، ناحیه یا وجه می‌نامیم.

درجه ناحیه: طول کوتاه‌ترین گشت بسته دور تا دور مرز هر ناحیه را، درجه آن ناحیه می‌نامیم. درجه هر ناحیه را با $deg(R_i)$ نشان می‌دهند.

مثال ۴-۵۱: گراف زیر، دارای ۷ ناحیه داخلی $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$ و یک ناحیه خارجی R_8 می‌باشد؛ بنابراین گراف فوق، ۸ ناحیه دارد.



شکل ۴-۴۹

مثال ۴-۴۹: در یک فرآیند نیاز به n کامپیوتر متفاوت است (هر کامپیوتر وظیفه منحصر بفرد خود را انجام می‌دهد). کاری باید از طریق همه این کامپیوترها، نه به ترتیب خاص، به انجام برسد.

فرض کنید هر کامپیوتر یک رأس از گراف را نشان دهد. آن‌گاه هر مسیر همیلتونی در این گراف یک برنامه زمانی است. اگر C_{ij} زمان لازم برای رفتن کار از کامپیوتر i به j باشد، مسأله بهینه‌سازی عبارت است از، یافتن مسیری که کمترین مجموع هزینه‌های C_{ij} را داشته باشد.

►

☑ گزاره ۴-۴:

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی همبند و مسطح با $|R|$ ناحیه باشد. آن‌گاه داریم:

$$\sum_{i=1}^{|R|} \deg(R_i) = 2|E|$$

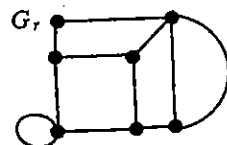
اثبات:

بنا به تعریف درجه، اگر یال معلق باشد، برای محاسبه درجه ناحیه، از روی آن ۲ بار عبور می‌کنیم. یال طوقه، ناحیه‌ای از درجه ۱ و یال‌های موازی ناحیه‌هایی از درجه ۲ به‌وجود می‌آورند؛ از طرفی هر یال دقیقاً روی مرز دو ناحیه قرار دارد، پس هر یال در مجموع درجه‌های نواحی، ۲ بار محاسبه می‌شود و بنابراین حکم ثابت می‌گردد.

☑ قضیه ۴-۱۳ (فرمول اویلر): فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی همبند و مسطح با $|V|$ رأس، $|E|$ یال و $|R|$ ناحیه باشد، در این صورت $|R| - |E| + |V| = 2$

اثبات در [۷] قضیه ۹-۷-۱ بیان شده است.

☞ مثال ۴-۵۳: فرمول اویلر را برای گراف‌های G_1 و G_2 اعمال کنید.



شکل ۴-۵۴

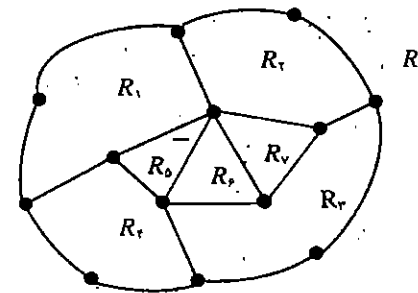
حل:

گراف G_1 :

$$|V|=5, |E|=7, |R|=2 \rightarrow |R| - |E| + |V| = 2$$

گراف G_2 :

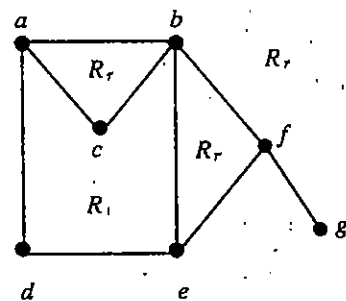
$$|V|=7, |E|=11, |R|=6 \rightarrow |R| - |E| + |V| = 2$$



شکل ۴-۵۲

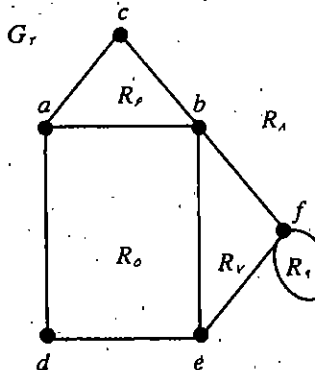
☞ مثال ۴-۵۲: دو گراف G_1 و G_2 را در نظر بگیرید. درجه هر ناحیه و مجموع درجه‌های نواحی هر گراف را بیابید.

G_1



شکل ۴-۵۳

G_2



حل:

$$G_1: \deg(R_1)=5$$

$$\deg(R_2)=7$$

$$\deg(R_3)=\deg(R_4)=3$$

$$G_2: \deg(R_0)=4$$

$$\deg(R_1)=\deg(R_2)=3$$

$$\deg(R_3)=7$$

$$\deg(R_4)=1$$

$$\sum_{i=1}^7 \deg(R_i) = 18$$

$$\sum_{i=0}^5 \deg(R_i) = 18$$

✓ قضیه ۴-۱۴: فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند و مسطح با حداقل ۳ رأس باشد، در این صورت $3|R| \leq 2|E|$ و $|E| \leq 3|V|-6$.
اثبات:

بنابراین تعریف درجه ناحیه و اینکه گراف ساده است، درجه هر ناحیه آن، حداقل ۳ می باشد. بنابراین:

$$2|E| = \sum_{i=1}^{|R|} \deg(R_i) \geq 3|R|$$

با توجه به فرمول اولر و رابطه فوق داریم:

$$|R|-|E|+|V|=2 \rightarrow 2=|R|-|E|+|V|=2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)|E|-|E|+|V| \rightarrow |E| \leq 3|V|-6$$

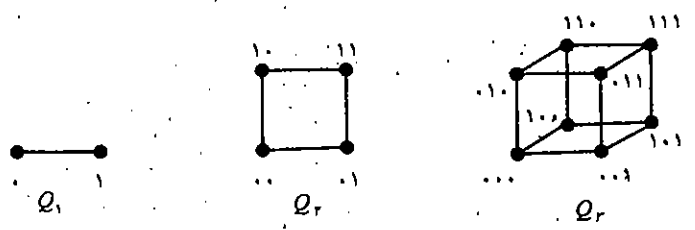
نتیجه:

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند با حداقل ۳ رأس و $|E| > 3|V|-6$ باشد، در این صورت گراف G نامسطح است.

✓ گزاره ۴-۵: فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند و مسطح باشد، در این صورت درجه رئوس گراف از ۵ تجاوز نخواهد کرد.
اثبات:

اگر گراف G دارای حداکثر دو رأس باشد، نتیجه بدیهی است. حال فرض کنید گراف دارای حداقل ۳ رأس باشد، طبق قضیه ۴-۱۴ داریم: $|E| \leq 3|V|-6$ ، پس $2|E| \leq 6|V|-12$. برهان خلف: فرض کنید درجه رئوس گراف حداقل ۶ باشد، بنابر قضیه ۴-۱۴ $\sum_{i=1}^{|V|} \deg(v_i) = 2|E|$ در نتیجه $2|E| \geq 6|V|$ و این با $2|E| \leq 6|V|-12$ تناقض دارد. بنابراین فرض خلف باطل است و درجه رئوس گراف ساده، همبند و مسطح حداکثر ۵ است.

■ گراف n -مکعب (Q_n): گرافی است که رئوس آن مشخص‌کننده 2^n رشته بیتی به طول n است. دو رأس در این گراف فقط در صورتی مجاور هستند که در یک بیت اختلاف داشته باشند.



شکل ۴-۵۵

گراف‌های Q_1, Q_2, Q_3 در شکل ۴-۵۵ نشان داده شده است. برای رسم Q_n می‌توان ۲ یار گراف Q_{n-1} را رسم کرد و دو رأس هم‌شماره را به هم متصل نمود. اگر برچسب رئوس L باشد، یک قسمت را تبدیل به L و قسمت دیگر را تبدیل به L نموده و اتصال رئوس طبق قاعده انجام می‌پذیرد.

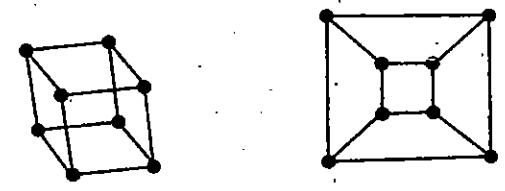
کلمه مثال ۴-۵۴: نشان دهید:

الف) گراف Q_n مسطح است.

ب) گراف‌های $K_{n,n}, K_{n,n-1}, K_{n,n-2}$ مسطح نمی‌باشند.

حل:

الف) همان‌طور که در شکل زیر مشاهده می‌شود، گراف Q_3 را می‌توان طوری رسم نمود که یال‌ها، همدیگر را به جز در رئوس قطع نکنند.



شکل ۴-۵۶

ب) گراف K_n گرافی ساده و همبند با ۱۰ یال و ۵ رأس است، بنابر نتیجه ذیل قضیه ۴-۱۴، داریم: $9 = 15 - 6 = 3|V| - 6 = 10 - 1 = |E| - 1$ ، پس گراف K_n مسطح نمی‌باشد.

برای نشان دادن نامسطح بودن گراف $K_{n,n}$ از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

فرض کنید گراف $K_{n,n}$ مسطح باشد، طبق تعریف گراف دوبخشی کامل، درجه هر ناحیه در ترسیم مسطح این گراف حداقل ۴ است. بنابراین:

$$\deg(R_i) \geq 4 \rightarrow 2|E| = \sum_{i=1}^{2|R|} \deg(R_i) \geq 4|R| \Rightarrow |E| \geq 2|R|$$

گراف $K_{n,n}$ ۶ رأس و ۹ یال دارد و طبق قضیهٔ اویلر $|R|=5$ از رابطهٔ بالا داریم: $9 = |E| > 2|R| = 10$ و این یک تناقض است. پس گراف $K_{n,n}$ نیز نامسطح است.

►

چند نمونه مسأله حل شده

۱. فرض کنید $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ موجود باشد، تعداد گراف‌های با l یال و n رأس را بیابید.

حل:

تعداد کل یال‌های قابل رسم با n رأس برابر است با: $\binom{n}{2}$ بنابراین انتخاب l یال از $\binom{n}{2}$ یال برابر است با $\binom{\binom{n}{2}}{l}$.

►

۲. فرض کنید $V = \{v_0, v_1, \dots, v_7\}$:

الف) با این رئوس چند گراف ساده می‌توان ساخت؟

ب) با این رئوس چند گراف ساده با ۳ یال می‌توان رسم نمود؟

ج) چند گراف ساده با ۴ یال که شامل یال v_1v_2 باشد، می‌توان رسم نمود؟

د) چند گراف ساده با ۴ یال که شامل یال v_1v_2 نباشد، می‌توان ساخت؟

ه) چند گراف ساده با ۴ یال می‌توان رسم نمود که شامل یال v_1v_2 باشد، ولی شامل v_1v_2 نباشد؟

و) چند گراف با ۴ یال می‌توان رسم نمود که شامل یال v_1v_2 باشد، ولی شامل رأس v_3 نباشد؟

حل:

الف) $2^{\binom{7}{2}} = 2^{21}$

ب) $\binom{\binom{7}{2}}{3} = \binom{21}{3}$

ج) از ۴ یال مذکور، یال v_1v_2 موجود است. پس باید به دنبال انتخاب ۳ یال دیگر بود. از مجموعهٔ کل یال‌های باقیمانده $\binom{7}{2} - 1 = 20$ ، پس $\binom{20}{3}$.

د) تعداد کل یال‌های موجود $\binom{7}{2} = 21$ است؛ بنابراین چون قرار است یال v_1v_2 نباشد، ۲۰ یال داریم و باید ۴ یال از ۲۰ یال موجود انتخاب کنیم $\binom{20}{4}$.

ه) کل یال‌های قابل انتخاب برابر ۲۱ است؛ چون قرار است یال v_1v_2 نباشد، بنابراین باید ۳ یال دیگر از ۲۰ یال انتخاب شود. از طرفی یال v_1v_2 نباید در یال‌های انتخابی

قرار گیرد؛ در نتیجه ۳ یال دیگر باید از بین $19-1=18$ یال دیگر انتخاب شود، در نتیجه: $\binom{19}{3}$

و چون رأس v_7 در گراف انتخابی نیست، بنابراین تعداد رئوس گراف برابر $6-1=5$ می‌باشد. بنابراین تعداد کل یال‌های انتخابی با ۶ رأس برابر $\binom{5}{2}=10$ است. چون قرار است یال v_1, v_7 باشد، بنابراین ۳ یال دیگر باید از بین $14-1=13$ یال انتخاب شوند، یعنی $\binom{13}{3}$.

۳. آیا امکان دارد در یک مهمانی که ۷ نفر حضور دارند، هر شخص با ۳ نفر دوست باشد؟

حل:

خیر. این به این معنی است که گرافی با ۷ رأس تشکیل شود و هر رأس دارای درجه ۳ باشد. بنابراین درجه تمامی رئوس فرد است و ۷ رأس از درجه فرد داریم. بنابه نتیجه ذیل قضیه ۴-۱، این ساختار گراف نمی‌باشد.

۴. اگر گرافی شامل یک رأس درجه ۵، ۲ رأس درجه ۳ و ۶ رأس درجه ۲ و n رأس درجه ۱ باشد و $|V|=|E|-1$ باشد، مقدار n را بیابید.

حل:

بنابر فرض مسأله: $|V|=1+2+6+n=9+n$ ، هم‌چنین:

$$\sum_{i=1}^{|V|} \deg(u_i) = 2|E| \Rightarrow 1 \times 5 + 2 \times 2 + 6 \times 2 + n \times 1 = 2|E| \Rightarrow 23 + n = 2|E|$$

$$|V| = |E| - 1 \Rightarrow |E| = |V| + 1$$

و از دو رابطه بالا داریم: $n=3$

۵. اگر K_n از K_{n-2} ، ۱۳ یال بیشتر داشته باشد، n را بیابید.

حل:

$$K_n: |E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$K_{n-2}: |E| = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$|E| = |E| + 13 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 13 \Rightarrow n=8$$

۶. نشان دهید در گراف r -منتظم رابطه زیر برقرار است.

$$|E| = \frac{r|V|}{2}$$

حل:

$$2|E| = \sum_{i=1}^{|V|} \deg(u_i) = \sum_{i=1}^{|V|} r = r|V| \Rightarrow |E| = \frac{r|V|}{2}$$

۷. دنباله گرافیکی: دنباله $d_n, d_{n-1}, \dots, d_2, d_1$ گرافیکی نامیده می‌شود، اگر آن دنباله درجه‌های یک گراف ساده باشد. با در نظر گرفتن شرایطی می‌توان با استفاده از دنباله گرافیکی، گراف ساده مورد نظر را ترسیم نمود. اگر $d_n, d_{n-1}, \dots, d_2, d_1$ دنباله گرافیکی گراف G با n رأس باشد؛ آن‌گاه:

(۱) رأس u_n که دارای بزرگ‌ترین درجه در دنباله $(\deg(u_n)=d_n)$ است را، در نظر بگیرید.

(۲) رأس u_n را حذف نموده، سپس یک واحد از d_n تا رأس بعدی کم می‌شود.

(۳) دنباله جدید به صورت نزولی مرتب و سپس مراحل ۱ و ۲ را برای دنباله گرافیکی جدید تکرار می‌شود، تا دنباله ساده‌ای حاصل شود که به راحتی قابل رسم باشد.

(۴) آخرین دنباله قابل رسم را، ترسیم نموده، سپس با یک حرکت پسر، مرحله به مرحله به عقب برگشته و رئوس حذف شده در هر مرحله به گراف اضافه نموده؛ با اضافه نمودن هر رأس، تعداد یال‌هایی متناسب با درجه آن رأس نیز به گراف اضافه می‌شود. گراف مرحله اول، همان گراف مورد نظر است.

آیا دنباله گرافیکی‌های زیر نمایانگر یک گراف ساده است؟

الف) $4, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0$

ب) $4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 0$

حل:

الف) خیر. بنا به نتیجه ذیل قضیه ۴-۱، تعداد رئوس با درجه فرد، زوج نیست، بنابراین این دنباله گرافیکی قابل رسم نمی‌باشد.

ب) مراحل رسم دنباله به ترتیب زیر می‌باشد:

۴, ۳, ۳, ۳, ۳, ۲, ۲, ۲, ۰

مرحله اول:

رأس ۴ حذف می‌شود، و از درجه ۴ رأس بعدی یک واحد کم می‌گردد:

۳, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۰

مرحله دوم:

در این مرحله اگر دنباله نیاز به مرتب شدن داشت، به صورت نزولی مرتب می‌گردد. سپس مرحله ۱ مجدداً برای دنباله جدید تکرار می‌شود. یعنی رأس ۲ حذف و از درجه دو رأس بعدی هر کدام یک واحد کم می‌شود:

۲, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۲, ۰

مرحله سوم:

دنباله را مرتب نموده و مجدداً مرحله ۱ تکرار می‌شود:

۲, ۲, ۲, ۲, ۱, ۱, ۰

۲, ۱, ۱, ۲, ۱, ۱, ۰

مرحله چهارم:

دنباله مرتب و مجدداً مرحله ۱ تکرار می‌شود:

۲, ۱, ۱, ۱, ۱, ۰

۲, ۰, ۰, ۱, ۱, ۰

مرحله پنجم:

پس از مرتب نمودن مجدد دنباله به صورت نزولی، مشاهده می‌شود که گراف قابل ترسیم است.

۱, ۱, ۰, ۰, ۰

بنابراین از آخرین مرحله، گراف رسم می‌شود.

گراف مرحله پنجم:

در این مرحله ۵ رأس یا درجه‌های ۱, ۱, ۰, ۰, ۰ رسم می‌شود:



شکل ۴-۵۷

گراف مرحله چهارم:

در این مرحله، گراف باید دارای ۶ رأس با درجه‌های رئوس ۲, ۱, ۱, ۱, ۱, ۰ باشد. برای این منظور کافی است به گراف قبلی، رأس حذف شده با درجه ۲ اضافه گردد. از آنجا که درجه این رأس ۲ است، ۲ یال جدید باید طوری به گراف اضافه شود که درجه رئوس گراف جدید ۲, ۱, ۱, ۱, ۱, ۰ باشد:



شکل ۴-۵۸

گراف مرحله سوم:

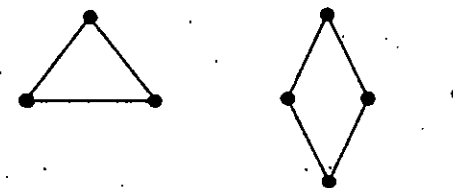
در این مرحله دنباله گرافیکی ۲, ۲, ۲, ۲, ۱, ۱, ۰ است که با اضافه شدن یک رأس با درجه ۲ به گراف مرحله قبل ایجاد می‌شود:



شکل ۴-۵۹

گراف مرحله دوم:

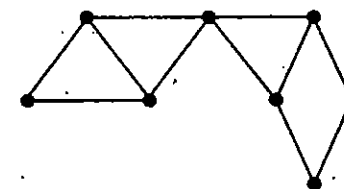
در این مرحله دنباله گرافیکی ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۰ است که با اضافه شدن یک رأس با درجه ۲ به گراف مرحله قبل ایجاد می‌شود:



شکل ۴-۶۰.

گراف مرحله اول:

در این مرحله دنباله گرافیکی $4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 0$ است که با اضافه شدن یک رأس با درجه ۴ به گراف مرحله قبل ایجاد می‌شود:



شکل ۴-۶۱.

۸ اگر گراف G ، 4 -منتظم و $|E| = 3|V| - 6$ آن گاه $|V|$ و $|E|$ را بیابید و آن را رسم نمایید.

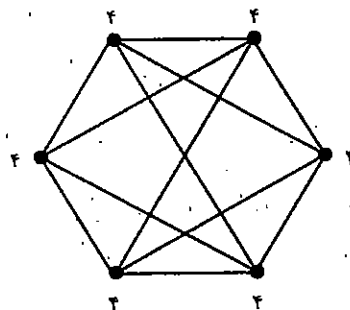
حل:

بنابه تمرین ۶ و فرض مسئله داریم:

$$|E| = \frac{r|V|}{2} = \frac{4|V|}{2} = 2|V|$$

$$|E| = 3|V| - 6 \Rightarrow |V| = 6, |E| = 12$$

حل:



شکل ۴-۶۲.

۹. نشان دهید با n رأس حداکثر چند گراف جهت‌دار می‌توان رسم نمود؟

حل:

تعداد یال‌های قابل رسم در گراف جهت‌دار برابر است با اندازه فضای $V \times V$ یعنی $|V \times V| = n^2$ ، بنابراین تعداد گراف‌های قابل رسم 2^{n^2} است.

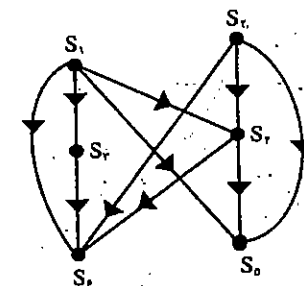
۱۰. برنامه‌های کامپیوتری به شرطی با سرعت بالا اجراء شوند که ترتیب عبارت‌های مرتبط باهم، رعایت شود. این عبارات را می‌توان با یک گراف جهت‌دار نشان داد، به‌طوری‌که متناظر با هر عبارت، یک رأس در گراف در نظر گرفته و یالی از رأس اول به رأس دوم موجود است هرگاه عبارت دوم قبل از عبارت اول نباشد. این گراف، گراف تقدم یا پرتوی نامیده می‌شود.

برنامه کامپیوتری زیر داده شده است. گراف تقدم آن را رسم نمایید.

$$S_1: a := 0 \quad S_2: b := 1 \quad S_3: c := a + 1$$

$$S_4: d := b + a \quad S_5: e := d + 1 \quad S_6: f := c + d$$

حل:



شکل ۲-۶۳

۱۱. ماتریس مجاورت گراف‌های G و G_1 داده شده است، آیا دو گراف یکریخت هستند یا خیر؟

(الف)

$$A_G = \begin{matrix} & e & f & g & h \\ \begin{matrix} e \\ f \\ g \\ h \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad A_{G_1} = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(ب)

$$A_G = \begin{matrix} & e & f & g & h \\ \begin{matrix} e \\ f \\ g \\ h \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad A_{G_1} = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

حل:

(الف) هر دو گراف دارای ۴ رأس، ۵ یال و دنباله درجه‌های ۲، ۳، ۳، ۲ هستند. تابع $f: G \rightarrow G_1$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(e)=d \quad f(f)=c \quad f(g)=b \quad f(h)=a$$

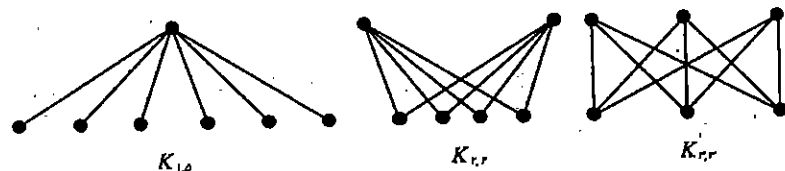
بنابراین، دوگراف یکریخت می‌باشند.

(ب) مطابق ماتریس مجاورت، در دوگراف، هر ۴ رأس دارای ۲ طوقه می‌باشند، هم‌چنین ستون اول، دوم و چهارم هر دو ماتریس یکسان است ولی ستون سوم آن‌ها

یکی نیست، پس تابعی یک به یک و پوشا با خواص مورد نظر نمی‌توان تعریف نمود، بنابراین دو گراف یکریخت نمی‌باشند.

۱۲. گراف‌های دوبخشی کامل و غیریکریخت $G=(V,E)$ با $|V|=6$ را بیابید.

حل:



شکل ۴-۶۴

۱۳. گراف G چهل یال و $\bar{G}$ (مکمل آن)، هشتاد یال دارد، مرتبه G را بیابید.

حل:

طبق تعریف گراف مکمل داریم: $\bar{G} \cup G = K_n$ ، پس $\bar{E} \cup E = \frac{n(n-1)}{2}$ طبق فرض مسئله، $\frac{n(n-1)}{2} = 120 = 40 + 80 = \frac{n(n-1)}{2}$ ، بنابراین $|V|=n=16$

۱۴. فرض کنید که G یک دور با n رأس باشد ($G=C_n$)، نشان دهید که G خودمکمل است اگر و تنها اگر $n=5$

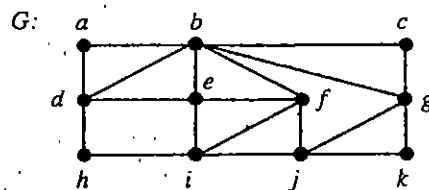
حل:

فرض کنید $G=C_n$ خود مکمل باشد، پس درجه هر رأس G و هر رأس $\bar{G}$ برابر ۲ می‌باشد، هم‌چنین $\bar{G} \cup G = K_n$ ، پس درجه هر رأس در K_n برابر است با $2+2=4$. بنابراین:

$$n-1=4 \Rightarrow n=5$$

حال فرض کنید G یک دور با $n=5$ رأس باشد ($G=C_n$). با بررسی حالت‌های مختلف G (مطابق شکل‌های مثال ۴-۴۵)، خود مکمل بودن G واضح است.

۱۸. در مورد گراف زیر:



شکل ۴-۶۵.

(الف) یک مدار اویلری ارائه دهید.

(ب) با حذف *de* از این گراف، گذر اولیه‌ی برای گراف باقیمانده را بیابید.

حل:

الف) درجه تمام رئوس زوج است، بنابراین مدار اولی‌ری دارد. مدار اولی‌ری فوق برابر است با:

$a, b, c, g, b, f, j, g, k, j, i, f, e, i, h, d, e, b, d, a$

(ب)

d, b, a, d, h, i, e, f, i, j, f, b, c, g, k, j, g, b

۱۹. به ازای چه مقادیری از n مدار K_n اویلری دارد؟

ح:

گرافنی مدار اوپلری دارد که درجه تمامی رئوس آن عددی زوج باشد، یعنی:

$$n-1 = 2k \rightarrow n = 2k+1, \quad n \geq r$$

بنابراین گراف کامل با مرتبه فرد اولری است.

۲۰. به ازای چه مقادیری از n K_n گذر'اویلری دارد، ولی مدار اویلری ندارد؟

حل:

برای $n=2$ به وضوح گذر اویلری وجود دارد و مدار اویلری ندارد. از طرفی یک گراف زمانی گذر اویلری دارد، که دقیقاً ۲ رأس آن درجه فرد باشد، ولی در K_n درجه رئوس

۱۵. نشان دهید در گراف خود مکمل G با n رأس، داریم: $4/n$ یا $4/(n-1)$.

حل:

طبق تعریف مکمل گراف، $|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2}$. بنا بر یکرختی دو گراف G و $\bar{G}$ داریم:

$|E| = |\bar{E}|$. بنابراین $|E| = |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2}$. پس $4/n$ یا $4/(n-1)$.

۱۶. در گراف ساده و همبند G با $|V|=n$ ، داریم: $|E| \geq (n-1)$.

حل:

با استقرار روی n ثابت می‌کنیم. برای $n=2$ و $|E|=1$ حکم برقرار است.

فرض می‌کنیم برای $2 < l < n$ ، حکم برقرار باشد. نشان می‌دهیم، حکم برای $l = n$

درست است.

یکی یال از گراف G حذف نموده، دو زیرگراف G_1 و G_2 به ترتیب با k_1 و k_2

رأس به دست می‌آید که در آن: $l = k_1 + k_r = n$.

بنا به فرض استقرای G_r و G_r به ترتیب دارای حداکثر $(k_r - 1)$ و $(k_r - 1)$ یال

می‌باشند، پس تعداد یال‌گرافِ ناهمبند حاصل‌شده حداکثر برابر $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) = n$

است؛ حال اگر یال حذف شده را به گراف اضافه نماییم گراف حاصل همبند و دارای

حداکثر $(n-1)$ یال می باشد؛ بنابراین حکم درست است.

۱۷. فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند و مسطح با حداقل ۳ رأس، به طوری که

حداقل گشت بسته در گراف، به طول ۴ باشد. در این صورت $4 \leq |E|$.

حل:

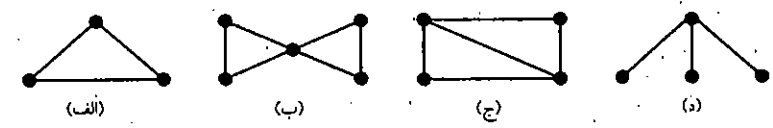
درجه هر ناحیه حداقل ۴ می باشد، زیرا حداقل گشت بسته در گراف، به طول ۴ است.

پس: $2|E| = \sum_{i=1}^{|R|} \deg(R_i) \geq 4|R|$ و بنابر قضیه اویلر داریم:

$$\gamma|E| \geq \gamma|R| = \gamma(|E| - |V| + \gamma) \Rightarrow |E| \leq \gamma|V| - \gamma$$

یا تماماً فرد یا تماماً زوج است. بنابراین در گراف‌های کامل K_n با $n \geq 3$ ، گذر اویلری وجود ندارد.

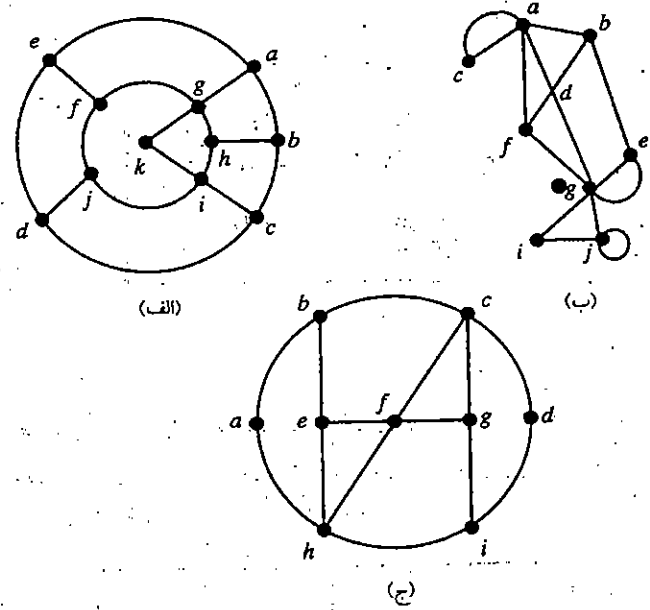
۲۱. مثالی از یک گراف همبند ارائه دهید که:
- (الف) دارای مدار اویلری و دور همیتونی باشد.
 - (ب) فقط دارای مدار اویلری باشد.
 - (ج) فقط دارای دور همیتونی باشد.
 - (د) دارای مدار اویلری و دور همیتونی نباشد.
- حل:



شکل ۴-۶۶

۲۲. در کدام یک از گراف‌های شکل ۴-۶۷، دور و مسیر همیتونی وجود دارد؟

- حل:
- گراف (الف) دارای دور همیتونی $e, a, b, h, g, k, i, c, d, j, f, e$ است.
- گراف (ب) دارای دور همیتونی نیست، ولی دارای مسیر همیتونی $i, j, g, e, b, d, f, a, c$ است.
- گراف (ج) دارای دور همیتونی $b, a, h, e, f, g, i, d, c, b$ است.

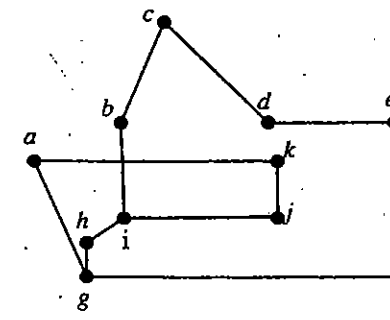


شکل ۴-۶۷

۲۳. آیا گراف شکل ۴-۶۸ اویلری است؟

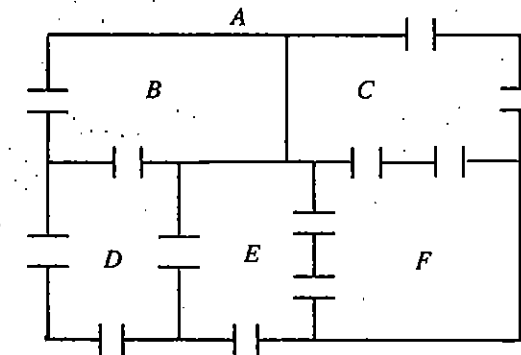
حل:

این گراف فاقد مدار اویلری است، زیرا درجه تمام رئوس آن زوج نیست. اما این گراف، گذر اویلری $ijkagfedcbihg$ را دارد.



شکل ۴-۶۸

۲۴. فرض کنید گراف زیر، نقشه مسطح یک ساختمان اداری باشد، آیا می‌توان در این ساختمان گشتی زد، به‌طوری‌که اگر از هر یک از اتاق‌ها یا بیرون ساختمان شروع کنیم، مطمئن باشیم که دقیقاً هر راه را فقط یکبار طی کرده‌ایم؟



شکل ۴-۶۹

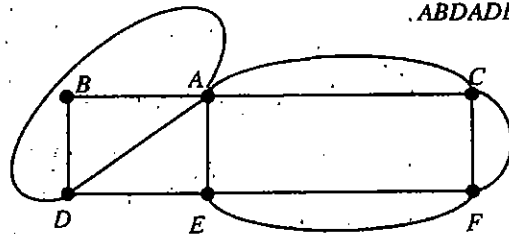
حل:

گراف حاصل از این نقشه را رسم می‌کنیم، به‌طوری‌که در آن هر رأس متناظر یک اتاق (رأس متناظر A فضای بیرونی ساختمان است) و هر یال متناظر با درب بین اتاق‌ها می‌باشد (شکل ۴-۷۰).

یک گشت در ساختمان، به‌طوری‌که از هر درب فقط یکبار عبور کند، متناظر با یافتن مدار اویلری در گراف حاصل می‌باشد. با توجه به گراف، چون درجه هر رأس

زوج است، چنین گشتی در ساختمان امکان‌پذیر است و عبارت است از:

ABDADEACFEFCA



شکل ۴-۷۰

۲۵. گراف شکل ۴-۷۱ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید این گراف دارای مسیر و دور همیتونی است.

ب) با استفاده از قاعده نزدیک‌ترین همسایه، دور همیتونی نیمه‌بهمینه را برای این گراف بیابید.

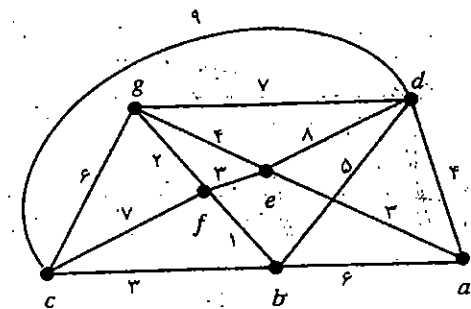
حل:

الف) تعداد رئوس گراف ۷ و دنباله درجه‌های رئوس گراف به ترتیب عبارت است از ۳، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۵. بنابراین قضیه‌های ۴-۹، ۴-۱۰، ۴-۱۱ و ۴-۱۲ گراف هم دارای مسیر همیتونی و هم دور همیتونی است. $abcfgdea$ یک دور همیتونی و $gdaefbc$ یک مسیر همیتونی گراف است.

ب) در ابتدا $P=\{g\}$ حال در ادامه، مراحل دور همیتونی به صورت زیر است:

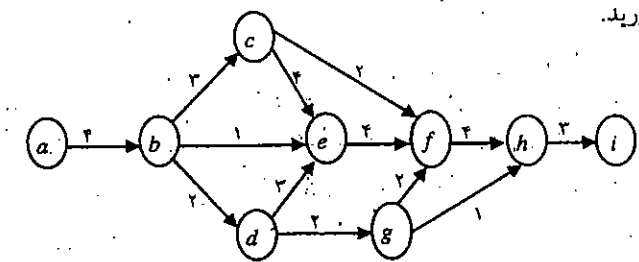
۲ = هزینه مسیر	$H=\{gf\}$	$P=\{gf\}$	(۱)
۳ = هزینه مسیر	$H=\{gffb\}$	$P=\{gf, b\}$	(۲)
۴ = هزینه مسیر	$H=\{gffb, bc\}$	$P=\{gf, b, c\}$	(۳)
۱۵ = هزینه مسیر	$H=\{gffb, bc, cd\}$	$P=\{gf, b, c, d\}$	(۴)
۱۹ = هزینه مسیر	$H=\{gffb, bc, cd, da\}$	$P=\{gf, b, c, d, a\}$	(۵)
۲۲ = هزینه مسیر	$H=\{gffb, bc, cd, da, ae\}$	$P=\{gf, b, c, d, a, e\}$	(۶)
۲۶ = هزینه مسیر	$H=\{gffb, bc, cd, da, ae, eg\}$	$P=\{gf, b, c, d, a, e, g\}$	(۷)

بنابراین طول کوتاه‌ترین دور نیمه‌بهمینه همیلتونی $H=\{gf,fb,bc,cd,da,ae,eg\}$ ۲۶ است.



شکل ۴-۷۱.

۲۶. گراف زیر مراحل انجام و زمان لازم (برحسب ماه) برای اجرای یک پروژه صنعتی را نشان می‌دهد. با استفاده از الگوریتم دی‌جکسترا، کوتاه‌ترین زمان اتمام پروژه را به‌دست آورید.



شکل ۴-۷۲.

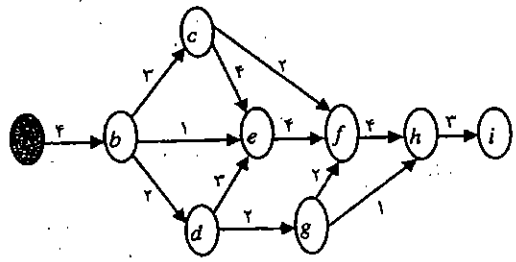
حل:

مرحله ۱:

در این مرحله رأس a انتخاب می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$P=\{a\}$$

$$T=\{b,c,d,e,f,g,h,i\}$$

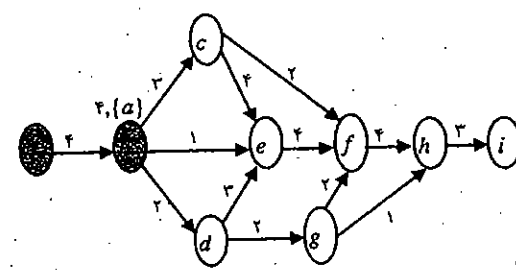


مرحله ۲:

با توجه به رئوس P تنها مسیری که از رأس a شروع شده و کوتاه‌ترین وزن را نسبت به رئوس مجموعه T دارند، عبارتست از: $ab=4$ پس:

$$P=\{a,b\}$$

$$T=\{c,d,e,f,g,h,i\}$$

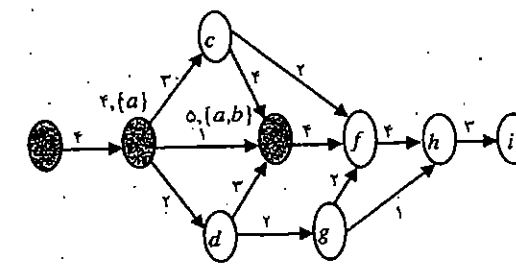


مرحله ۳:

با توجه به رئوس P مسیری که از رأس a شروع شده و یا از b می‌گذرد و کوتاه‌ترین وزن را نسبت به رئوس مجموعه T دارند، عبارتند از: $abc=7$ و $abd=6$ و $abe=5$ است. کوچک‌ترین مسیر مربوط به $abe=5$ است. بنابراین رأس e انتخاب می‌شود.

$$P=\{a,b,e\}$$

$$T=\{c,d,f,g,h,i\}$$

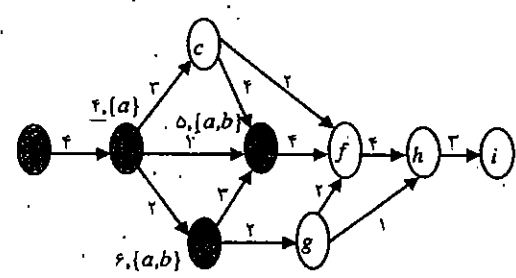


مرحله ۴:

مسیر رئوس P با دیگر رئوس مجموعه T محاسبه می‌شود. همان‌طور که در شکل مقابل مشخص است، کوچک‌ترین مسیر مربوط به رأس d است و فاصله آن ۶ است.

$$P=\{a,b,e,d\}$$

$$T=\{c,f,g,h,i\}$$

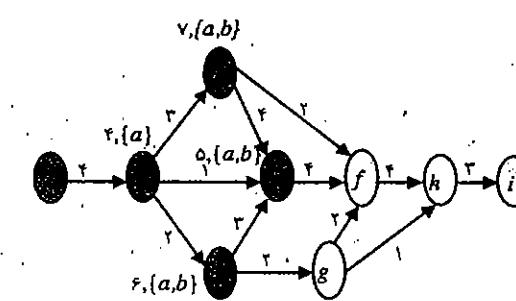


مرحله ۵:

همان‌طور که در شکل مقابل نشان داده شده است، انتخاب بعدی رأس c است.

$$P=\{a,b,e,d,c\}$$

$$T=\{f,g,h,i\}$$

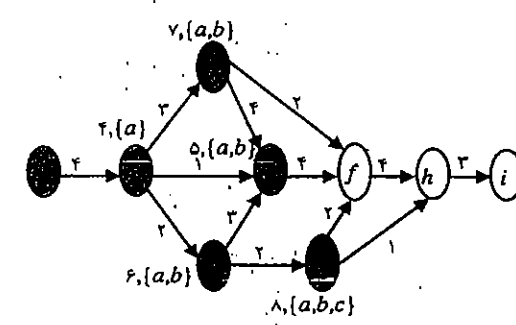


مرحله ۶:

انتخاب بعدی با توجه به مقادیر نشان داده شده در شکل، رأس g است.

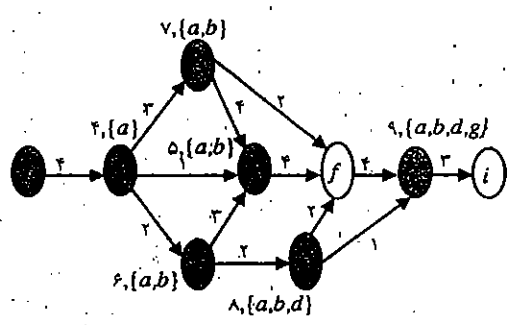
$$P=\{a,b,e,d,c,g\}$$

$$T=\{f,h,i\}$$



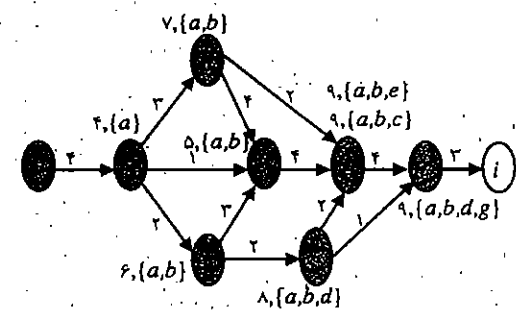
مرحله ۷:

این مرحله دو انتخاب داریم، رئوس f, h رأس h را انتخاب می‌کنیم.
 $P=\{a,b,e,d,c,g,h\}$
 $T=\{f,i\}$



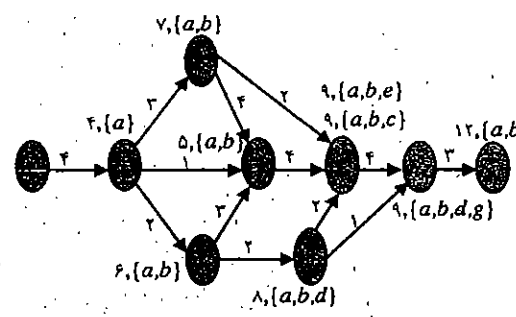
مرحله ۸:

انتخاب بعدی رأس f خواهد بود.
 $P=\{a,b,e,d,c,g,h,f\}$
 $T=\{i\}$



مرحله ۹:

آخرین انتخاب، رأس i خواهد بود.
 $P=\{a,b,e,d,c,g,h,f,i\}$
 $T=\{\}$



بنابراین کوتاه‌ترین زمان انجام پروژه با عبور از مسیر a,b,d,g,h,i طی ۱۲ ماه انجام خواهد شد.

۲۷. فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی n رأسی باشد و $|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2$ ، در این صورت G دارای دور همیتونی است.

حل:

فرض کنید a, b دو رأس دلخواه گراف و غیرمجاور باشند. زیرگراف $H=(W,E_1)$ را که در آن $W=V-\{a,b\}$ می‌باشد، تشکیل می‌دهیم؛ پس $|W|=|V|-2=n-2$ و $|E_1|=|E|-deg(a)-deg(b)$. همچنین H زیرگراف K_{n-2} نیز هست، پس $|E_1| \leq \binom{n-2}{2}$ و بنابر فرض داریم:

$$\binom{n-1}{2} + 2 \leq |E_1| + deg(a) + deg(b) \leq \binom{n-2}{2} + deg(a) + deg(b)$$

بعد از ساده کردن روابط داریم $deg(a) + deg(b) \geq n$ و بنابر قضیه ۱۲-۴ گراف دور همیتونی دارد.

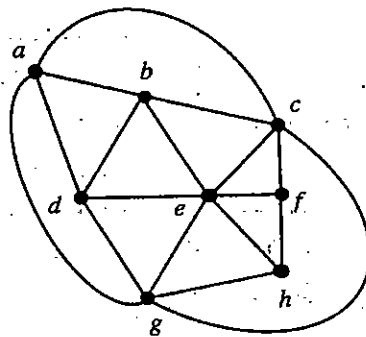


۲۸. رنگ آمیزی رأسی گراف: منظور از رنگ‌آمیزی رأسی گراف، نسبت دادن رنگ به رئوس گراف است، به طوری که هیچ دو رأس مجاوری، هم‌رنگ نباشند. حداقل تعداد رنگ لازم برای رنگ‌آمیزی گراف، عدد رنگی رأسی گراف نامند و با $\chi(G)$ نشان می‌دهند.

برای یافتن عدد رنگی یک گراف، الگوریتم ولج-پاول^۱ به شرح زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱. درجه‌های رئوس گراف به صورت نزولی مرتب می‌شود.
۲. رنگ ۱ به اولین رأس و رئوسی که با آن مجاور نیستند، نسبت داده می‌شود. در نظر داشته باشید، اگر رئوس غیرمجاور، خود مجاور یکدیگر باشند، یکی از آنها انتخاب می‌شود.
۳. تا زمانی که همه رئوس رنگ شوند، مرحله ۲ با رأس رنگ نشده بعدی تکرار می‌شود.

با استفاده از الگوریتم ولج-پاول عدد رنگی گراف شکل ۴-۷۳ را بیابید.



شکل ۴-۷۳

حل:

رئوس به ترتیب نزولی مرتب می‌شوند: e, c, g, a, b, d, f, h

- رأس e و رأسی که به آن وصل نیست، یعنی a انتخاب می‌شوند. به این دو رأس عدد رنگی ۱ نسبت داده می‌شود.
 - رأس بعدی (از جهت بزرگی درجه) c است. به این رأس و رئوسی که به آن وصل نیستند، یعنی d و h عدد رنگی ۲ نسبت داده می‌شود.
 - رأس بعدی انتخاب نشده در ترتیب نزولی، رأس g است. به این رأس و رئوسی که به آن وصل نیستند، یعنی b و f عدد رنگی ۳ نسبت داده می‌شود.
- بنابراین عدد رنگی گراف $\chi(G)=3$ می‌باشد.



۲۹. ثابت کنید: گراف ساده $G=(V,E)$ ، دوبخشی است اگر و فقط اگر بتوان به هر رأس گراف، یکی از دو رنگ متفاوت را نسبت داد، به طوری که هیچ دو رأس مجاوری، هم‌رنگ نباشند.

اثبات:

فرض کنید گراف $G=(V,E)$ ، دوبخشی با مجموعه رئوس V_1 و V_2 باشد، به طوری که $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ و $V=V_1 \cup V_2$. اگر رنگ اول را به مجموعه رئوس V_1 و رنگ دوم به مجموعه رئوس V_2 نسبت داده شود، بنا به تعریف گراف دوبخشی، هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نمی‌باشد.

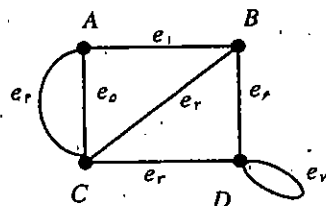
حال فرض کنید به هر رأس گراف، یکی از دو رنگ متفاوت، نسبت داده شده است، به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند.

قرار دهید V_1 برابر مجموعه رئوسی که رنگ اول و V_2 مجموعه رئوسی که رنگ دوم به آن‌ها نسبت داده شده است. پس $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ و $V=V_1 \cup V_2$. از طرفی هیچ دو رأس مجاوری در یک مجموعه قرار ندارد، پس یک رأس هر یال گراف در V_1 و رأس دیگر آن در V_2 قرار دارد. بنابراین گراف دو بخشی است.

تمرین‌های فصل

۱. گراف زیر را در نظر بگیرید.

الف) ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع آن‌را به دست آورید؟
ب) مسیرها به طول ۳ را بیابید.



۲. شکل هریک از گراف‌های چندگانه زیر را، رسم کنید که در آن

$$V=\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$

و

$$E=\{p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_1p_5, p_2p_3\}$$

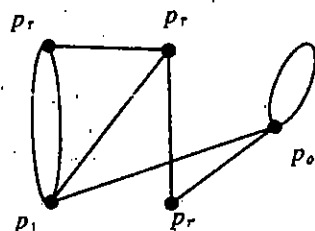
$$E=\{p_1p_1, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_1p_5, p_2p_3, p_3p_4\}$$

۳. فرض کنید در یک گراف $V=\{u,v,w\}$ و $\deg(v)=4$ است.

الف) آیا چنین گرافی وجود دارد؟ اگر جواب منفی است، دلیل آن را بیان کنید.

ب) آیا چنین گراف چندگانه‌ای وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، یک مثال بزنید.

۴. ویژگی‌ها و مشخصات گراف زیر را توضیح دهید.



۱۱. گرافی با n رأس رسم‌نمایید، به‌طوری‌که درجهٔ یک رأس آن $(n-1)$ و درجهٔ بقیه رئوس آن ۳ باشد.

۱۲. دو گراف ۳-متنظم با هشت رأس، رسم کنید.

۱۳. گراف مربوط به هریک از دنباله‌های گرافیکی زیر را، در صورت امکان رسم نمایید.

الف) $5, 5, 4, 3, 2, 1$

ب) $3, 3, 2, 2, 2, 2$

ج) $6, 5, 4, 3, 2, 1$

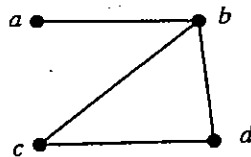
۱۴. نشان‌دهید تعداد یال‌های یک گراف دویخشی با n رأس، حداکثر $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ است.

۱۵. گراف G در شکل داده‌شده است. تعیین کنید آیا $H(V', E')$ زیرگراف G است یا خیر، که در آن:

الف) $E' = \{ab\}$ و $V' = \{a, b, c\}$

ب) $E' = \{ \}$ و $V' = \{b\}$

ج) $E' = \{ad, bc, bd\}$ و $V' = \{a, b, d\}$



۱۶. گرافی سؤال قبل را در نظر بگیرید. زیرگراف $H(V', E')$ از گراف G تولیدشده توسط:

الف) $V' = \{a, b, c\}$

ب) $V' = \{a, c, d\}$

ج) $V' = \{a, d\}$

را به دست آورید.

۵. در گرافی ۳-متنظم با n رأس و m یال، رابطهٔ $4m + 3n = 90$ برقرار است. مرتبه و اندازهٔ گراف را بیابید.

۶. با ۹ رأس:

الف) چند گراف با این رئوس می‌توان ساخت؟

ب) تعداد گراف‌های با ۵ یال چندتا است؟

ج) تعداد گراف‌های با حداکثر ۸ یال چندتا است؟

د) تعداد گراف‌های با ۶ یال که شامل یال ab و cd باشد، چندتا است؟

ه) تعداد گراف‌های با ۴ یال که شامل یال cd باشد و شامل رأس a نباشد، چندتا است؟

۷. گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید، نشان دهید رابطهٔ $\delta(G) \leq \Delta(G) \leq \frac{2m}{n}$ برقرار است که در آن $m = |E|$ ، $n = |V|$

۸. برنامهٔ کامپیوتری زیر را در نظر بگیرید:

الف) گراف تقدم آنرا رسم نمایید.

ب) با استفاده از قسمت الف)، ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع آنرا بیابید.

$S_1: x := 0$, $S_2: x := x + 1$, $S_3: y := 2$, $S_4: z := y$

$S_5: x := x + 2$, $S_6: y := x + z$, $S_7: z := 4$

۹. فرض کنید گرافی G با n رأس و m یال که درجهٔ هر رأس آن $d+1$ است. اگر p تعداد رئوس از درجهٔ d و q تعداد رئوس از درجهٔ $(d+1)$ باشد. نشان‌دهید:

الف) $p = (d+1)n - 2m$

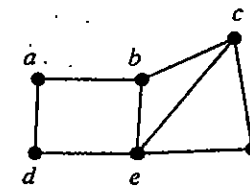
ب) $\frac{2}{p}$ یا $\frac{2}{q}$

۱۰. اگر گرافی ۷-متنظم G از گراف کامل متناظر خود (تعداد رئوس برابر)، ۲۴ یال کمتر داشته باشد، تعداد یال‌ها و رئوس G را بیابید و آنرا رسم نمایید.

۱۷. گراف G را در نظر بگیرید.

(الف) زیرگراف‌های $G-a$ ، $G-b$ و $G-c$ را به دست آورید.

(ب) زیرگراف‌های $G-ab$ و $G-be$ را به دست آورید.



۱۸. گرافی با ۵ رأس مثال بزنید که:

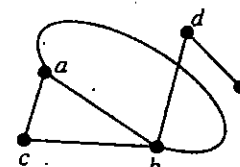
(الف) رأس برشی یا پل نداشته باشد.

(ب) ۲ رأس برشی داشته باشد.

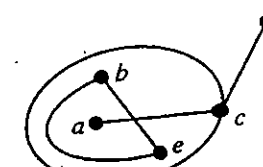
(ج) ۳ پل داشته باشد.

۱۹. تعیین کنید کدام یک از گراف‌های زیر همبند و کدام یک ناهمبند است و تعداد

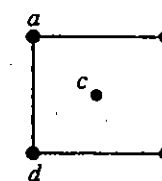
مؤلفه‌های همبندی را بیابید.



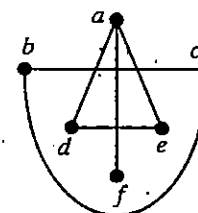
(ج)



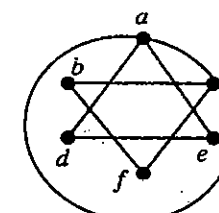
(ب)



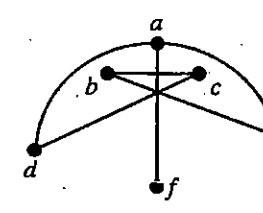
(الف)



(د)



(ه)



(ز)

۲۰. (الف) گراف‌های ساده نایکریخت و همبند با شرط $|V|+|E|=8$ را بیابید.

(ب) گراف‌های ساده نایکریخت و همبند با شرط $|V|+|E|=20$ را بیابید.

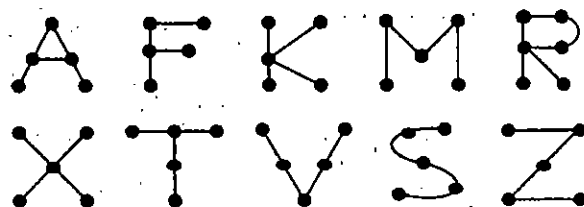
۲۱. گراف G دارای n رأس، m پل و d مؤلفه همبند است. نشان دهید: $m \geq n-d$.

۲۲. کدام یک از گراف‌های همبند، می‌تواند هم منظم و هم دوبخشی باشد؟

۲۳. نشان دهید اگر گرافی همبند نباشد، مکمل آن الزاماً همبند است.

۲۴. در شکل زیر، ده گراف که بصورت حروف رسم شده‌اند، نشان داده شده است. کدام

یک از این ده گراف با M یکریخت است؟

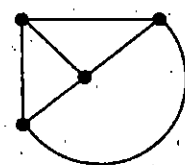


۲۵. آیا یک گراف متناهی می‌تواند با یکی از زیرگراف‌هایش (به جز خودش) یکریخت

باشد.

۲۶. نشان دهید کدام یک از گراف‌های زیر با یکی از گراف‌های $K_{1,2}$ ، $K_{1,3}$ و K_2

یکریخت است (با ذکر دلیل).



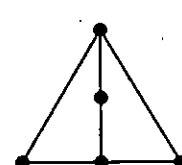
(ا)



(ب)

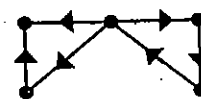


(ج)

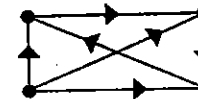


(د)

۲۷. تعیین کنید گراف‌های جهت‌دار زیر، کدام یک همبند قوی، همبند یک‌طرفه یا همبند ضعیف می‌باشند.



(ب)

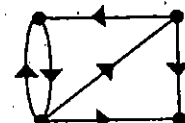


(الف)

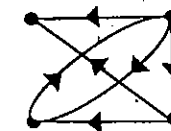
۲۸. دو گراف زیر را در نظر بگیرید.

(الف) ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع آن‌ها را بیابید.

(ب) آیا دو گراف پکریخت می‌باشند؟



(۲)



(۱)

۲۹. فرض کنید شکل زیر نمایش گراف G باشد. تعیین کنید که آیا هریک از دنباله

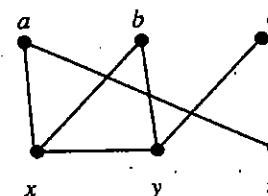
یال‌های زیر، تشکیل یک مسیر می‌دهند یا نه؟

(الف) $\{ax, xb, cy, yx\}$

(ب) $\{ax, xy, yz, za\}$

(ج) $\{xb, by, yc\}$

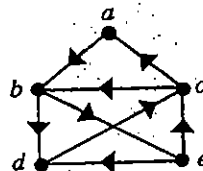
(د) $\{ax, by, xy\}$



۳۰. گرافی با شش رأس رسم کنید که همیتونی نباشد، اما اویلری نباشد.

۳۱. گرافی با شش رأس رسم کنید که همیتونی نباشد، اما اویلری باشد.

۳۲. آیا گراف زیر گذر اویلری دارد؟ مدار اویلری چطور؟



۳۳. (الف) اگر وزن هر یال یک گراف را K واحد ($K > 0$) افزایش دهیم، اندازه طول کوتاه‌ترین مسیر آن چه تغییری می‌کند؟

(ب) اگر وزن هر یال یک گراف را K واحد ($K > 0$) کاهش دهیم، با این شرط که K از کوچک‌ترین وزن گراف کوچک‌تر نباشد، اندازه طول کوتاه‌ترین مسیر آن چه تغییری می‌کند؟

۳۴. گراف $K_{m,n}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید:

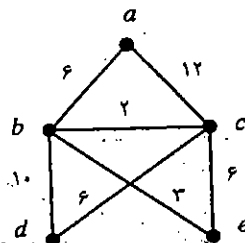
(الف) اگر $m=n+1$ ، آن‌گاه گراف دور همیتونی دارد.

(ب) اگر $|m-n| \leq 1$ ، آن‌گاه گراف مسیر همیتونی دارد.

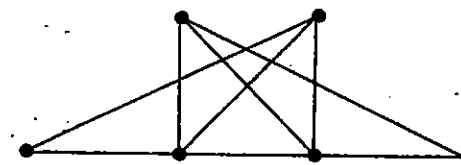
۳۵. گراف وزن‌دار G ، در زیر داده شده است.

(الف) کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس a و d را به دست آورید.

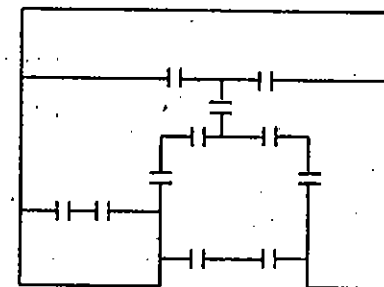
(ب) طول کوتاه‌ترین دور همیتونی را در صورت وجود، به دست آورید.



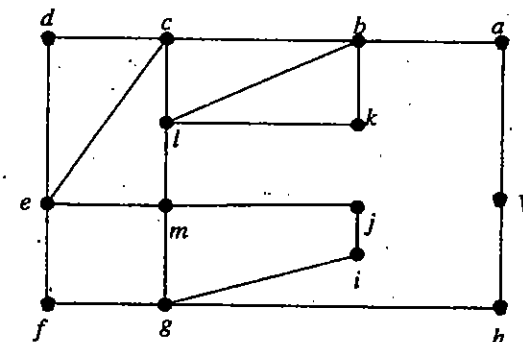
۳۶. گراف زیر را طوری رسم کنید که هیچ یک از یال‌هایش همدیگر را قطع نکنند.



۳۷. ساختمان موزه‌ای مطابق شکل زیر است. آیا می‌توان از بیرون موزه وارد شد و گشتی در موزه زد به طوری که از هر در فقط یکبار عبور نمود و مجدداً به خارج ساختمان موزه بازگشت؟



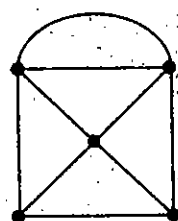
۳۸. فرض کنید گراف زیر نقشه مسطح خیابان‌های یک منطقه از شهر باشد. آیا می‌توان از نقطه V شروع کرد و از تمام خیابان‌ها فقط یکبار عبور نمود و مجدداً به V بازگشت؟



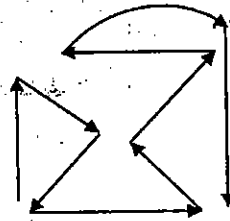
۳۹. فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند و مسطح با حداقل ۳ رأس باشد به طوری که حداقل گشت بسته در گراف، به طول ۵ باشد. در این صورت:

$$|E| \leq \frac{(5|V|-10)}{3}$$

۴۰. گراف چندگانه G را قابل پیمایش گویند، هرگاه بتوان گراف را بدون قطع منحنی و بدون تکرار هیچ یالی از آن رسم کرد؛ به عبارت دیگر، گشتی وجود داشته باشد که شامل تمام یال‌ها بوده و از هر یال فقط یکبار عبور کنند. پس گراف قابل پیمایش، همبند است. این گشت باید یک گذر باشد که به این ترتیب به آن گذر قابل پیمایش می‌گویند. در شکل زیر، قسمت (ب) گذر قابل پیمایش گراف چندگانه قسمت (الف) را نشان می‌دهد.

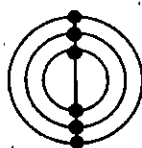


(الف)

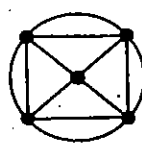


(ب)

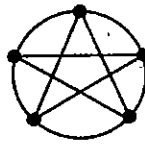
تعیین کنید کدام یک از گراف‌های زیر، قابل پیمایش می‌باشند.



(ج)



(ب)



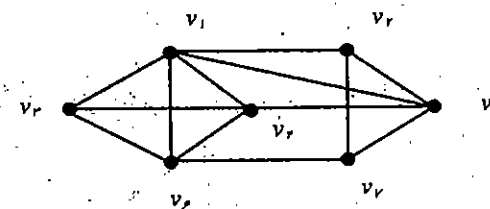
(الف)

۴۱. نشان دهید گراف چندگانه G با بیش از دو رأس فرد، قابل پیمایش نیست.

۴۲. در یک جلسه ۳۷ نفر شرکت دارند که دور یک میز دایره‌ای شکل می‌نشینند. آن‌ها مایل هستند بیشتر باهم آشنا شوند. لذا هر نفر مجاور دو نفر که روزهای قبل با هم نشسته‌اند، نمی‌نشیند. برای چند روز باید به این طریق عمل شود، قبل از اینکه دو نفر برای بار دوم مجاور هم نشسته باشند؟

۴۳. عدد رنگی گراف‌های C_n ، W_n و K_n را به دست آورید.

۴۴. گراف زیر را با استفاده از الگوریتم ولج-پاول رنگ‌آمیزی کنید.



فصل پنجم

درخت

اهداف:

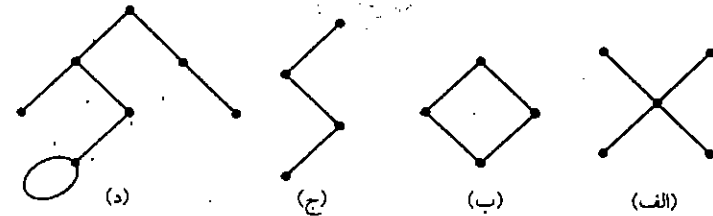
انتظار می‌رود در پایان این فصل دانشجو بتواند:

- مفهوم و ویژگی‌های درخت به عنوان یک نوع گراف را فراگیرد.
- درخت m تایی و دودویی را به خوبی فراگرفته باشد.
- نحوه پیمایش درخت را فرا گرفته باشد.
- درخت فراگیر و نحوه به دست آوردن آن را فراگرفته باشد.
- با درخت فراگیر مینیمم، کاربرد آن و روش به دست آوردن آن کاملاً آشنا شود.

۱-۵- درخت

تعریف درخت: گراف همبند و فاقد دور را درخت نامند. گراف درخت را با نماد $T(V, E)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱-۵: کدام یک از گراف‌های زیر درخت هستند؟



شکل ۱-۵

حل:

در این شکل (الف) و (ج) درخت هستند، اما (ب) و (د) درخت نیستند، زیرا دور دارند.

قضیه ۱-۵: اگر گراف T با $n > 1$ رأس و فاقد طوقه باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند:

- الف- T یک درخت است.
- ب- هر دو رأس متمایز a و b با یک مسیر منحصر بفرد به هم متصل می‌شوند.
- ج- T همبند است و $n-1$ یال دارد.
- د- T بدون دور است، به‌طوری‌که با اضافه نمودن یک یال جدید، یک دور در گراف ایجاد می‌شود.

اثبات الف ← ب

فرض کنیم T یک گراف درخت باشد در این صورت طبق تعریف درخت بین هر دو رأس دلخواه a و b یک مسیر وجود دارد. فرض کنیم بیش از یک مسیر بین a و b

وجود داشته باشد، در این صورت دور خواهیم داشت که متناقض با تعریف گراف درخت است.

• اثبات ب ← ج

برای اثبات از استقرا استفاده می‌کنیم.

اگر تعداد یال‌های درخت برابر $|E|=0$ باشد، در این صورت درخت تنها یک رأس دارد و رابطه برقرار است.

فرض کنیم برای درختی که حداکثر n رأس دارد رابطه درست باشد. ثابت خواهیم نمود این رابطه برای درختی با $n+1$ رأس نیز برقرار خواهد بود.

در درخت با $(n+1)$ رأس، فرض کنیم یال xy را از درخت حذف می‌نماییم. در نتیجه دو زیردرخت $T_1(V_1, E_1)$ و $T_2(V_2, E_2)$ بوجود خواهد آمد که در آن

$$|E| = |E_1| + |E_2| + 1$$

$$|V| = |V_1| + |V_2|$$

از آنجا که تعداد رئوس دو زیردرخت از n کوچک‌تر است و طبق فرض استقرا، رابطه برای دو درخت T_1 و T_2 برقرار است. در نتیجه:

$$|V| = |V_1| + |V_2| = |E_1| + 1 + |E_2| + 1 = (|E_1| + |E_2| + 1) + 1 = |E| + 1$$

• اثبات ج ← د

فرض کنیم T دارای دور باشد، یال‌هایی از گراف T حذف می‌کنیم که گراف حاصل مانند H همبند و فاقد دور باشد. فرض کنیم تعداد یال‌های حذف شده l باشد.

گراف H همبند و فاقد دور است، پس H درخت است. بنابراین: $|E_H| = |V_H| - 1$ در نتیجه: $|E_H| = n - 1 - l$

از طرف دیگر $|E_T| = |E_H| + l$ پس $|E_T| = n - 1 - l + l = n - 1$ ولی طبق فرض $|E_T| = n - 1$

بنابراین $l = 0$ است؛ به عبارت دیگر گراف T فاقد دور است.

• اثبات د ← الف

از آنجا که گراف T بدون دور است و با اضافه نمودن یال جدید، یک دور در گراف ایجاد می‌شود، بنابراین این گراف همبند نیز می‌باشد. طبق تعریف گراف همبند و بدون دور درخت نامیده می‌شود.

□ قضیه ۲-۵: ثابت کنید اگر T درختی باشد با $|V| > 1$ در این صورت حداقل دو رأس در V وجود دارد که درجه آن مساوی یک است.
اثبات:

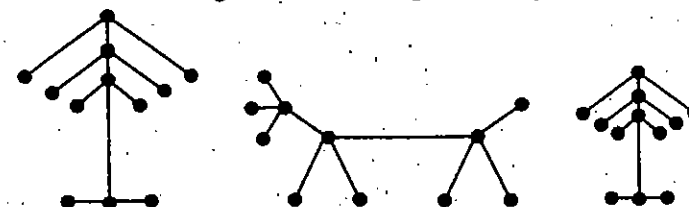
فرض کنیم $|V| = n \geq 2$ با توجه به قضیه ۱-۵، می‌دانیم که $|E| = n-1$ از طرفی داریم:
$$2(n-1) = 2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$
چون T همبند است، به ازای هر $v \in T$ داریم $\deg(v) \geq 1$ اگر درخت T کمتر از دو رأس با درجه مساوی یک داشته باشد، در این صورت:
(الف) یا به ازای هر $v \in V$ $\deg(v) \geq 2$ است
(ب) یا به ازای فقط یک رأس مانند $v^* \in V$ داریم $\deg(v^*) = 1$

در حالت (الف)، نامساوی $2(n-1) = \sum \deg(v) \geq 2|V| = 2n$ را خواهیم داشت که تناقض است.

در حالت (ب)، نامساوی $2(n-1) = \sum \deg(v) \geq 1 + 2(n-1)$ را خواهیم داشت که تناقض است.

□ جنگل: گراف فاقد دور، که از تعدادی مؤلفه همبند تشکیل شده باشد را جنگل گویند.

کج مثال ۲-۵: در شکل ۲-۵ جنگلی با سه درخت نمایش داده شده است.



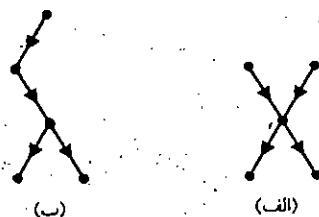
شکل ۲-۵

۲-۵-۲- درخت ریشه‌دار

□ درخت جهت‌دار: اگر T یک گراف جهت‌دار باشد، در این صورت T را درخت جهت‌دار گویند، هرگاه گراف بدون جهت وابسته به T (گراف بدون در نظر گرفتن جهت یال‌ها)، درخت باشد.

□ درخت ریشه‌دار: درخت جهت‌دار $\vec{T}$ را ریشه‌دار گویند، هرگاه رأس منحصر بفردی وجود داشته باشد که درجه ورودی آن صفر باشد و سایر رئوس دارای درجه ورودی یک باشد. رأس با درجه ورودی صفر را ریشه نامند.

کج مثال ۳-۵: در شکل ۳-۵، درخت (الف) ریشه‌دار نیست، زیرا دارای دو رأس با درجه ورودی صفر هستند. درخت (ب) یک درخت ریشه‌دار است.



شکل ۳-۵

توجه:

در درخت ریشه‌دار، جهت یال‌ها از بالا به پایین رسم می‌شود. جهت سهولت، در ادامه این فصل جهت یال‌ها در درخت ریشه‌دار رسم نخواهد شد.

۲-۵-۱- مفاهیم اولیه در درخت ریشه‌دار

در این بخش به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه پیرامون درخت ریشه‌دار پرداخته می‌شود.

□ برگ: رأسی که درجه خروجی آن صفر باشد، برگ درخت نامیده می‌شود.

❏ رأس داخلی: رأسی که درجه خروجی آن مخالف صفر باشد، رأس داخلی درخت نامیده می‌شود.

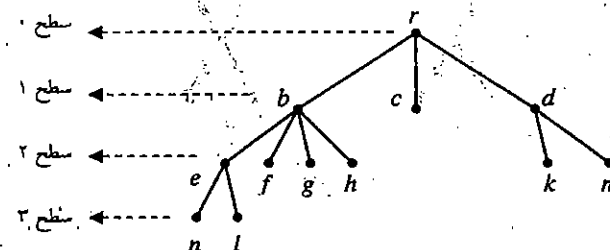
❏ سطح رأس: طول مسیر ریشه تا هر رأس را سطح آن رأس می‌نامند. بنابراین ریشه دارای سطح ۰ است.

❏ ارتفاع (عمق) درخت: بزرگ‌ترین شماره سطح رأس‌های یک درخت را ارتفاع (عمق) درخت می‌نامند.

❏ رأس پدر و فرزند: اگر مسیری به طول ۱ از رأس x به y وجود داشته باشد، رأس x را پدر رأس y و رأس y را فرزند رأس x می‌نامند.

❏ رأس همزاد: رئوسی که دارای یک پدر هستند، رئوس همزاد می‌نامند.

❏ مثال ۴-۵: درخت شکل ۴-۵ زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۴-۵

- ریشه این درخت، رأس r است.
- رأس‌های n, l, f, g, h, c, k, m برگ‌های درخت هستند.
- رئوس r, b, d, e رئوس داخلی هستند.
- رأس r در سطح ۰، رئوس b, c, d در سطح ۱، رئوس e, f, g, h, k, m در سطح ۲ و رئوس n, l در سطح ۳ قرار دارند.
- ارتفاع درخت برابر با بزرگ‌ترین شماره سطح رئوس، یعنی ۳ است.

- رأس r پدر رئوس b, c, d و رئوس b, c, d فرزندان رأس r هستند. همین رابطه پدر و فرزندی بین رأس b از یک طرف و رئوس e, f, g, h از طرف دیگر وجود دارد.
- رأس d نیز پدر رئوس k و m است و رئوس k و m فرزندان رأس d هستند.
- رأس e نیز پدر رئوس n و l است و رئوس n و l فرزندان رأس e هستند.
- رئوس b, c, d همزاد هستند. رئوس e, f, g, h نیز با یکدیگر همزاد هستند. همچنین رئوس n, l با یکدیگر و رئوس k, m با یکدیگر همزاد هستند.

❏ زیردرخت: در یک درخت، هر رأس و فرزندان آن رأس، زیردرخت نامیده می‌شود.

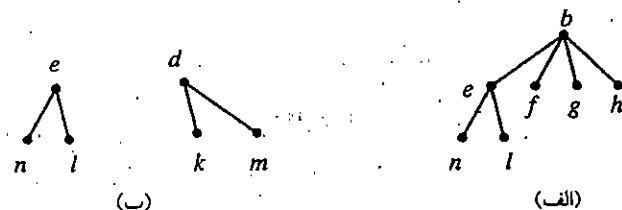
❏ مثال ۵-۵: در شکل ۵-۵ زیردرخت‌ها کدامند؟

حل:

خود درخت می‌تواند به عنوان یک زیردرخت با عمق ۳ در نظر گرفته شود.

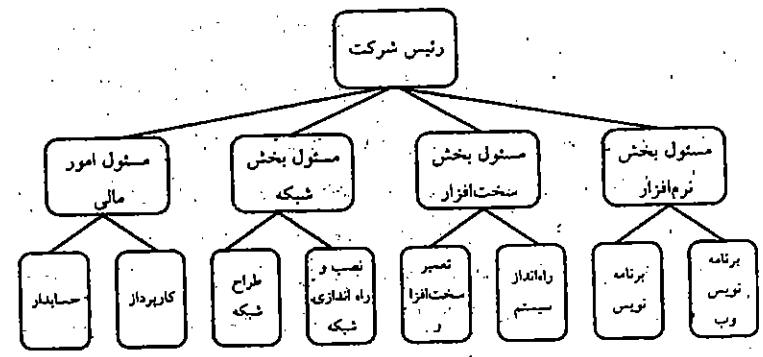
در شکل ۵-۵ (الف) زیردرخت با عمق ۲ نشان داده شده است. در این زیردرخت ریشه رأس b است.

زیردرخت‌های با عمق ۱ در شکل ۵-۵ (ب) نشان داده شده‌اند.



شکل ۵-۵

تمامی برگ‌های درخت به تنهایی، زیردرخت‌هایی به عمق ۰ می‌باشند که ریشه این زیردرخت‌ها خود برگ‌ها می‌باشند.



شکل ۵-۷

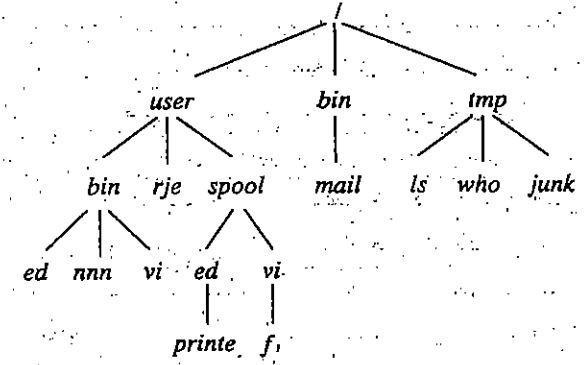
مثال ۵-۶: الگوریتم‌های که برای اجرای یک دستور در هر سیستم نوشته می‌شوند، الگوریتم‌های تریبی نامیده می‌شوند. در بسیار از مسائل پیچیده و پرحجم مانند تصویربرداری پزشکی، رمزنگاری و شبیه‌سازی استفاده از الگوریتم‌های تریبی پاسخگو نمی‌باشند. برای فائق آمدن بر محدودیت پردازش تریبی از پردازش موازی استفاده می‌شود. در پردازش موازی از کامپیوترهایی استفاده می‌شود که دارای بیش از یک پردازنده است و هر پردازنده‌ای مختص خود را دارد. در این سیستم‌ها، الگوریتم‌هایی موازی وظیفه شکستن برنامه به برنامه‌های کوچکتر برای اجرای موازی روی پردازنده‌های جداگانه را برعهده دارند. در این روش ممکن است، یک پردازنده نیاز به خروجی تولیدی پردازنده دیگری داشته باشد. یکی از روش‌های ارتباط بین پردازنده‌ها استفاده از ساختار درخت است.

به عنوان مثال فرض نماییم ۷ پردازنده در یک سیستم کامپیوتری وجود دارند که به صورت ساختار درختی (شکل ۵-۸) از اطلاعات یکدیگر استفاده می‌کنند و می‌توانند به صورت موازی اجرا شوند. اگر بخواهیم ۸ عدد $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ را با یکدیگر جمع نماییم، با استفاده از پردازش تریبی این عمل در ۷ مرحله انجام می‌گیرد. اما با استفاده از این ۷ پردازنده و پردازش موازی این عمل در ۳ مرحله انجام می‌گیرد؛ به این ترتیب که در مرحله اول x_1, x_2 توسط پردازنده p_1 توسط پردازنده p_5 و x_3, x_4 توسط پردازنده p_2 به صورت موازی با یکدیگر جمع می‌شوند. در مرحله دوم پردازنده p_1 حاصل جمع دو عدد حاصل از پردازنده‌های

۵-۳-۳ کاربرد درخت در مدل سازی

۵-۳-۳-۱ سازماندهی فایل‌های سیستم‌های کامپیوتری

فایل‌ها در فضای حافظه می‌توانند با استفاده از فهرست‌ها دسته‌بندی شوند. یک فهرست می‌تواند شامل فایل و یا زیرفهرست‌های دیگری باشد. بنابراین سیستم فایل در کامپیوتر می‌تواند از درخت ریشه‌دار برای سازماندهی فایل‌ها استفاده نماید. در این درخت، ریشه فهرست اصلی و مابقی رئوس زیرفهرست‌ها را نشان می‌دهند. برگ‌های این درخت فایل‌ها را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۵-۶ فایل f_1 در فهرست vi قرار دارد. و فهرست vi در فهرست $spool$ قرار گرفته است. به همین ترتیب فهرست $spool$ به عنوان یک زیرفهرست، در فهرست $user$ قرار گرفته است.

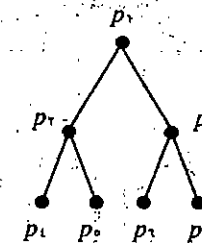


شکل ۵-۶

۵-۳-۳-۲ بازنمایی تشکیلات سازمانی

یکی از کاربردهای درخت مدل‌سازی تشکیلات سازمانی با استفاده از یک درخت ریشه‌دار است. در این روش هر رأس نمودار، یک موقعیت شغلی را نشان می‌دهد و ارتباط هر رئیس و زیرمجموعه او در قالب ارتباط پدر و فرزند ترسیم می‌شود. نمونه‌ای از نمودار تشکیلات سازمانی یک شرکت کامپیوتری در شکل ۵-۷ نشان داده شده است.

p_1 و p_5 و نیز پرازنده p_2 حاصل جمع دو عدد حاصل از پرازنده‌های p_6 و p_7 را به صورت موازی جمع می‌نمایند. در مرحله سوم پرازنده p_1 حاصل جمع دو پرازنده p_2 و p_3 را محاسبه می‌نمایند.

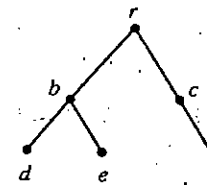


شکل ۸-۵

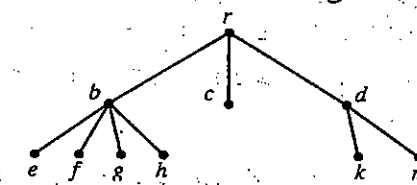
۴-۵- درخت m تایی و درخت دودویی

تعریف درخت m تایی: یک درخت ریشه‌دار را درخت m تایی نامند، هرگاه هر رأس حداکثر m فرزند داشته باشد.

کجه مثال ۷-۵: شکل ۹-۵ (الف). یک درخت ۴ تایی و شکل (ب) یک درخت دوتایی را نشان می‌دهد.



(ب)

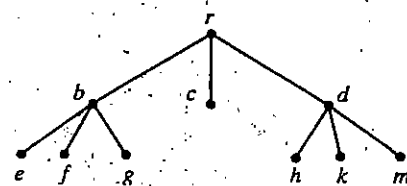


(الف)

شکل ۹-۵

تعریف درخت m تایی کامل: T_m درخت m تایی کامل است، هرگاه هر رأس داخلی آن دقیقاً m فرزند داشته باشد.

کجه مثال ۸-۵: شکل ۱۰-۵ یک درخت سه تایی کامل را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱

درخت دودویی: درخت دوتایی را درخت دودویی یا باینری (Binary) گویند. از آنجایی که در درخت دودویی حداکثر تعداد فرزندان هر رأس ۲ است، این فرزندان به نام فرزند چپ و راست نامگذاری می‌شوند.

۵-۵- شیوه‌های پیمایش درخت

در محاسبات مختلف یک درخت، لازم است ترتیبی اتخاذ شود که تمام رئوس درخت با نظم خاصی ملاقات شوند. ملاقات رئوس درخت با استفاده از روشی منظم، پیمایش نامیده می‌شود. در این بخش سه شیوه پیمایش پیش‌ترتیب، پیمایش میان‌ترتیب و پس‌ترتیب معرفی می‌شود.

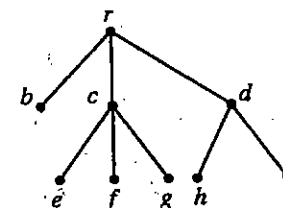
۵-۵-۱- پیمایش پیش‌ترتیب

فرض کنید درخت T با ریشه r وجود داشته باشد. اگر درخت T تنها شامل رأس r باشد، پیمایش پیش‌ترتیب درخت T خواهد بود. اگر $T_1, T_2, \dots, T_n$ زیردرختان رأس r به ترتیب از چپ به راست باشند، پیمایش پیش‌ترتیب با ملاقات رأس r شروع می‌شود. سپس با پیمایش پیش‌ترتیب T_1 سپس پیمایش پیش‌ترتیب T_2 و به همین ترتیب تا پیمایش پیش‌ترتیب T_n ادامه پیدا می‌کند؛ در حقیقت پیمایش پیش‌ترتیب به صورت زیر است:

۱. ریشه r را ملاقات کن.

۲. تمام فرزندان r را به ترتیب از چپ به راست به صورت پیش‌ترتیب پیمایش کن (اگر هر کدام از فرزندان دارای فرزند بودند، مراحل ۱ و ۲ برای آنها نیز اجرا می‌شود).

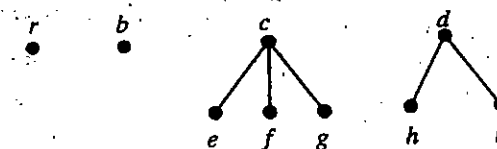
کجه مثال ۹-۵: پیمایش پیش‌ترتیب درخت زیر را بنویسید:



شکل ۱۱-۵

حل: در ابتدا ریشه یعنی r و سپس فرزندان به ترتیب از چپ به راست ملاقات (پیمایش) می‌شوند.

مراحل پیمایش پیش‌ترتیب به صورت زیر است:

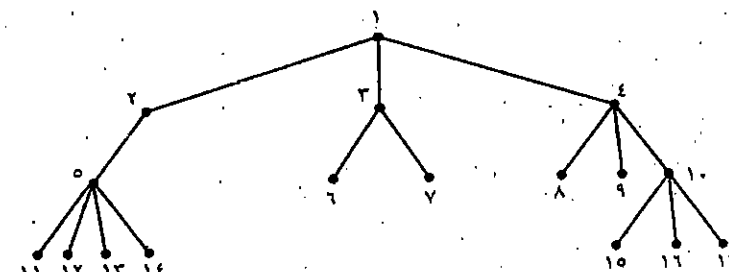


(الف)



(ب)

کدام مثال ۱۰-۵: پیمایش پیش‌ترتیب درخت شکل ۱۲-۵ را بنویسید:



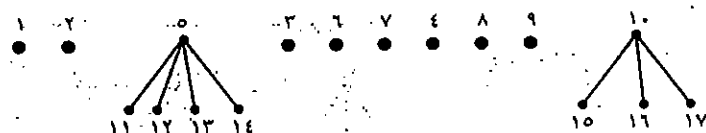
شکل ۱۲-۵

حل:

پیمایش پیش‌ترتیب برابر خواهد بود با:



(الف)



(ب)



(ج)

۵-۵-۲- پیمایش پس‌ترتیب

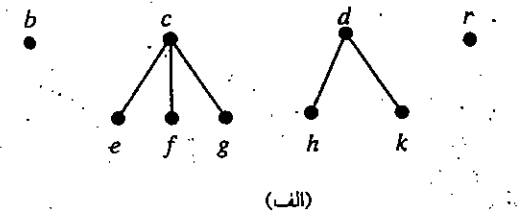
فرض کنید درخت T با ریشه r وجود داشته باشد، پیمایش پس‌ترتیب به صورت زیر است:

۱. تمام فرزندان r را به ترتیب از چپ به راست به صورت پس‌ترتیب پیمایش کن. (اگر هر کدام از فرزندان دارای فرزند بودند، مراحل ۱ و ۲ برای آنها نیز اجرا می‌شود).
۲. ریشه r را پیمایش کن.

کدام مثال ۱۱-۵: پیمایش پس‌ترتیب شکل‌های ۱۱-۵ و ۱۲-۵ را به دست آورید:

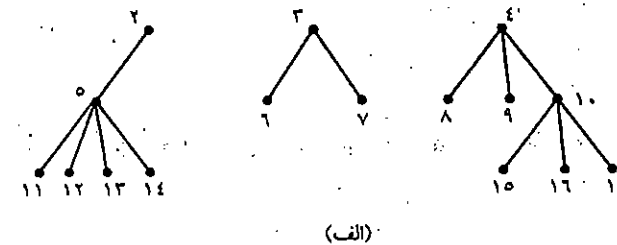
حل:

پیمایش پس‌ترتیب شکل ۱۱-۵ برابر است:



(ب)

پیمایش پس‌ترتیب شکل ۱۲-۵ برابر است با:



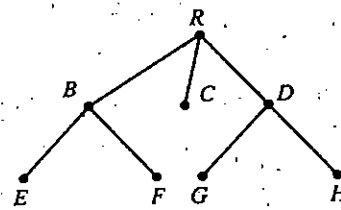
(ب)



۵-۳-۵-۵ پیمایش میان‌ترتیب

فرض کنید درخت T با ریشه r وجود داشته باشد. اگر درخت T تنها شامل رأس r باشد، پیمایش میان‌ترتیب درخت r خواهد بود. اگر $T_1, T_2, \dots, T_n$ زیردرختان رأس r به ترتیب از چپ به راست باشند، پیمایش میان‌ترتیب با ملاقات سمت چپ‌ترین زیردرخت (T_1)، سپس r و سپس پیمایش میان‌ترتیب مابقی زیردرختان ($T_2, \dots, T_n$) ادامه پیدا می‌کند.

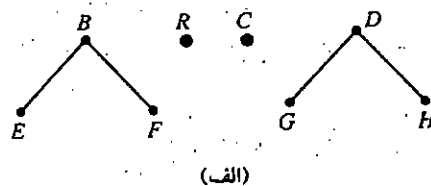
مثال ۵-۱۲: پیمایش میان‌ترتیب درخت دودویی زیر را بدست آورید:



شکل ۵-۱۲

حل:

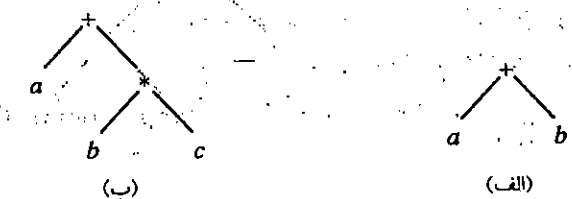
پیمایش میان‌ترتیب برابر است با:



۵-۶- نمایش عبارات ریاضی با استفاده از درخت دودویی

یکی از کاربردهای درخت، نمایش عبارات ریاضی است. به این ترتیب که عملگرها با استفاده از رئوس داخلی و عملوندها با استفاده از برگ‌ها نمایش داده می‌شوند.

که مثال ۵-۱۳: در شکل ۵-۱۴ قسمت (الف)، درخت معادل عبارت $a+b$ و قسمت (ب)، درخت معادل $a+b*c$ را به صورت دودویی نشان می‌دهد.



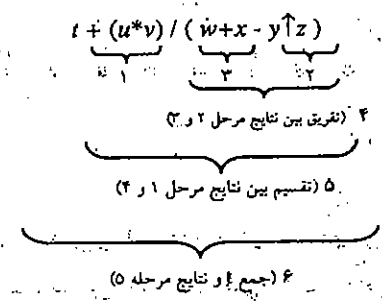
شکل ۵-۱۴

که مثال ۵-۱۴: درخت عبارت ریاضی $t + (u*v) / (w+x - y\uparrow z)$ را رسم نمایید (علامت $\uparrow$ نشان‌دهنده توان است).

حل:

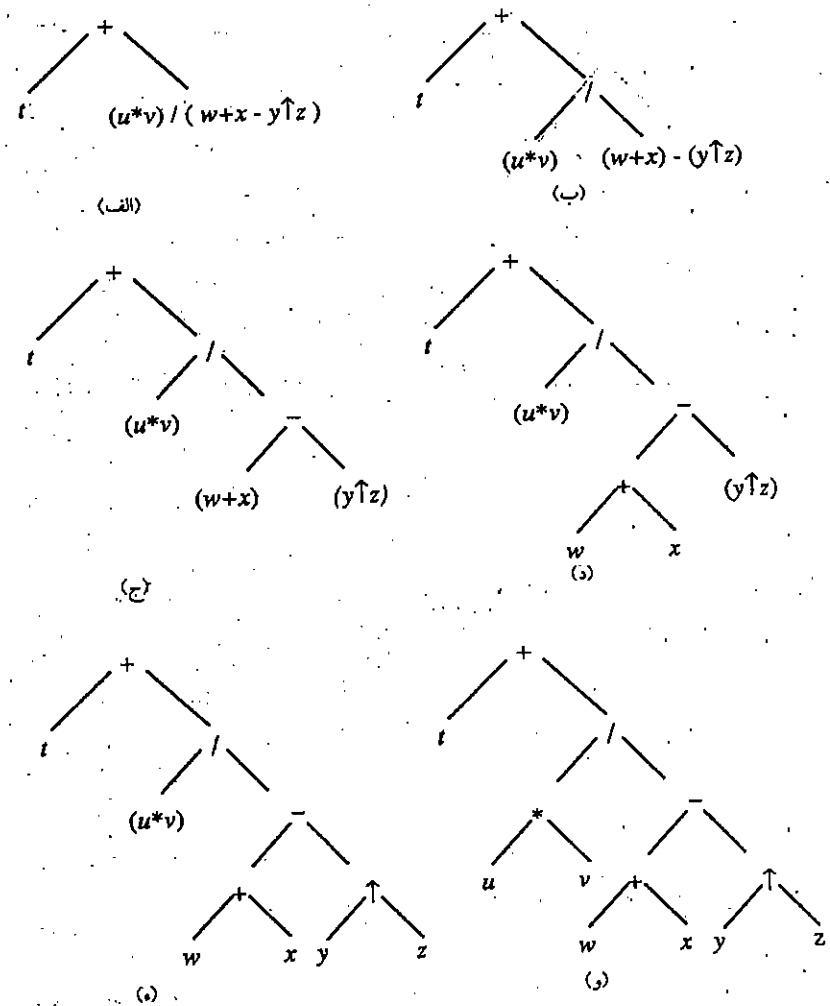
برای ترسیم درخت یک عبارت ریاضی، در ابتدا باید اولویت عملگرها را مشخص نمود. در عبارات ریاضی اولویت عملگرها به ترتیب عبارتند از پرانتز، عملگرهای یکنانی (علامت قرینه)، عملگرهای ضرب و تقسیم، عملگرهای جمع و منها. نکته‌ای که وجود دارد این است که پرانتزها در درخت قرار نمی‌گیرند و اولویت‌ها، ترتیب انجام عملگرها را مشخص می‌نمایند.

با توجه به این موارد، ترتیب انجام عملگرها در عبارت ریاضی مذکور عبارتند از:



شکل ۵-۱۵

ترسیم درخت به صورت پسرو، از آخرین اولویت شروع می‌شود.



الف. آخرین اولویت مربوط به جمع + است (که در شکل، با شماره ۶ نشان‌داده شده است). برای رسم درخت، عملگر + به عنوان ریشه و عملوند t به عنوان

فرزند چپ و عبارت حاصل از مرحله ۵ به عنوان فرزند راست در نظر گرفته می شود. درخت حاصل در شکل ۵-۱۵ (الف) نشان داده شده است. ب. در این مرحله اولویت شماره ۵ در نظر گرفته می شود؛ این اولویت حاصل تقسیم $(u \vee v)$ از یک طرف و $w+x$ از طرف دیگر است. درخت حاصل از این مرحله در قسمت (ب) از شکل ۵-۱۵ نشان داده شده است.

ج. در این مرحله با در نظر گرفتن اولویت شماره ۴، که حاصل تفریق $w+x$ از یک طرف و $z \wedge y$ از طرف دیگر است، شکل (ج) حاصل می شود.

د. اولویت بعدی شماره ۳ است که جمع w و x را انجام می دهد و نتیجه در قسمت (د) شکل ۵-۱۵ نشان داده شده است.

ه. با در نظر گرفتن محاسبه $z \wedge y$ در اولویت ۲، که در آن y به توان z می رسد، درخت (ه) نتیجه می شود.

و. اولویت اول مربوط به $u \vee v$ است که با ترسیم زیردرخت آن، نهایتاً درخت شکل ۵-۱۵ (و) حاصل خواهد شد.

۵-۶-۱- عبارات پیشوندی و پسوندی

با پیمایش پیش ترتیب و پس ترتیب یک درخت عبارت ریاضی، نمایش پیشوندی و پسوندی عبارات ریاضی حاصل خواهد شد.

در شکل پیشوندی، ابتدا عملگر و سپس عملوندها در عبارت ظاهر می شود. به عنوان مثال $ab+*$ یک عبارت پیشوندی است و نشان می دهد که عمل جمع روی دو متغیر a و b انجام می شود.

در عبارت پسوندی، عملگرها پس از عملوندها در عبارت ظاهر می شوند، به عنوان مثال عبارت پسوندی $ab+*$ نشان می دهد که a و b دو عملوند هستند که عمل $+$ روی آنها انجام می شود. در عبارت های پیشوندی و پسوندی پراتر وجود ندارد، زیرا اولویت عملگرها به همراه خودشان در عبارت ها همراه می شود.

ک. مثال ۵-۱۵: ترتیب انجام عملگرها در دو عبارت پسوندی $ab+c*$ و $abc+*$ را مشخص نمایند.

حل:

با پیمایش عبارت $ab+c*$ از سمت چپ به راست، مشاهده می شود که اولین عملگر پس از دو متغیر a و b عملگر $+$ می باشد. بنابراین عمل جمع روی دو عملوند a و b اعمال می شود. عملگر بعدی $*$ است. بنابراین عمل ضرب روی حاصل جمع a و b از یک طرف و c از طرف دیگر انجام می گیرد. بنابراین $ab+c*$ معادل عبارت $(a+b)*c$ است.

در عبارت $abc+*$ اولین عملگر از سمت چپ، عمل $+$ است که بر روی دو عملگر قبل از خود یعنی b و c انجام می گیرد. سپس عمل ضرب بر روی a از یک طرف و حاصل جمع b و c از طرف دیگر انجام می گیرد. بنابراین $abc+*$ معادل عبارت $a*(b+c)$ است.

بنابراین در نمایش پیشوندی و پسوندی، بدون استفاده از پراترگذاری و فقط با جابجا نمودن مکان عملگرها، اولویت محاسبات مشخص خواهد شد.

ک. مثال ۵-۱۶: عبارت ریاضی $(u \vee v) / (w+x-y \wedge z) + t$ را به صورت پیشوندی و پسوندی بنویسید.

حل:

درخت عبارت فوق، در شکل ۵-۱۵ (و) ترسیم گردید. با پیمایش پیش ترتیب و پس ترتیب این درخت، عبارت پیشوندی و پسوندی به صورت زیر حاصل خواهد شد: عبارت پیشوندی:

$$+t/(u \vee v)-(w+x \wedge yz)$$

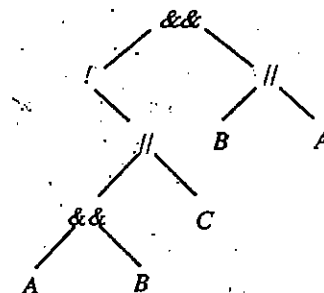
عبارت پسوندی:

$$+/(uv*wx+yz \wedge -)$$

ک. مثال ۵-۱۷: درخت عبارت ریاضی $((A \& \& B) / C) \& \& (B / A)$ را ترسیم و سپس عبارت پیشوندی و پسوندی آن را مشخصه نمایند (دقت نمایند $\& \&$ همان عمل AND و $//$ همان عمل OR و $!$ عمل نفیض است).

حل:

با تعیین اولویت‌ها و رسم درخت از آخرین اولویت، خواهیم داشت:



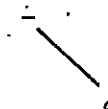
شکل ۵-۱۶

با پیمایش پیش‌ترتیب و پس‌ترتیب خواهیم داشت:

- عبارت پیشوندی: $AB C // B A$ && ! //
- عبارت پسوندی: $AB && C // ! B A // &&$

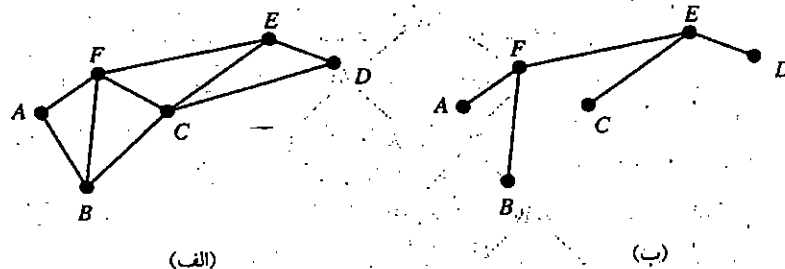
توجه:

در مورد عملگرهای یکانی، از آنجا که تنها یک فرزند وجود دارد، این سوال مطرح می‌شود که عملوند مربوطه به عنوان فرزند راست قرار گیرد یا فرزند چپ؟ از آنجا که با پیمایش میان‌ترتیب درخت عبارت می‌بایست همان عبارت ریاضی اولیه حاصل گردد؛ در نتیجه این عملوند باید به عنوان فرزند راست عملگر قرار گیرد. به عنوان مثال برای ترسیم درخت عبارت $a -$ (که عمل $-$ برای منفی کردن متغیر به کار رفته است)، به صورت زیر عمل می‌شود:



۵-۷- درخت فراگیر

شکل ۵-۱۷ (الف) نقشه جاده‌های ارتباطی شهرهای A, B, C, D, E, F را نشان می‌دهد:



شکل ۵-۱۷

یکی از وظایف راهدارها این است که در فصل زمستان مسیر ارتباطی بین شهرها را باز نگه دارند. از این رو راهدارها در هنگام بارش برف، طوری برنامه‌ریزی می‌نمایند که حداقل جاده‌های مواصلاتی بین شهرها برف‌روبی گردد.

از آنجایی که ۶ شهر وجود دارد، و باید ارتباط بین آن‌ها حفظ شود، بنابراین باید حداقل ۵ جاده برف‌روبی شود. با این تعریف، اگر هر شهر یک رأس در گراف باشد، با وجود ۵ یال و ۶ رأس و حفظ همبندی آن‌ها به یک درخت خواهیم رسید. که در شکل ۵-۱۷ (ب) نشان داده شده است. همانطور که در فصل ۴ بیان شد، به زیرگراف ۵-۱۷ (ب) که شامل همه رئوس گراف اصلی می‌شود، زیرگراف فراگیر گفته می‌شود.

☐ درخت فراگیر: زیرگراف T از گراف G را یک درخت فراگیر نامند. هرگاه T درخت بوده و تمامی رئوس گراف G را شامل باشد. به عبارت دیگر، زیرگراف فراگیری که درخت باشد، درخت فراگیر نامیده می‌شود.

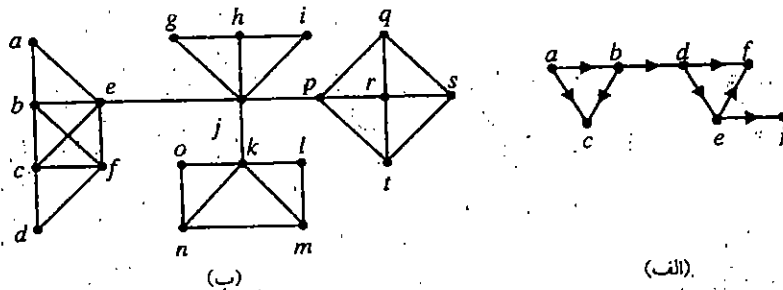
☑ قضیه ۵-۳: اگر گراف $G(V, E)$ گرافی بدون جهت باشد، آن‌گاه: G همبند است اگر و فقط اگر G درخت فراگیر داشته باشد.

اثبات:

اگر G درخت فراگیری مانند T داشته باشد، در این صورت به ازای هر دو رأس متمایز a و b مسیری منحصر بفرد از زیرمجموعه‌ای از یال‌های T وجود خواهد داشت، بنابراین G همبند است. برعکس اگر G همبند باشد ولی درخت نباشد، همه طوقه‌های G را

(۴) به ازای v_1 از v عقب‌گرد می‌کنیم. اگر u والد رأس نسبت داده شده به v در T باشد، در این صورت u را به v نسبت داده و به مرحله ۲ باز می‌گردیم.

مثال ۵-۱۸: برای گراف‌های زیر با شروع از رأس a یک درخت فراگیر (با استفاده از روش جستجوی اول عمق) به‌دست آورید. فرض کنید ترتیب حروف الفبا مدنظر است.



شکل ۵-۱۸

حل:

گراف (الف):

- اولین رأس انتخابی a می‌باشد، شکل ۵-۱۹(الف).
- رأس a دارای دو رأس مجاور b و c است، اما از آنجا که ترتیب تعیین شده حروف الفبا است، بعد از a رأس مجاور آن یعنی b انتخاب خواهد شد شکل ۵-۱۹(ب).
- بعد از رأس b رئوس مجاور آن که c و d هستند در نظر گرفته می‌شود و از آنجا که در ترتیب c پیش از d است، رأس c به‌عنوان رأس انتخابی بعدی خواهد بود شکل ۵-۱۹(ج).
- در مرحله بعد باید رئوس مجاور c در نظر گرفته شود؛ اما از آنجا که رأس مجاوری برای c وجود ندارد، یک رأس به عقب (یعنی b) برگشته و مراحل الگوریتم از رأس b ادامه پیدا می‌کند. در مورد رأس b تنها رأس مجاور ملاقات نشده d است که آن نیز انتخاب می‌شود؛ شکل ۵-۱۹(د).
- رئوس e و f با d مجاور هستند؛ بنابراین رأس انتخابی بعدی e خواهد بود؛ شکل ۵-۱۹(ه).

حذف می‌کنیم. اگر زیرگراف حاصل، یعنی G_1 ، درخت نباشد، در این صورت G_1 باید دوزی مانند C_1 داشته باشد. یالی مانند e_1 را از G_1 حذف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $G_2 = G_1 - e_1$. اگر G_2 دور نداشته باشد، در این صورت G_2 درخت فراگیری برای G است؛ زیرا G_2 شامل همه رئوس G است و هم‌چنین بی‌طوقه و همبند است. اگر G_2 حاوی دوری مانند C_2 باشد، در این صورت یالی مانند e_2 را از C_2 حذف می‌کنیم و زیرگراف $G_3 = G_2 - e_2 = G_1 - \{e_1, e_2\}$ را در نظر می‌گیریم. باز هم اگر G_3 دوری نداشته باشد، در این صورت درخت فراگیری برای گراف G خواهد بود. در غیر این صورت این فرآیند را به تعدادی متناهی از دفعات ادامه می‌دهیم تا به زیرگراف فراگیری از G برسیم که بی‌طوقه و همبند (و در نتیجه درخت فراگیری برای G) باشد.

برای ایجاد درخت فراگیر از یک گراف همبند دو روش جستجوی اول عمق (DFS) و جستجوی اول سطح (BFS) وجود دارد.

۵-۷-۱- درخت فراگیر با استفاده از روش جستجوی اول عمق

در این روش، ابتدا رئوس گراف طبق یک ترتیب اولویت‌بندی می‌شوند. این ترتیب می‌تواند حروف الفبا، شماره اعداد و یا هر ترتیب دیگری باشد.

الگوریتم ایجاد درخت فراگیر با استفاده از روش جستجوی اول عمق، عبارت است از:

- (۱) پیمایش از رأسی مانند v_1 آغاز می‌شود. v_1 را به v نسبت می‌دهیم و T را درخت متشکل از این یک رأس می‌گیریم. در این حالت v_1 ریشه درخت فراگیری خواهد بود که در حال گسترش است.
- (۲) کوچک‌ترین اندیس i که v_i را چنان برمی‌گزینیم که $v_i \in E$ و v_i قبلاً ملاقات نشده باشد. اگر چنین اندیسی یافت نشد، به مرحله ۳ می‌رویم. در غیر این صورت، اعمال زیر را انجام می‌دهیم:

(۱-۲) یال v_i به درخت اضافه می‌شود.

(۲-۲) v_i را به v نسبت می‌دهیم.

(۳-۲) به مرحله ۲ باز می‌گردیم.

(۳) اگر $v = v_1$ ، درخت T درخت فراگیر برای ترتیب مشخص شده است.

۵-۷-۲- درخت فراگیر با استفاده از روش جستجوی اول سطح

در این روش از ساختار داده‌ای صف استفاده می‌شود. صف فهرست مرتبی است که در آن اقلام داده شده از یک سمت فهرست (انتهای صف) در فهرست درج و از سمت دیگر (ابتدای صف) حذف می‌شوند. نخستین قلم داده‌ای که در صف وارد می‌شود، نخستین قلم داده‌ای است که از آن حذف می‌شود.

الگوریتم جستجوی اول سطح به صورت زیر است:

(۱) پیمایش از یک رأس v آغاز می‌شود. این رأس در صف Q اضافه می‌شود و درخت T متشکل از رأس v به عنوان ریشه تشکیل می‌شود.

(۲) رئوسی را به نوبت از ابتدای صف Q حذف می‌کنیم. وقتی رئسی مانند v حذف می‌شود، به ازای هر $v_1, v_2 \in E$ ، اگر یال $vv_1 \in E$ و $vv_2 \in E$ قبلاً ملاقات نشده باشد، این یال به T اضافه می‌شود. اگر همه رئوسی که قبلاً در Q بودند بررسی کنیم و یال جدیدی به دست نیاوریم، درخت T فراگیر مطلوب می‌باشد.

(۳) رئوس مجاور به هر یک از v ها (مرحله ۲) را طبق ترتیب ملاقات آن‌ها در انتهای صف Q درج می‌کنیم. سپس به مرحله ۲ باز می‌گردیم.

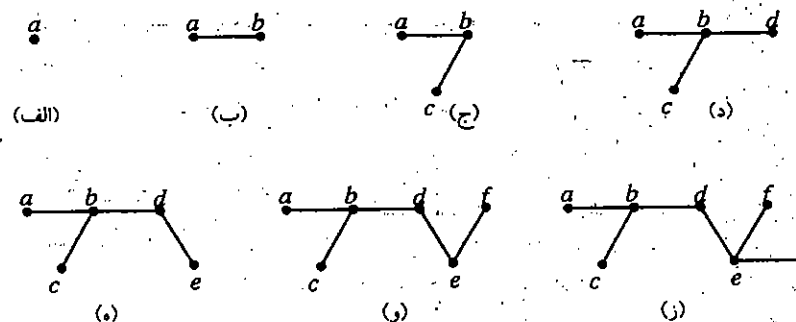
مثال ۵-۱۹: درخت فراگیر گراف شکل ۵-۱۸ (الف) را با استفاده از روش جستجوی اول سطح بدست آورید.

حل:

مراحل انتخاب رئوس به ترتیب است.

- در ابتدا رأس a انتخاب می‌گردد و در صف قرار می‌گیرد. همین رأس به عنوان ریشه درخت نیز در نظر گرفته می‌شود: $Q=\{a\}$ ، $T=\{a\}$ (سمت چپ ابتدای صف است)
- از صف حذف شده و تمامی رئوس مجاور رأس a به شرط اینکه دور ایجاد نشود، انتخاب می‌شوند. در این حالت هم b و هم c هردو قابل انتخاب می‌شوند. $Q=\{b, c\}$ و $T=\{a, b, c\}$
- الگوریتم با دو رأس b و c ادامه پیدا می‌کند:

- تنها رأس مجاور و ملاقات نشده e است، بنابراین f بعنوان رأس بعدی انتخاب می‌شود؛ شکل ۵-۱۹ (و).

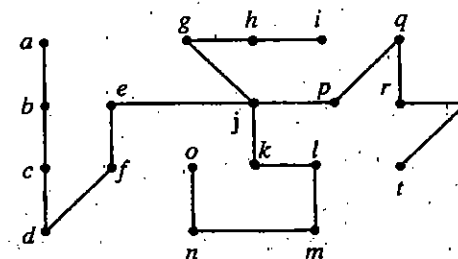


شکل ۵-۱۹

- پس از انتخاب رأس f باید به سراغ رأس مجاور آن رفت. از آنجا که f رأس مجاور ملاقات نشده دیگری ندارد، یک رأس به عقب برگشته و کار از e ادامه پیدا می‌کند.
- تنها رأس باقی‌مانده مجاور ملاقات نشده e ، رأس z است، این رأس نیز انتخاب می‌شود. با این انتخاب تمامی رئوس گراف ملاقات شده و هیچ دوری نیز تشکیل نگردیده است. درخت فراگیر حاصل در شکل ۵-۱۹ (ز) نشان داده شده‌اند.

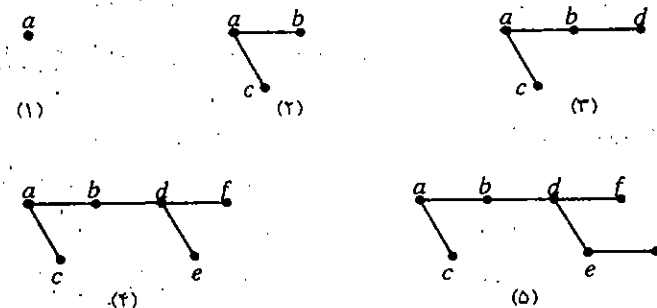
گراف (ب):

به همین ترتیب درخت فراگیر گراف (ب) به شکل زیر است:



شکل ۵-۲۰

- در مورد b رئوس مجاور c و d هستند. رأس c قبلاً انتخاب شده است، بنابراین d انتخاب می‌شود. $T=\{a,b,c,d\}$ و $Q=\{c,d\}$
 - رأی c از صف خارج می‌شود. رأس مجاور ملاقات نشده دیگری ندارد. $T=\{a,b,c,d\}$ و $Q=\{d\}$
 - رأس d دارای دو رأس مجاور ملاقات نشده f و e است. که هر دو انتخاب می‌شوند. $T=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $Q=\{e,f\}$
 - در مورد رئوس e و f
 - در مورد e تنها رأس ملاقات نشده، رأس i است که آن هم انتخاب می‌شود: $T=\{a,b,c,d,e,f,i\}$ و $Q=\{f,i\}$
 - در مورد f رأس مجاور انتخاب نشده‌ای وجود ندارد: $T=\{a,b,c,d,e,f,i,j\}$ و $Q=\{j\}$
- پس از مراحل فوق تمامی رئوس گراف ملاقات شده‌اند و $T=V$.
- مراحل فوق در شکل ۵-۲۱ نشان داده شده است.



شکل ۵-۲۱

توجه:

همان‌طور که از مثال ۵-۱۹ و ۵-۲۱ نتیجه گرفته می‌شود، درخت فراگیری که از روش جستجوی اول عمق و روش جستجوی اول سطح نتیجه می‌شوند، ممکن است متفاوت و غیریکریخت باشد.

کمال ۵-۲۰: موتورهای جستجوی صفحات وب، برای اینکه فهرستی از سایت‌های موجود ایجاد نمایند، از برنامه‌هایی به نام عنکبوت‌های وبی یا خزنده‌های وبی استفاده می‌نمایند. عنکبوت وب به پیمایش سایت‌های موجود و محتویات آن‌ها می‌پردازد. برای نمایش سایت‌ها و پیوند بین صفحات آن‌ها از گراف جهت‌داری استفاده می‌شود، که به آن گراف وب نیز گویند. در این گراف، صفحات وب، رئوس و پیوند بین صفحات، یال‌های گراف را تشکیل می‌دهند. عنکبوت وب با استفاده از روش جستجوی اول عمق یا جستجوی اول سطح، گراف وب را پیمایش و فهرست سایت‌ها را ایجاد می‌نماید.

با استفاده از روش جستجوی اول عمق، ابتدا یک سایت در فهرست قرار می‌گیرد. در مرحله بعدی پیوند این سایت به سایت دوم (در صورت وجود) در نظر گرفته می‌شود و سایت دوم نیز به فهرست اضافه می‌شود. به همین ترتیب پیوند سایت دوم به سایت سوم (در صورت وجود) دنبال می‌شود و سایت سوم نیز در فهرست قرار می‌گیرد. این مراحل تا جایی ادامه پیدا می‌کند که سایت جدیدی پیدا نشود. از آنجا که ممکن است به‌عنوان مثال پیوند به سایت B فقط در سایت A وجود داشته باشد، برای اطمینان از ملاقات تمام سایت‌ها، در هر مرحله از تکنیک برگشت نیز استفاده می‌شود.

با استفاده از روش جستجوی اول سطح، پس از انتخاب یک سایت به‌عنوان شروع و قراردادن نام سایت در فهرست، پیوند بین سایت اول و دوم (در صورت وجود) در نظر و سایت دوم نیز به فهرست اضافه می‌شود. سپس مجدداً سایت اول مورد بررسی قرار می‌گیرد که آیا پیوندی با سایت سوم در آن وجود دارد یا خیر. در صورت وجود، سایت سوم نیز به فهرست اضافه می‌گردد. پس از اتمام پیمایش پیوندهای موجود در سایت اول، پیوندهای موجود در سایت‌های دیگر مورد پیمایش قرار می‌گیرند.

۵-۸- درخت فراگیر میثیم

فرض کنید یک شرکت در نظر دارد یک شبکه ارتباطی (کانال کشی، مخابرات یا حمل و نقل) بین n شهر را به‌گونه‌ای برقرار نماید که همه شهرها با یکدیگر مرتبط گردند و

حل:

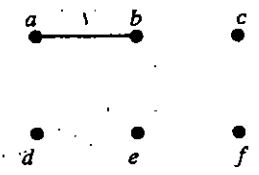
در ابتدا یال‌ها به ترتیب وزن مرتب می‌شوند:

یال	ab	ae	be	bc	ce	cf	ef	ad	de
وزن	۱	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴

حال یال‌ها به ترتیب از کمترین وزن انتخاب می‌شوند. این کار تا جایی ادامه پیدا می‌کند که تمامی رئوس انتخاب شوند؛ انتخاب‌ها باید به گونه‌ای باشد که دوری ایجاد نشود:

- در ابتدا مجموعه یال‌های انتخاب شده برای درخت T $E_1 = \{ \}$ در نظر گرفته می‌شود. سه یال با وزن ۱ وجود دارد، همانطور که در شکل ۵-۲۳ (الف) نشان داده شده است، یال ab انتخاب می‌شود. بنابراین $E_1 = \{ab\}$

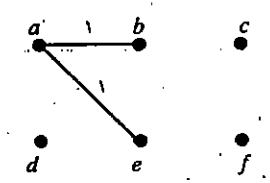
یال	ab
وزن	۱
انتخاب	✓



شکل ۵-۲۳ (الف).

- یال ae نیز دارای وزن ۱ است و انتخاب آن دوری ایجاد نخواهد نمود. بنابراین مطابق شکل ۵-۲۳ (ب) یال ae نیز به درخت اضافه می‌شود، خواهیم داشت $E_1 = \{ab, ae\}$

یال	ab	ae
وزن	۱	۱
انتخاب	✓	✓



شکل ۵-۲۳ (ب).

نیز جمع هزینه‌های ارتباطی کمترین مقدار ممکن باشد. مثالی از این دست می‌تواند با استفاده از الگوریتم درخت فراگیر مینیمم حل گردد.

📌 درخت فراگیر مینیمم: در یک گراف همبند وزن دار، درخت فراگیری که کمترین مجموع وزن‌ها را داشته باشد، درخت فراگیر مینیمم نامیده می‌شود.

الگوریتم‌هایی برای به دست آوردن درخت فراگیر مینیمم تعریف شده‌اند؛ که در این بخش دو الگوریتم کروسکال^۱ و پریم^۲ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۵-۸-۱- الگوریتم کروسکال

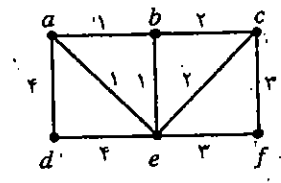
گراف $G(V, E)$ با n رأس را در نظر بگیرید ($|V|=n$). الگوریتم کروسکال به صورت زیر عمل می‌کند:

۱. تمام یال‌ها بر حسب وزن به صورت صعودی مرتب می‌شوند.
۲. درخت $T(V, E_1)$ با n رأس را در نظر بگیرید. در ابتدا $E_1 = \{ \}$
۳. عملیات زیر $n-1$ بار تکرار می‌شود:

- ۱.۳. یال $e \in E$ با حداقل وزن انتخاب می‌گردد. اگر این یال در درخت T ایجاد دور ننمود، این یال به درخت اضافه می‌گردد، یعنی $E_1 = E_1 \cup \{e\}$

اگر در گراف G چند یال دارای یک وزن باشند، در این صورت ترتیب یال‌هایی که انتخاب می‌شوند مهم نیست. می‌توان در این حالت ترتیبی مانند حروف الفبا یا اعداد در نظر گرفته شود.

📌 مثال ۵-۲۱: یک درخت فراگیر مینیمم برای گراف زیر با استفاده از روش کروسکال بدست آورید.

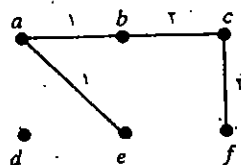


شکل ۵-۲۲

۱. Kruskal
۲. Prim

۳۰۷: درخت

یال	ab	ae	be	bc	ce	cf
وزن	۱	۱	۱	۲	۲	۳
انتخاب	✓	✓	×	✓	×	✓



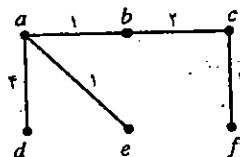
شکل ۵-۲۳ (د)

- انتخاب یال ef ایجاد دور می‌نماید، بنابراین این یال به درخت اضافه نمی‌شود.

یال	ab	ae	be	bc	ce	cf	ef
وزن	۱	۱	۱	۲	۲	۳	۳
انتخاب	✓	✓	×	✓	×	✓	×

- تا این مرحله، هنوز مجموعه رئوس انتخابی برابر کل رئوس گراف نیست، بنابراین بررسی یال‌های باقیمانده ادامه پیدا می‌کند. با اضافه کردن یال ad (با وزن ۴) به درخت، دوری ایجاد نمی‌شود. بنابراین مطابق شکل ۵-۲۳ (ه)، یال مذکور انتخاب می‌شود، در این مرحله $E_1 = \{ab, ae, bc, cf, ad\}$

یال	ab	ae	be	bc	ce	cf	ef	ad
وزن	۱	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴
انتخاب	✓	✓	×	✓	×	✓	×	✓



شکل ۵-۲۳ (ه)

- با بررسی مجموعه رئوس انتخابی مشاهده می‌شود تمامی رئوس گراف انتخاب شده‌اند، در نتیجه مابقی یال‌ها مورد بررسی قرار نمی‌گیرند.

یال	ab	ae	be	bc	ce	cf	ef	ad	de
وزن	۱	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
انتخاب	✓	✓	×	✓	×	✓	×	✓	...

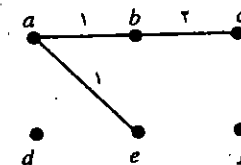
بنابراین مجموع وزن درخت فراگیر مینیمم برابر ۱۱ است.

- یال be دارای وزن ۱ است، اما با انتخاب آن در درخت دور ایجاد می‌شود. بنابراین یال مذکور به درخت اضافه نمی‌شود.

یال	ab	ae	be
وزن	۱	۱	۱
انتخاب	✓	✓	×

- یال bc دارای وزن ۲ است و انتخاب آن دوری در درخت ایجاد نخواهد نمود. بنابراین مطابق شکل ۵-۲۳ (ج) یال bc به درخت اضافه می‌شود. در این مرحله $E_1 = \{ab, ae, bc\}$

یال	ab	ae	be	bc
وزن	۱	۱	۱	۲
انتخاب	✓	✓	×	✓



شکل ۵-۲۳ (ج)

- انتخاب یال ce با وزن ۲، ایجاد دور می‌نماید، بنابراین این یال انتخاب نمی‌شود.

یال	ab	ae	be	bc	ce
وزن	۱	۱	۱	۲	۲
انتخاب	✓	✓	×	✓	×

- انتخاب یال cf با وزن ۳ دوری در درخت ایجاد نمی‌نماید. با اضافه نمودن این یال، درخت حاصل به شکل ۵-۲۳ (د) خواهد بود، بنابراین $E_1 = \{ab, ae, bc, cf\}$

۵-۸-۲- الگوریتم پریم

در الگوریتم کروسکال، انتخاب روی یال‌هاست. در الگوریتم پریم، تمرکز بر انتخاب رنوس است.

گراف $G(V, E)$ با n رأس را در نظر بگیرید ($|V|=n$). الگوریتم پریم به صورت زیر عمل می‌کند:

۱. درخت $T(V_1, E_1)$ را در نظر بگیرید. در ابتدا $E_1 = \{\}$ و $V_1 = \{v_1\}$.

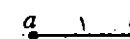
۲. عملیات زیر را $n-2$ بار تکرار کنید تا کلیه رأس‌های گراف به درخت T اضافه شوند:

۱.۲. از بین یال‌های انتخاب نشده، یال $e = v_i v_j$ (به‌طوری‌که $v_i \in V_1$ و $v_j \notin V_1$ یعنی یکی از رنوس یال مذکور در V_1 باشد)، که دارای کمترین وزن بوده و در درخت ایجاد دور نمی‌کند، انتخاب می‌شود. این یال و رأس مربوطه به مجموعه یال‌ها و رنوس درخت اضافه می‌شوند ($E_1 = E_1 \cup e$ و $V_1 = V_1 \cup v_j$).

مثال ۵-۲۲: یک درخت فراگیر مینیمم برای گراف شکل ۵-۲۲ با استفاده از روش پریم بدست آورید.

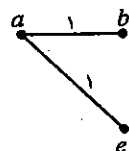
حل:

• از رأس a شروع و این رأس انتخاب می‌شود. مجموعه رنوس انتخابی برای درخت T در این مرحله $V_1 = \{a\}$ است. حال تمامی یال‌هایی که به رنوس مجموعه V_1 متصل هستند و دوری ایجاد نمی‌کنند، در نظر گرفته می‌شوند. از بین این یال‌ها، یال با کمترین وزن انتخاب می‌شود. در اینجا یال‌هایی که به a متصل هستند یال‌های ab و ae با وزن ۱ می‌باشند، با توجه به ترتیب حروف الفبا (یک اولویت باید در نظر گرفته شود) یال ab انتخاب می‌شود. بنابراین $V_1 = \{a, b\}$ و $E_1 = \{ab\}$.



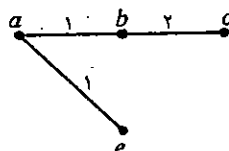
شکل ۵-۲۲ الف.

• در این مرحله تمامی یال‌هایی که به رنوس $V_1 = \{a, b\}$ وصل هستند مورد بررسی و یال با کمترین وزن انتخاب می‌شود. یال‌هایی که به این دو رأس متصل هستند عبارتند از ae, ad, bc, be (توجه نمایید ab در مرحله قبل انتخاب شده است و در این مرحله در نظر گرفته نمی‌شود). یال ae و be هر دو کمترین وزن را دارند، با در نظر گرفتن ترتیب حروف الفبا در این مرحله ae انتخاب می‌شود. بنابراین لیست رنوس درخت T برابر می‌شود با $V_1 = \{a, b, e\}$ و $E_1 = \{ab, ae\}$.



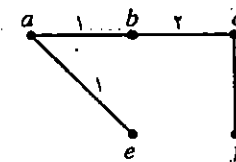
شکل ۵-۲۲ ب.

• تمامی یال‌هایی که به رنوس $\{a, b, e\}$ متصل‌اند در نظر گرفته می‌شود و یالی که کمترین وزن دارد انتخاب می‌شود. در این مرحله بین یال‌های ad, be, ec, ed, ef یال bc انتخاب می‌شود. رنوس و یال‌های انتخابی برای درخت T تا این مرحله برابر $V_1 = \{a, b, c, e\}$ و $E_1 = \{ab, ae, bc\}$ می‌باشد.



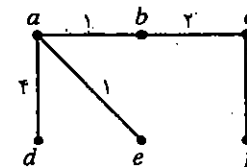
شکل ۵-۲۲ ج.

• از بین یال‌های متصل به رنوس $\{a, b, c, e\}$ یال cf به عنوان یال با کمترین وزن و ایجاد دور نمی‌کند، انتخاب و رنوس درخت برابر خواهند بود با $V_1 = \{a, b, c, e, f\}$ و $E_1 = \{ab, ae, bc, cf\}$.



شکل ۵-۲۴ (د).

- از بین یال‌های متصل به $\{a, b, c, e, f\}$ یالی که کمترین وزن را داشته باشد و دور ایجاد ننماید. یال ad است، که با انتخاب این یال تمامی رئوس گراف در درخت قرار خواهند گرفت یعنی درخت فراگیر مینیمم تشکیل خواهد شد و $V_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $E_1 = \{ab, ae, bc, cf, ad\}$ بنابراین از بررسی سایر یال‌ها صرف‌نظر می‌شود.



شکل ۵-۲۴ (ه).

همان‌طور در شکل ۵-۲۴ (ه) نمایش داده شده است، مجموع وزن درخت فراگیر مینیمم برابر ۱۱ است.

چند نمونه مسأله حل شده

۱. گراف ساده، غیر جهت‌دار و بدون دور $G(V, E)$ از ده مولفه همبند که هر کدام یک درخت است، تشکیل شده است. اگر مجموع درجه‌های رئوس گراف G برابر ۱۰۰ باشد، در این صورت تعداد رئوس گراف را به دست آورید.

حل:

یال‌ها و رئوس مولفه i را با $G_i(V_i, E_i)$ نشان می‌دهیم. مجموع درجه‌های رئوس یک گراف برابر با دو برابر تعداد یال‌های آن است. بنابراین:

$$2|E_1| + 2|E_2| + \dots + 2|E_{10}| = 100$$

از طرف دیگر می‌دانیم در هر درخت $|E| = |V| - 1$ بنابراین:

$$2(|V_1| - 1) + 2(|V_2| - 1) + \dots + 2(|V_{10}| - 1) = 100$$

$$\Rightarrow 2(|V_1| + |V_2| + \dots + |V_{10}|) - 20 = 100 \Rightarrow |V| = 60$$

۲. درخت T به گونه‌ای است که درجه هر رأس آن ۴ یا یک است. اگر درخت مزبور دارای n رأس باشد از درجه ۴ باشد، در این صورت چند رأس از درجه ۱ در آن وجود خواهد داشت؟

حل:

فرض کنیم n رأس از درجه ۴ و m رأس از درجه ۱ وجود داشته باشد. در یک گراف مجموع درجه‌های رئوس، ۲ برابر تعداد یال‌های آن گراف می‌باشد، بنابراین:

$$4n + m = 2|E| \quad (1)$$

از طرف دیگر در درخت داریم که تعداد رئوس یکی بیشتر از تعداد یال‌ها است:

$$|E| = |V| - 1 = n + m - 1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 4n + m = 2m + 2n - 2 \Rightarrow 2n + 2 = m$$

۳. درختی با ۱۰ رأس را در نظر بگیرید. حداقل تعداد مسیرهای موجود در این درخت را پیدا نمایید.

حل:

در درخت با n رأس، بین هر دو رأس آن یک مسیر منحصریافت وجود دارد، بنابراین تعداد همه مسیرها برابر $\binom{n}{2}$ است. بنابراین در این درخت تعداد مسیرها برابر است با:

$$\binom{10}{2} = 45$$

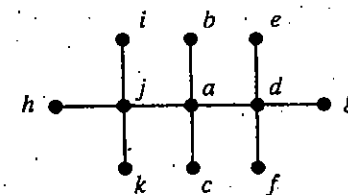
۴. عبارت پیشوندی و پسوندی عبارت $a/(b-c+d)*(e-a)*c$ را به دست آورید.

حل:

پیشوندی: $**/a+-bcd-eac$

پسوندی: $abc-d+/ea-*c*$

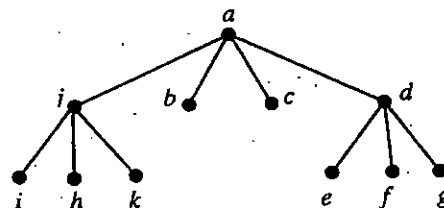
۵. درخت شکل ۲۵-۵ (الف) زیر را به صورت درخت ریشه دار، با انتخاب a به عنوان ریشه رسم نمایید.



شکل ۲۵-۵ (الف).

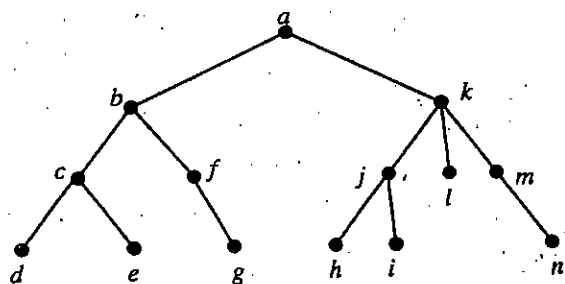
حل:

برای ترسیم درخت ریشه دار، اگر a ریشه در نظر گرفته شود، تمامی رئوسی که به a مسیر به طول ۱ دارند (b, c, d, e, f) به عنوان فرزندان a در نظر گرفته می‌شوند. حال از رئوس باقیمانده، هر کدام از رئوس که دارای مسیر به طول ۱ با رئوس انتخابی هستند به عنوان فرزندان در نظر گرفته می‌شوند. این مراحل تا انتخاب تمامی رئوس ادامه پیدا می‌کند. درخت حاصل به شکل زیر خواهد بود.



شکل ۲۵-۵ (ب).

۶. پیمایش میان‌ترتیب، پیش‌ترتیب و پس‌ترتیب را برای درخت شکل ۲۶-۵ به دست آورید.



شکل ۲۶-۵

حل:

پیمایش میان‌ترتیب: $d, c, e, b, f, g, a, h, j, i, k, l, m, n$

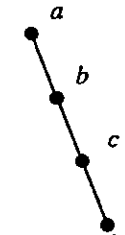
پیمایش پس‌ترتیب: $d, e, c, g, f, b, h, i, j, l, n, m, k, a$

پیمایش پیش‌ترتیب: $a, b, c, d, e, f, g, k, j, h, i, l, m, n$

۷. درخت ریشه داری رسم نمایید که پیمایش میان‌ترتیب و پیش‌ترتیب آن با هم برابر باشند.

حل:

در درخت زیر پیمایش میان‌ترتیب و پیش‌ترتیب برابر $abcd$ است.



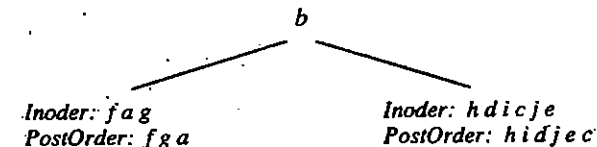
شکل ۵-۲۷.

۸ اگر پیمایش میان‌ترتیب و پس‌ترتیب یک درخت به صورت زیر باشد، درخت را رسم نمایید.

Inoder: $fagbhdicje$
Postorder $fgahidjēcb$

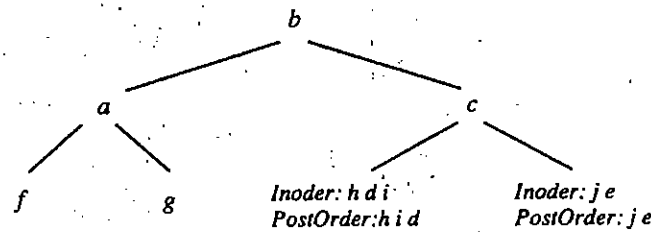
حل:

از آنجا در پیمایش پس‌ترتیب، ریشه آخرین گره‌ای است که پیمایش می‌شود، در نتیجه راس b ریشه درخت خواهد بود. با توجه به پیمایش میان‌ترتیب و رثوس fag در سمت چپ ریشه و رثوس $hdicje$ در سمت راست ریشه خواهند بود. به همین ترتیب در مورد هر کدام از زیردرخت‌ها مراحل ادامه پیدا خواهد نمود.



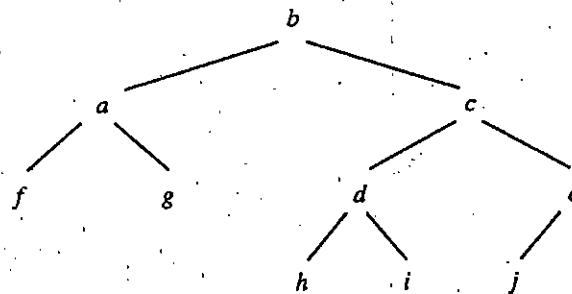
شکل ۵-۲۸ (الف).

در این مرحله در زیر درخت سمت چپ، از آنجا که a آخرین گره در پس‌ترتیب است، بنابراین ریشه زیردرخت a خواهد بود. با توجه به میان‌ترتیب fag و راس f در سمت چپ و راس g سمت راست این راس خواهند بود. در زیر درخت سمت راست نیز راس c ریشه زیردرخت خواهد بود.



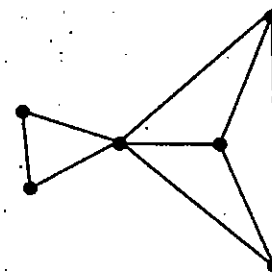
شکل ۵-۲۸ (ب).

در این مرحله، با توجه به پیمایش پس‌ترتیب، d و e ریشه‌های دو زیردرخت خواهند بود:

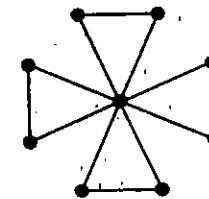


شکل ۵-۲۸ (ج).

۹. هر کدام از گراف شکل‌های زیر چند درخت فراگیر دارد؟

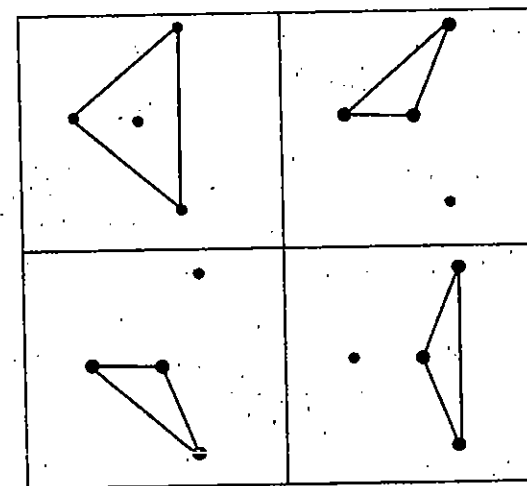


شکل ۵-۲۹ (ب)



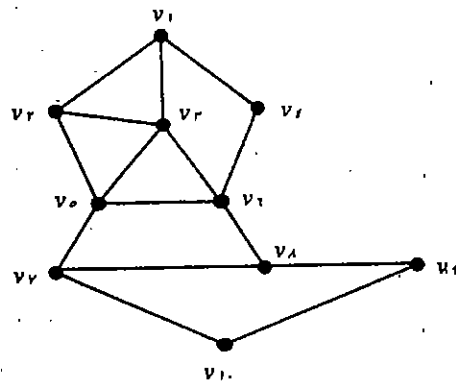
شکل ۵-۲۹ (الف)

(الف) باید یال‌هایی که تشکیل دور می‌دهند را حذف نماییم. در این گراف ۴ زیرگراف k_4 داریم که از هر k_4 باید یک یال حذف گردد. به ۳ طریق می‌توان از هر k_4 یک یال حذف نمود، در نتیجه $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ درخت فراگیر می‌توان رسم نمود.
(ب) این گراف از دو زیرگراف k_4 و k_4 تشکیل شده است. در k_4 ۳ درخت فراگیر وجود دارد. درخت فراگیر در گراف k_4 باید ۳ یال داشته باشد بنابراین $20 = 3$ اما از این تعداد زیرگراف فراگیر، ۴ گراف غیرهمبند هستند:



بنابراین تعداد درخت‌های فراگیر هر گراف k_4 برابر $16 = 4 - 20$ است.
در نتیجه در گراف شکل ۵-۲۹ (ب) $3 \times 16 = 48$ درخت فراگیر وجود خواهد داشت.

۱۰. با استفاده از الگوریتم جستجوی اول عمق و جستجوی اول عرض، و با شروع از رأس v_1 ، درخت‌های فراگیری برای گراف شکل ۵-۳۰ رسم نمایند (اولویت ترتیب شماره‌ها باشد).



شکل ۵-۳۰

حل:

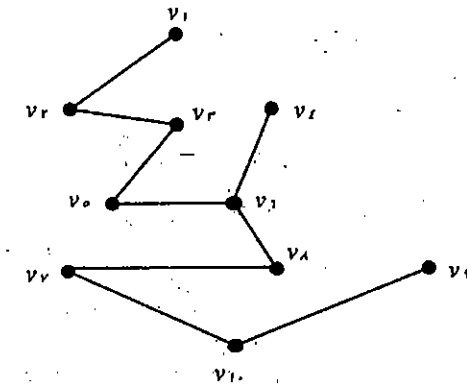
با استفاده از روش جستجوی اول عمق:

با شروع از رأس v_1 یال‌های انتخابی عبارتند از (چپ به راست): $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7$.

در این مرحله چون رأس v_2 به رأس دیگری وصل نیست، و نیز تمامی رئوس هنوز انتخاب نشده‌اند، یک مرحله به عقب، یعنی به رأس قبل از v_2 که رأس v_1 بود، برگشته و کار از آن رأس ادامه پیدا می‌کند. بنابراین یال‌های انتخابی بعدی عبارتند از:

$v_2v_8, v_2v_9, v_2v_{10}, v_2v_{11}$.

بنابراین با استفاده از روش جستجوی اول عمق، درخت فراگیر به شکل ۵-۳۱ (الف) خواهد بود:



شکل ۵-۳۱ (الف).

با استفاده از روش جستجوی اول سطح:

با شروع از رأس v_1 و $Q=\{v_1\}$ خواهد بود.

یال‌های $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5$ بدون ایجاد دور، قابل انتخاب هستند. بنابراین

$$Q=\{v_2, v_3, v_4\}$$

$$T=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

با در نظر گرفتن رئوس متصل به v_2 (که در اول صف قرار دارد):

بین یال‌های v_2v_1 و v_2v_3 و v_2v_5 فقط یال v_2v_5 انتخاب می‌شود. زیرا یال v_2v_1 پیش از این انتخاب شده است و یال v_2v_3 نیز ایجاد دور می‌نماید.

$$Q=\{v_3, v_4, v_5\}$$

$$T=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

عنصر بعدی در اول صف v_3 است. در مورد یال‌های متصل به رأس v_3 فقط یال‌های v_3v_6 قابل انتخاب است.

$$Q=\{v_4, v_5, v_6\}$$

$$T=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

حال عنصر v_4 مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مورد یال‌های متصل به v_4 نیز یالی قابل انتخاب نیست.

$$Q=\{v_5, v_6\}$$

$$T=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

از آنجا که عنصر ابتدای صف v_5 است، یال‌های متصل به آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخص است که تنها یال v_5v_7 قابل انتخاب است.

$$Q=\{v_6, v_7\}$$

$$T=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

از بین یال‌های متصل به v_6 نیز تنها یال v_6v_8 قابل انتخاب است. در نتیجه:

$$Q=\{v_7, v_8\}$$

$$T=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

در این مرحله در مورد رأس v_7 تنها یال v_7v_9 قابل انتخاب است.

$$Q=\{v_8, v_9\}$$

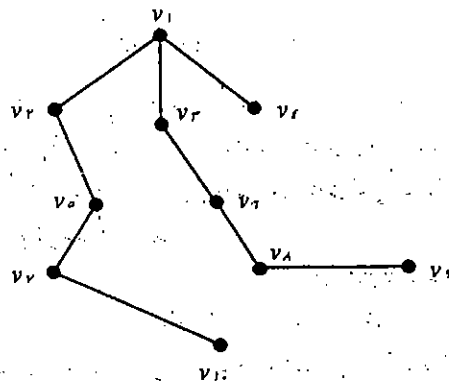
$$T=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$$

از بین یال‌های متصل به v_8 نیز تنها یال v_8v_{10} قابل انتخاب است. در نتیجه:

$$Q=\{v_9, v_{10}\}$$

$$T=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$$

چون مجموعه رئوس T برابر تمامی رئوس گراف است، در همین مرحله متوقف می‌شویم. بنابراین درخت فراگیر حاصل به شکل زیر خواهد بود.



شکل ۵-۳۱ (ب).

۱۱. با استفاده از روش جستجوی اول عمق درخت فراگیر گراف شکل ۵-۳۲ را به دست آورید.

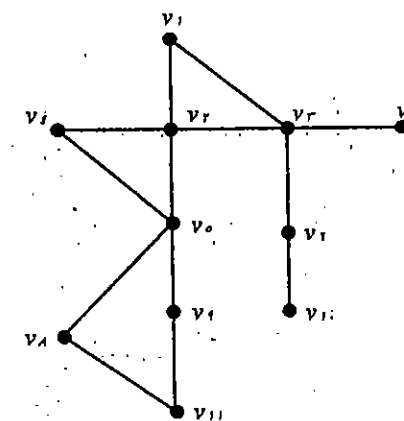
الف) پیمایش را از رأس v_1 آغاز نمایید.

ب) پیمایش را از رأس v_6 آغاز نمایید.

حل:

الف) با شروع پیمایش از رأس v_1 انتخاب یال‌ها برابر است با:

$v_1v_2, v_1v_3, v_2v_6, v_2v_7, v_6v_{10}$



شکل ۵-۳۲

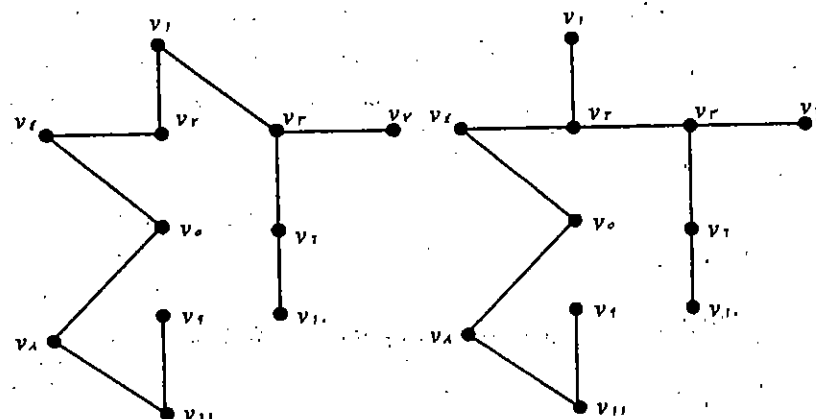
در این مرحله چون v_6 مسیری به رأس دیگری ندارد، یک مرحله به عقب یعنی رأس v_6 برمی‌گردیم. در مورد رأس v_6 نیز یال انتخاب نشده دیگری وجود ندارد. به رأس انتخابی قبل از آن یعنی v_3 می‌گردیم. در مورد این رأس یال v_3v_7 قابل انتخاب است. بنابراین یال‌های انتخابی تا این مرحله عبارتند از:

$v_1v_2, v_1v_3, v_2v_6, v_2v_7, v_6v_{10}, v_3v_7$

از آنجا که یال انتخاب نشده‌ای از رأس v_7 وجود ندارد، به رأس قبل از آن در مراحل انتخاب یعنی v_2 برمی‌گردیم. در مورد v_2 نیز یال انتخاب نشده‌ای وجود ندارد. به رأس قبل از آن برمی‌گردیم. یال‌های انتخابی بعدی عبارتند از:

$v_1v_2, v_2v_3, v_2v_6, v_2v_7, v_6v_{10}, v_3v_7, v_1v_{11}, v_1v_{12}$

بنابراین درخت فراگیر حاصل به شکل ۵-۳۳ (الف) خواهد بود.



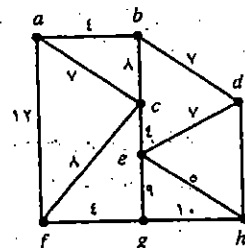
شکل ۵-۳۳ (الف)

شکل ۵-۳۳ (ب)

ب) با شروع پیمایش از رأس v_6 درخت فراگیر حاصل به شکل ۵-۳۳ (ب) خواهد بود.



۱۲. با استفاده از الگوریتم کروسکال و پریم یک درخت فراگیر مینیمم برای گراف زیر به دست آورید.



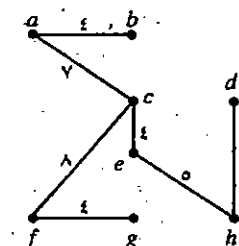
شکل ۵-۳۴

حل:

برای اعمال الگوریتم کروسکال: ابتدا یال‌ها به ترتیب وزن به صورت صعودی مرتب می‌شوند. حال یال‌ها از کمترین یال انتخاب می‌شود تا وقتی که دوری ایجاد نشود. انتخاب‌ها وقتی به اتمام می‌رسد که تمامی رئوس انتخاب شده باشند.

یال‌ها	ab	ce	fg	eh	dh	ac	bd	de	bc	cf	eg	gh	af
وزن	۴	۴	۴	۵	۶	۷	۷	۷	۸	۸	۹	۱۰	۱۲
نیاز به بررسی ندارد، چون تمامی رئوس انتخاب شده است.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x	x	✓			
انتخاب													

درخت حاصل در شکل ۵-۳۵ نشان داده شده است. وزن این درخت برابر ۳۸ است.



شکل ۵-۳۵

درخت فراگیر حاصل با استفاده از الگوریتم پریم: ابتدا رأس a انتخاب می‌شود، بنابراین در مورد درخت فراگیر مینیم (V_1, E_1) خواهیم داشت:

$$V_1 = \{a\}, E_1 = \{\}$$

• یال‌های ab, ac, af به مجموعه رئوس V_1 متصل‌اند. و از بین این یال‌ها، یال ab با وزن ۴ دارای کمترین وزن است. با انتخاب یال ab خواهیم داشت:

$$V_1 = \{a, b\}, E_1 = \{ab\}$$

• یال‌های ac, af, bc, bd به مجموعه رئوس V_1 متصل‌اند. و از بین این یال‌ها، یال ac و bd با وزن ۷ دارای کمترین وزن هستند. از بین این دو یال با در نظر گرفتن ترتیب حروف الفبا، یال ac انتخاب خواهد شد، بنابراین:

$$V_1 = \{a, b, c\}, E_1 = \{ab, ac\}$$

• یال‌های af, bc, bd, cf, ce به مجموعه رئوس V_1 متصل‌اند. و از بین این یال‌ها، یال ce با وزن ۴ دارای کمترین وزن است. با انتخاب یال ce خواهیم داشت:

$$V_1 = \{a, b, c, e\}, E_1 = \{ab, ac, ce\}$$

• یال‌های $af, bc, bd, cf, ed, eg, eh$ به مجموعه رئوس V_1 متصل‌اند. و از بین این یال‌ها، یال eh با وزن ۵ دارای کمترین وزن است. با انتخاب این یال، خواهیم داشت:

$$V_1 = \{a, b, c, e, h\}, E_1 = \{ab, ac, ce, eh\}$$

• یال‌های $af, bc, bd, cf, ed, eg, gh, dh$ به مجموعه رئوس V_1 متصل‌اند. و از بین این یال‌ها، یال dh با وزن ۶ دارای کمترین وزن است. با انتخاب این یال، خواهیم داشت:

$$V_1 = \{a, b, c, d, e, h\}, E_1 = \{ab, ac, ce, dh, eh\}$$

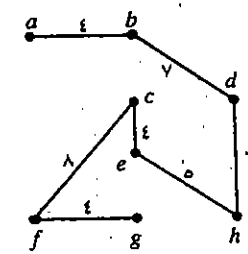
• یال‌های $af, bc, bd, cf, de, eg, hg$ به مجموعه رئوس V_1 متصل‌اند. و از بین این یال‌ها، یال de و bd با وزن ۷ دارای کمترین وزن هستند. اما با انتخاب هر یک از این یال‌ها در درخت حاصل، دور ایجاد می‌شود. بنابراین از انتخاب این دو یال صرف‌نظر می‌شود. دو یال بعدی bc و cf هستند که دارای وزن ۸ می‌باشند. با انتخاب bc در درخت دور ایجاد می‌شود. اما با انتخاب یال cf دوری در درخت ایجاد نخواهد شد، بنابراین:

$$V_1 = \{a, b, c, d, e, f, h\}, E_1 = \{ab, ac, ce, cf, dh, eh\}$$

• یال‌ها af, eg, fg تنها یال‌های باقیمانده هستند که به مجموعه رئوس V_1 متصل‌اند. کمترین وزن متعلق به یال fg با وزن ۴ است. با انتخاب این یال دوری در درخت ایجاد نمی‌شود. بنابراین:

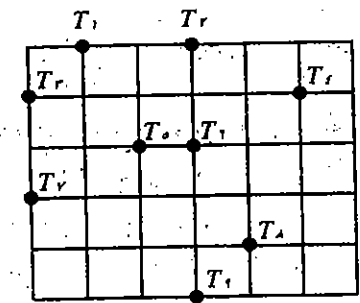
$$v_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \quad e_1 = \{ab, ac, ce, cf, dh, eh, fg\}$$

شکل ۵-۳۶ درخت فراگیر مینیم حاصل را نشان می‌دهد. مجموع وزن یال‌ها برابر ۲۸ است.



شکل ۵-۳۶

۱۳. یک مهندس برق، مداری با ۹ ترمینال مطابق شکل زیر را طراحی نموده است. این مدار باید به ولتاژی معادل ۵ ولت متصل گردد. فرض کنید ۵ ولت به یکی از ترمینال‌ها وصل است. برای اینکه سیم‌کشی در مدار به‌کار رود، چقدر سیم لازم است (به‌طوریکه فاصله هر سطر و ستون یک سانتی‌متر باشد)؟



شکل ۵-۳۷

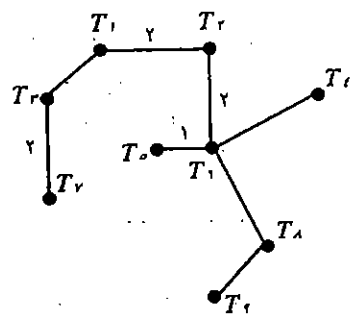
حل:

با استفاده از الگوریتم کروسکال، درخت فراگیر مینیم (درختی که از همه رئوس بگذرد و بین تمام رئوس مسیر وجود داشته باشد و نیز هزینه درخت حداقل است)

به‌دست خواهد آمد. با توجه به شکل ۵-۳۷، یال‌های انتخابی از چپ به راست عبارت است از:

$$T_5T_6, T_1T_2, T_8T_4, T_7T_9, T_1T_3, T_1T_7, T_2T_6, T_6T_8$$

هم‌چنین مجموع وزن درخت فراگیر مینیم، با توجه به شکل ۵-۳۸ برابر است با:

$$= 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 + 2 + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 7 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$


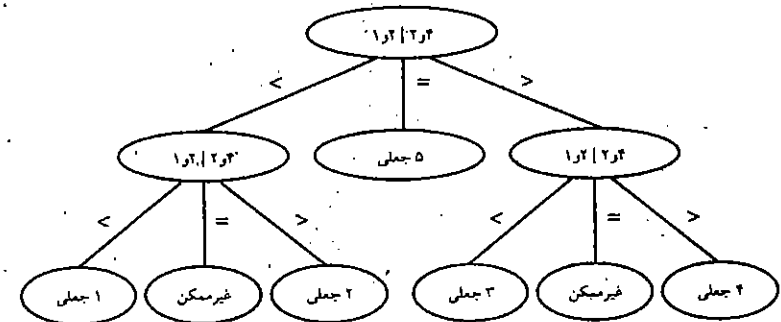
شکل ۵-۳۸

۱۴. یکی از کاربردهای درخت، استفاده از درخت‌ها در حل مسائلی است که نیاز به چندین مرحله تصمیم‌گیری دارند. در اینگونه مسائل از درخت ریشه‌دار استفاده می‌شود که در آن رئوس داخلی فعالیت‌ها، یال‌ها نتایج این فعالیت‌ها و برگ‌های درخت، نتیجه نهایی را مشخص می‌نمایند. این‌گونه درخت‌ها به درخت تصمیم معروف هستند. فرض کنید ۵ سکه ۵۰۰ ریالی در اختیار است. این سکه‌ها از شماره ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده‌اند. از بین این سکه‌ها یکی جعلی است و سبک‌تر از سکه‌های اصل است. با یک روش سکه جعلی را پیدا نمایید.

حل:

ابتدا سکه‌های شماره ۱ و ۲ را در یک کفه ترازو و سکه‌های ۳ و ۴ را در کفه دیگر قرار می‌دهیم. اگر ترازو حالت تساوی را نشان دهد، سکه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ سالم هستند و سکه پنجم جعلی است. اما اگر کفه سکه‌های ۱ و ۲ سبک‌تر از کفه سکه‌های ۳ و ۴ باشد، مشخص می‌شود سکه جعلی یکی از سکه‌های ۱ یا ۲ خواهد بود. برعکس اگر

کفه سکه‌های ۱ و ۲ سنگین‌تر از کفه سکه‌های ۳ و ۴ باشد، یعنی یکی از سکه‌های ۳ یا ۴ جعلی خواهند بود. با ادامه این روند در مورد سکه‌های مشکوک، سکه جعلی مشخص خواهد شد. درخت شکل زیر مراحل پیدا نمودن سکه جعلی را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که نماد i/j نشان می‌دهد که سکه i و j در کفه سمت چپ و سکه‌های k و l در سمت راست ترازو قرار می‌گیرند.

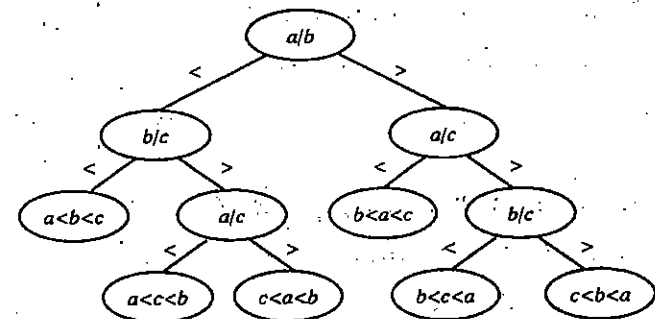


شکل ۳۹-۵

۱۵. سه عدد a, b, c را با استفاده از درخت تصمیم مرتب نمایید.

حل:

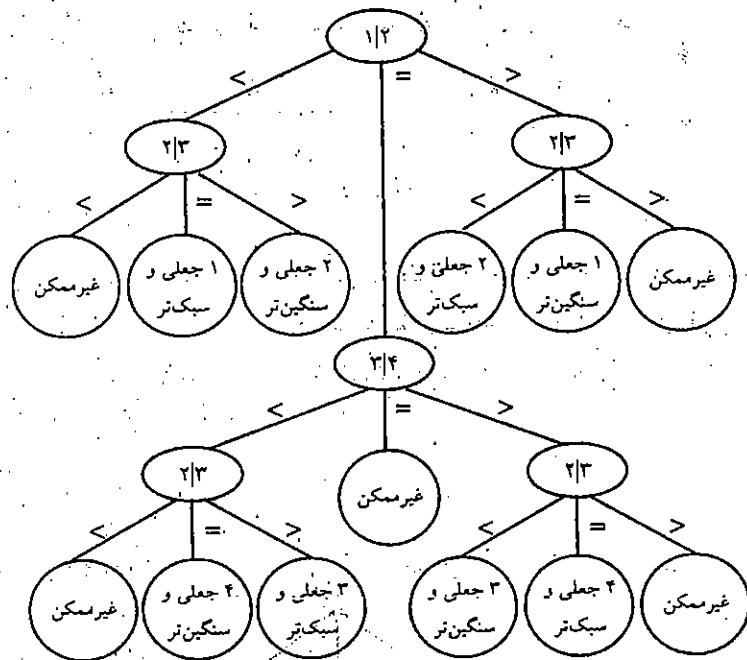
فرض کنید که a/b به معنی مقایسه مقادیر دو متغیر a و b باشد. درخت تصمیم برای مقایسه اعداد و مرتب نمودن ترتیب آنها در شکل ۴۰-۵ نشان داده شده است.



شکل ۴۰-۵

۱۶. چهارسکه ۵۰۰ ریالی موجود است. یکی از سکه‌ها جعلی است و وزن آن یا سبک‌تر و یا سنگین‌تر از بقیه سکه‌هاست. درختی، رسم نمایید که سکه جعلی را پیدا نموده و مشخص نماید آیا سکه جعلی سبک‌تر یا سنگین‌تر از بقیه سکه‌هاست. حل:

نماد a/b نشان‌دهنده مقایسه وزن دو سکه a و b است. با این تعریف درخت تصمیم به شکل زیر خواهد بود:

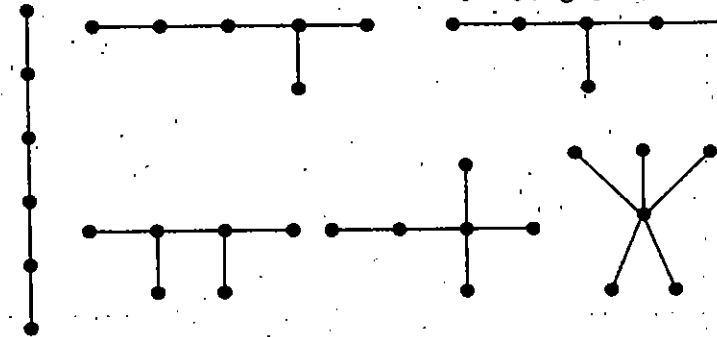


شکل ۴۱-۵

۱۷. تمامی درخت‌های غیریکریخت دارای ۶ رأس را رسم نمایید.

حل:

درخت‌های با ۶ رأس عبارتند از:



شکل ۴۲-۵

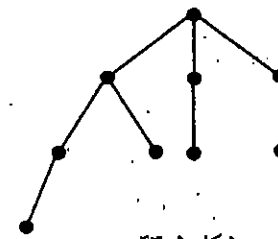
۱۸. آیا ممکن است با هر کدام از ۹ رأس که دنباله درجه‌های رئوس آن‌ها داده شده است، درختی رسم نمود؟ (درخت‌های مورد نظر ریشه‌دار نیستند. پس درجه هر رأس با توجه به تعریف بیان شده در بحث گراف، تعداد یال‌های متصل به آن رأس است).

الف) ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱

ب) ۷ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱

حل:

الف) شکل ۴۳-۵ درختی که با این دنباله درجه‌های رئوس قابل رسم است را نشان می‌دهد.



شکل ۴۳-۵

ب) چون ۹ رأس وجود دارد، بنابراین باید ۸ یال وجود داشته باشد. از طرف دیگر داریم:

$$|E| = 8$$

$$2 \times 8 = 2|E| = \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 1+1+1+1+1+1+2+3+7 = 18 \Rightarrow 16 \neq 18$$

بنابراین نمی‌توان گراف درخت با این دنباله درجات داشت.

۱۹. نشان دهید در یک جنگل با k مؤلفه، رابطه $|E| = |V| - k$ برقرار است.

حل:

از آنجا که هر کدام از مؤلفه‌های k ، $i = 1, 2, \dots, k$ یک درخت هستند. در نتیجه رابطه $|E| = |V| - 1$ برای هر کدام از مؤلفه‌ها برقرار است. در نتیجه:

$$|E| = \sum |E_i| = \sum (|V_i| - 1) = |V| - k$$

۲۰. یک درخت با $2n$ رأس از درجه ۱، $3n$ رأس از درجه ۲ و n رأس از درجه ۳ وجود دارد. تعداد رئوس و یال‌های درخت را پیدا نمایید.

حل:

$$2n + 3n + n = 6n \text{ تعداد کل رئوس}$$

$$6n - 1 \text{ بنابراین تعداد یالها}$$

از طرفی مجموع رئوس برابر دو برابر تعداد یالهاست:

$$2|E| = \sum \deg(V) \Rightarrow 2(6n - 1) = 2n + 2(3n) + 3n = 11n \Rightarrow n = 2$$

بنابراین تعداد رئوس برابر $12 = 6 \times 2 = 6n$ و تعداد یال‌ها برابر $11 = 6n - 1$ خواهد بود.

تمرین‌های فصل

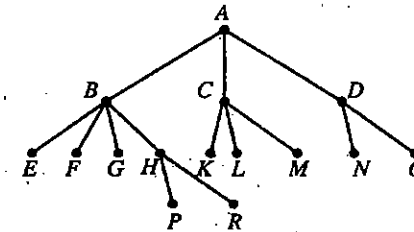
۱. از گراف کامل K_n حداکثر چند یال می‌توان حذف کرد به‌طوری‌که حاصل همچنان همبند باقی بماند؟

۲. برای عبارت‌های ریاضی زیر، درخت دودویی ترسیم نموده و عبارت پیشوندی و پسوندی را بدست آورید.

الف. $!(A \&\& B) // (A \&\& !C)$

ب. $(++A-C)*(B/C\%A)$ (عمل $++$ به معنی اضافه نمودن یک واحد به A و عمل $\%$ باقیمانده تقسیم است).

۳. پیمایش پیش‌ترتیب و پس‌ترتیب را برای درخت مقابل بنویسید.



۴. با کدام یک از دنباله درجه‌های زیر می‌توان درخت ترسیم نمود؟ در صورت امکان آن را رسم نمایید.

الف) $1, 1, 1, 2, 4$

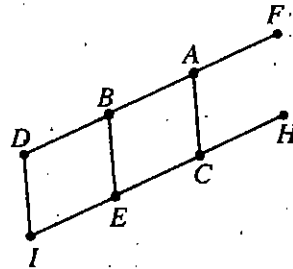
ب) $1, 1, 2, 2, 3, 3$

ج) $1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$

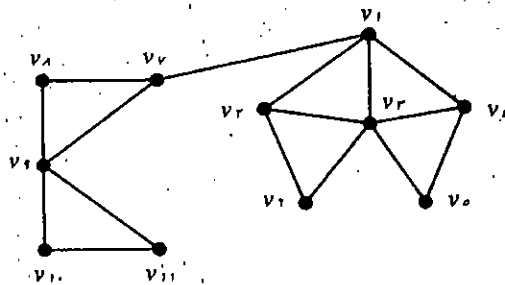
۵. گرافی رسم نمایید که دارای n رأس و $n-1$ یال باشد، اما درخت نباشد.

ع نشان دهید که اگر درختی دارای n رأس باشد، و رأسی مانند u دارای درجه m باشد، آن‌گاه درخت دارای حداقل m برگ خواهد بود.

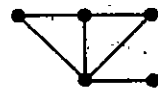
۷. در گراف زیر با شروع از رأس C :
الف) با استفاده از پیمایش جستجوی اول عمق
ب) با استفاده از روش جستجوی اول سطح
ترتیب ملاقات رئوس به چه ترتیب خواهد بود؟



۸. با استفاده از جستجوی اول عمق و جستجوی اول سطح، درخت‌های فراگیر شکل‌های زیر را رسم نمایید.
الف) از رأس v_1 شروع نمایید.
ب) از رأس v_7 شروع نمایید.



۹. تمام درخت‌های فراگیر متمایز گراف زیر را بدست آورید.

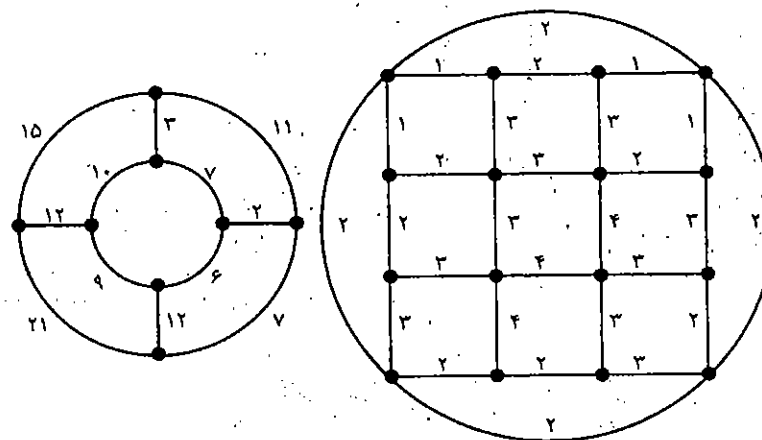


۱۰. برای گراف C_n (دور با n رأس، $n \geq 3$) چند درخت فراگیر متمایز وجود دارد؟

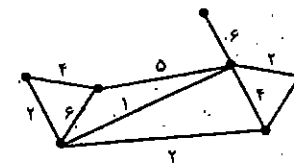
۱۱. گراف کامل با ۱۰ رأس در نظر بگیرید، که رأس‌های آن از یک تا ده شماره‌گذاری شده‌اند. اگر وزن هر یال از تابع زیر به‌دست آید، مجموع وزن‌های یال‌های درخت فراگیر مینیمم این گراف کدام است؟

$$W_{ij} = W_{ji} = \begin{cases} i+j & , i+j \geq 5 \\ i^2 + j^2 & , i+j < 5 \end{cases}$$

۱۲. در مورد گراف‌های زیر با استفاده از الگوریتم کروسکال و پریم درخت فراگیر مینیمم را به‌دست آورید.



۱۳. وزن درخت فراگیر مینیمم مربوط به گراف زیر را بیابید به‌طوری که درجه هر رأس از درخت بیشتر از ۲ نباشد.

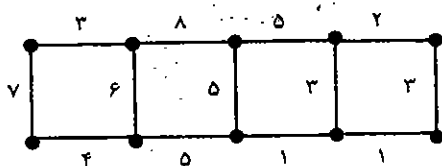


۱۴. وزارت نفت در نظر دارد با استفاده از لوله‌های گاز خطوط ارتباطی گاز رسانی بین شهرهای A و B و C و D و E و F و G برقرار نماید. با توجه به جدول زیر که فواصل

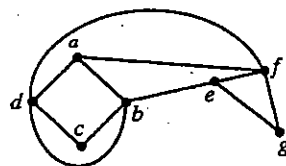
بین شهرها به کیلومتر داده شده است، مینیمم مقدار لوله گاز مورد نیاز (به کیلومتر) برای ارتباط بین کلیه شهرها چقدر است؟

	B	C	D	E	F	G
A	۶۷۰	۷۵۸	۴۲۷	۵۸۱	۲۱۱	۳۶۹
B		۳۶۱	۲۵۲	۱۳۲	۴۹۲	۶۸۰
C			۲۳۲	۴۹۳	۶۹۰	۷۵۹
D				۳۵۷	۳۹۴	۴۳۱
E					۳۹۱	۶۵۰
F						۵۲۱

۱۵. فرض کنید دانشگاهی در نظر دارد یک شبکه LAN بین ساختمان‌های این دانشگاه ایجاد نماید. ساختمان‌ها و هزینه اتصال شبکه بین آنها بوسیله گراف زیر نشان‌داده شده است. کم‌ترین هزینه برای ایجاد شبکه کامپیوتری را محاسبه نمایید.



۱۶. با استفاده از روش‌های جستجوی اول سطح و جستجوی اول عمق، درخت‌های فراگیری برای گراف زیر با شرایط ذکر شده، به‌دست آورید.
الف. فرض کنید رئوس به ترتیب a, b, c, d, e, f, g مرتب شده باشد (صعودی).
ب. فرض کنید رئوس به ترتیب g, f, e, d, c, b, a مرتب شده باشند (نزولی).



فصل ششم

شمارش و توابع مولد

اهداف:

انتظار می‌رود در پایان این فصل دانشجو بتواند:

- اصل ضرب و اصل جمع را در شمارش به کار برد.
- مفهوم جایگشت و ترکیب را در مسائل شمارش به کار برد.
- با توابع مولد و کاربرد آن آشنا شود.
- قضایای دوجمله‌ای و کاربرد آن‌ها را فرا گرفته باشد.

۱-۶- قواعد شمارش

ترتیب اشیاء و شمارش یکی از مطالب مهم ریاضیات گسسته است. تاریخچه این علم به قرن ۱۷ میلادی برمی گردد. شمارش برای حل مسائل مختلفی به کار می رود. به عنوان مثال برای شمارش تعداد تلفن‌های ممکن در یک کشور، یا تعداد گذرواژه‌هایی معتبر برای یک سیستم کامپیوتری، یا بررسی کافی بودن تعداد آدرس اینترنتی برای یک سری تقاضا و یا محاسبه پیچیدگی الگوریتم‌ها می توان از قواعد شمارش استفاده نمود. در این فصل ابتدا اصل جمع و اصل ضرب به عنوان اساس بحث شمارش معرفی و سپس به مباحث شمارش پرداخته می شود.

❏ اصل جمع: اگر عملی به n طریق و عمل دیگری به m طریق قابل انجام باشند، به طوریکه این دو عمل همزمان نتوانند رخ دهند، آن گاه یکی از این دو عمل به $n+m$ طریق انجام پذیر است.

❏ مثال ۱-۶: یک دانشجوی رشته کامپیوتر می تواند پروژه درسی خود را از بین دو لیست A و B انتخاب نماید. لیست A شامل ۲۰ عنوان پروژه و لیست B شامل ۱۵ عنوان پروژه می باشد. بنا به اصل جمع، این دانشجو می تواند یکی از $۱۵+۲۰=۳۵$ موضوع پروژه را انتخاب نماید؛ به عبارت دیگر این دانشجو می تواند به ۳۵ طریق یک عنوان پروژه را از دو لیست A و B انتخاب نماید.

❏ اصل ضرب: اگر عملی به n طریق قابل انجام باشد و برای هر یک از حالت‌های این n طریق، عمل دیگری به m طریق انجام گیرد، این دو عمل با هم به nm طریق قابل انجام خواهد بود.

❏ مثال ۲-۶: می خواهیم از یک کلاس ۴۰ نفری که شامل ۱۵ دانشجوی پسر و ۲۵ دانشجوی دختر است، یک نماینده انتخاب می کنیم. از آنجا که نماینده می تواند دختر یا پسر باشد، بنا به اصل جمع $۲۵+۱۵=۴۰$ حالت مختلف برای انتخاب نماینده وجود دارد.

اگر بخواهیم از همین کلاس یک نماینده از دخترها و یک نماینده از پسرها انتخاب کنیم بنا به اصل ضرب ۲۵×۱۵ حالت مختلف برای انتخاب وجود خواهد داشت.

❏ مثال ۳-۶: چند رشته بیتی متفاوت به طول ۷ وجود دارد؟
حل:

از آنجا که در هر بیت، می توان یکی از دو عدد صفر یا یک را قرارداد، بنا به اصل ضرب $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۷ = ۱۲۸$ رشته بیتی متفاوت به طول ۷ وجود دارد.

❏ مثال ۴-۶: با حروف الفبای فارسی، چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت (بامعنی یا بی معنی)؟
حل:

تعداد حروف الفبا ۳۲ حرف است. از آنجا که تکرار مجاز است، پس بنا به اصل ضرب تعداد کلمات ۵ حرفی برابر است با $۳۲^۵$.

❏ مثال ۵-۶: تعداد توابع، از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی را بیابید.
حل:

فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ در این صورت برای ساختن یک تابع از A به B به هر عضو A یک و تنها یک عضو از B را می توان اختصاص داد. واضح است که برای تعریف مقدار تابع در a_1 (یعنی $f(a_1)$)، n انتخاب و برای تعریف مقدار تابع در a_2 (یعنی $f(a_2)$) هم n انتخاب، ... و برای تعریف $f(a_n)$ نیز n انتخاب وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب n^m تابع از A به B می توان تعریف کرد.

❏ مثال ۶-۶: تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی را به دست آورید.

حل:

با فرض $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ دو حالت در نظر گرفته می‌شود:
الف) اگر $m > n$ در این صورت تابعی یک به یک از مجموعه m عضوی به مجموعه n عضوی وجود ندارد.

ب) اگر $m \leq n$ در مرحله اول به عضو a_1 عضوی از مجموعه B اختصاص می‌دهیم، این عمل به n طریق قابل انجام است.

در مرحله دوم به a_2 عضوی از مجموعه $B - \{f(a_1)\}$ اختصاص داده می‌شود. این عمل به $(n-1)$ طریق انجام پذیر است.

با ادامه روند به a_n عضوی از مجموعه $B - \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{n-1})\}$ نسبت می‌دهیم که به $(n-m+1)$ طریق انجام می‌گیرد. بنا به اصل ضرب تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه m عضوی به مجموعه n عضوی برابر است با: $n(n-1)\dots(n-m+1)$

مثال ۶-۷: شماره تلفن‌های یک کشور ۱۰ رقمی و دارای الگوی $XXX-XXX-XXXX$ است؛ که در آن N یکی از اعداد ۲ تا ۹ و X یکی از ارقام ۰ تا ۹ است. تعداد شماره تلفن‌های ممکن با این الگو چند شماره است؟

حل:

تعداد شماره تلفن‌های ممکن با این الگو عبارت است از:

$$(8 \times 10 \times 10)(8 \times 10 \times 10)(10 \times 10 \times 10 \times 10) = 64000000$$

مثال ۶-۸: مقدار متغیر k پس از اجرای قطعه برنامه زیر چیست؟

$k := 0;$

for $i_1 := 1$ to n_1

for $i_2 := 1$ to n_2

for $i_m := 1$ to n_m

$k := k+1$

حل:

مقدار اولیه k برابر ۰ است و با هر پیمایش این حلقه‌های تودرتو، یک واحد به آن اضافه می‌شود. اگر T_i تعداد دفعاتی باشد که حلقه نام اجرا می‌شود، بنابه اصل ضرب، تعداد دفعاتی که کل m حلقه تودرتو اجرا می‌شوند برابر $T_1 T_2 T_3 \dots T_m$ است. برای هر حلقه T_i تعداد دفعات اجرای حلقه برابر n_i است، بنابراین به مقدار متغیر k مقدار $n_1 n_2 \dots n_m$ اضافه خواهند شد و از آنجا که مقدار اولیه آن برابر ۰ است، در نتیجه مقدار نهایی k برابر $n_1 n_2 \dots n_m$ خواهد بود.

۶-۲- تبدیل (جایگشت) و ترکیب

ترکیبیات یا آنالیز ترکیبی یکی از شاخه‌های جذاب ریاضیات است که به بررسی مسائل شمارش، گراف‌ها، بازی‌ها و نیز مسائل ساختاری روی مجموعه‌های متناهی می‌پردازد. از جمله کاربردهای مهم این شاخه می‌توان به استفاده آن در برنامه‌نویسی کامپیوتر و الگوریتم‌ها اشاره نمود. دو اصل جمع و ضرب در بخش‌های قبل بیان شد، در بخش بعد تبدیل و ترکیب، معرفی و مثال‌هایی از آن بیان خواهد شد.

۶-۲-۱ تبدیل (جایگشت)

جایگشت: فرض کنید X مجموعه‌ای از n شیء متمایز باشد. هرآرایش (ترتیب) خطی از عناصر مجموعه X را یک جایگشت می‌نامیم. جایگشت‌های یک مجموعه n عضوی، $n!$ است.

مثال ۶-۹: تعداد حالت‌های مختلف قرار گرفتن ۵ نفر در یک صف، ۵! است.

تعریف ۳- جایگشت: فرض کنید X مجموعه‌ای از n شیء متمایز و $1 \leq r \leq n$ باشد. هرآرایش (ترتیب) خطی از r عنصر X را یک r -جایگشت می‌نامیم. واضح است که طبق تعریف در r -جایگشت، ترتیب قرار گرفتن اشیاء مهم است.

✓ قضیه ۶-۱: تعداد r -جایگشت‌های یک مجموعه n عضوی X برابر است با:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\dots(n-r+1)$$

اثبات:

فرض کنید r تعداد مکان‌های خالی باشد. مکان اول را می‌توان به n طریق پر نمود، مکان دوم را می‌توان توسط یکی از $(n-1)$ شیء باقیمانده پر نمود. به همین ترتیب برای پر کردن مکان r ام، $(n-r+1)$ شیء باقی‌مانده می‌ماند $(r-1)$ شیء از n شیء، قبلاً به کار گرفته شده است. بنابراین مکان r ام را می‌توان به $n-r+1$ طریق پر نمود. طبق اصل ضرب داریم:

$$P(n, r) = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

✓ مثال ۶-۱۰: تعداد اعداد سه‌رقمی که می‌توان با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ ایجاد نمود، در صورتی که تکرار مجاز نباشد برابر است با:

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

✓ مثال ۶-۱۱: $P(n, 2)$ برابر است با تعداد زوج‌های مرتبی که می‌توان از یک مجموعه n عضوی انتخاب نمود.

✓ مثال ۶-۱۲: قرار است ۴ نفر در جلسه‌ای سخنرانی کنند.

الف) به چند طریق ممکن است شخص B بعد از شخص A سخنرانی کند؟

ب) به چند طریق ممکن است شخص B بلافاصله بعد از شخص A سخنرانی کند؟

حل:

الف) این ۴ نفر به ۴! حالت می‌توانند سخنرانی کنند. دقیقاً در نیمی از این حالات

شخص B بعد از A سخنرانی می‌کند. پس تعداد حالات برابر است با: $\frac{4!}{2} = 12$

ب) در این حالت شخص A و B را به عنوان یک شیء در نظر می‌گیریم. پس تعداد حالات برابر $3! = 6$ است.

۶-۲-۲- جایگشت دایره‌ای

یک جایگشت دوری (دایره‌ای) از n شیء متمایز، آرایشی از n شیء دور یک دایره است. از آنجا که چرخش n شیء حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند تعداد جایگشت‌های دوری n شیء برابر $(n-1)!$ است.

✓ مثال ۶-۱۳: خانواده‌ای شامل پدر و مادر، سه پسر و دو دختر است. به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که پدر و مادر کنار هم قرار گیرند؟ حل:

پدر و مادر را در یک گروه دو نفره در نظر می‌گیریم، این گروه به همراه ۵ نفر دیگر به $5! = (6-1)!$ طریق دور میز گرد می‌توانند قرار گیرند. از طرفی اعضای گروه دو نفره به ۲! طریق با هم جایجا می‌شوند. پس جواب مسأله بنابه اصل ضرب برابر $5! \times 2!$ است.

✓ مثال ۶-۱۴: به چند طریق می‌توان ۵ زن و ۵ مرد را دور میز گرد نشاند به طوری که هیچ دو مرد یا دوزن کنار هم قرار نگیرند؟ حل:

۵ زن به ۴! می‌توانند دور میز گرد بنشینند، حال بین هر دو زن باید یک مرد بنشیند که ۵ مرد به ۵! می‌توانند در این وضعیت قرار گیرند و بنا به اصل ضرب، جواب $4! \times 5!$ است.

۶-۲-۳- ترکیب

فرض کنید X مجموعه‌ای از n شیء متمایز باشد. در این صورت هر زیرمجموعه r عضوی ($0 \leq r \leq n$) از X را یک r -ترکیب می‌نامیم. توجه نمایید که در r -ترکیب،

ترتیب مهم نیست. تعداد r - ترکیب‌های مجموعه n عضوی X با نماد $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده می‌شود و طبق تعریف $P(n, r) = C(n, r) \times n!$ ، به عبارت دیگر:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

مثال ۶-۱۵: تعداد رشته بیتی‌های به طول n که دقیقاً r بیت آنها عدد یک باشد را به دست آورید.

حل:

چون تعداد رشته‌بیت‌ها مدنظر است، ترتیب قرارگرفتن عدد "یک" در بیت‌ها مهم نیست. بنابراین $C(n, r)$ جواب است.

مثال ۶-۱۶: از میان ۹ عضو هیأت علمی دانشکده ریاضی و ۱۱ عضو هیأت علمی دانشکده کامپیوتر، قرار است کمیته‌ای تخصصی متشکل از ۳ عضو هیأت علمی ریاضی و ۴ عضو هیأت علمی کامپیوتر تشکیل شود. به چند طریق این عمل قابل انجام است؟

حل:

تعداد انتخاب‌های ۳ هیأت علمی ریاضی از ۹ نفر برابر $\binom{9}{3}$ و تعداد انتخاب‌های ۴ هیأت علمی کامپیوتر از ۱۱ نفر برابر $\binom{11}{4}$ می‌باشد. بنابه اصل ضرب، تعداد حالت تشکیل کمیته تخصصی برابر $\binom{9}{3} \binom{11}{4}$ خواهد بود.

مثال ۶-۱۷: به چند طریق می‌توان ۱۲ کتاب را در یک قفسه چید به طوری که ۵ جلد کتاب مشخص هیچ‌کدام مجاور یکدیگر قرار نگیرند؟

حل:

ابتدا ۷ کتاب نامشخص را در قفسه می‌چینیم. توجه دارید که بین ۷ کتاب چیده شده، هشت مکان موجود است که می‌توان ۵ کتاب "مشخص" را در این هشت مکان خالی قرار داد. تعداد حالات قرار گرفتن آنها برابر است با: $8! \binom{8}{5}$.

۶-۳- ضرایب دو جمله‌ای.

یکی از کاربردهای r - ترکیب، محاسبه ضرایب بسط دو جمله‌ای می‌باشد.

✓ قضیه ۶-۲ (قضیه دو جمله‌ای): اگر x و y دو متغیر و n عدد صحیح نامنفی باشد، آن‌گاه:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

اثبات در [۷]، بخش ۴-۵، بیان شده است.

مثال ۶-۱۸: بسط $(x+y)^7$ را بنویسید.

حل:

$$(x+y)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} x^{7-k} y^k = \binom{7}{0} x^7 + \binom{7}{1} x^6 y + \binom{7}{2} x^5 y^2 + \binom{7}{3} x^4 y^3 + \binom{7}{4} x^3 y^4 + \binom{7}{5} x^2 y^5 + \binom{7}{6} x y^6 + \binom{7}{7} y^7$$

$$= x^7 + 7x^6 y + 21x^5 y^2 + 35x^4 y^3 + 35x^3 y^4 + 21x^2 y^5 + 7x y^6 + y^7$$

مثال ۶-۱۹: ضریب $x^{12} y^{13}$ را از بسط $(x+y)^{25}$ بیابید.

حل:

از قضیه دو جمله‌ای ضریب $x^{12} y^{13}$ برابر است با:

$$C(25, 12) = \binom{25}{12} = \frac{25!}{12! 13!}$$

مثال ۶-۲۰: ضریب $x^{12} y^{13}$ را در بسط $(2x-3y)^{25}$ بیابید.

حل:

از قضیه دوجمله‌ای داریم:

$$(2x + (-3y))^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (2x)^{20-k} (-3y)^k$$

و ضریب $x^{12}y^{13}$ برابر است با:

$$\binom{20}{13} (2)^{20-13} (-3)^{13} = \frac{20!}{13! 7!} (2^7) (-3)^{13}$$

✓ قضیه ۳-۶: (فرمول پاسکال - خیام): اگر n و k دو عدد صحیح مثبت و $n \geq k$ باشد، آن‌گاه:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

اثبات: (به روش ترکیباتی)

اگر $T = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ مجموعه‌ای $(n+1)$ عضوی باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از مجموعه $(n+1)$ عضوی T برابر $\binom{n+1}{k}$ می‌باشد. عنصر ثابت و دلخواه $a_1 \in T$ را در نظر گرفته و تعریف می‌کنیم $S = T - \{a_1\}$. برای یک زیرمجموعه دلخواه k عضوی از T دو حالت وجود دارد:

- اگر زیرمجموعه k عضوی شامل a_1 باشد، پس برای ساختن آن باید $(k-1)$ عضو دیگر از مجموعه n عضوی S انتخاب شود. لذا تعداد انتخاب‌های این زیرمجموعه برابر $\binom{n}{k-1}$ است.
 - اگر زیرمجموعه k عضوی فاقد a_1 باشد، برای ساختن آن باید همه k عضو از مجموعه S انتخاب شوند، که تعداد کل حالات در این مرحله $\binom{n}{k}$ است.
- بنابراین:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

■

✓ قضیه ۴-۶: (توزیع k شیء در n جعبه متمایز): تعداد طرق مختلفی که می‌توان k شیء یکسان را بین n جعبه متمایز توزیع کرد به‌طوری‌که، بتوان در هر جعبه بیش از یک

$$\text{شیء قرار داد برابر است با: } \binom{n+k-1}{n-1}$$

اثبات:

هر توزیع k شیء یکسان در n جعبه متمایز (وقتی در هر جعبه بتوان بیش از یک شیء قرار داد)، را می‌توان با قراردادن $(n-1)$ خط عمودی (دیوار جداکننده n جعبه) و k ستاره در کنار هم نشان داد. پس $(n+k-1)$ مکان می‌توان در نظر گرفت که باید توسط k ستاره و $(n-1)$ خط عمودی پر شوند. ابتدا $(n-1)$ خط عمودی در $(n+k-1)$ مکان قرار

داده می‌شود که تعداد حالات آن برابر $\binom{n+k-1}{n-1}$ است.

از آنجایی که اشیاء یکسانند، به "یک" طریق می‌توان k ستاره را در k مکان باقیمانده قرارداد. لذا تعداد حالت‌های ممکن توزیع k شیء در n جعبه برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

توجه داریم که:

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

✓ مثال ۶-۲۱: ۷ شیء یکسان را به چند طریق می‌توان در ۳ جعبه قرارداد به‌طوری‌که بتوان در هر جعبه بیش از یک شیء قرارداد؟
حل:

۷ شیء یکسان را به صورت هفت ستاره * یکسان در نظر گرفته و جعبه‌ها را با خط عمودی / نشان می‌دهیم.

به‌عنوان مثال ****/****/ نشان می‌دهد در جعبه اول ۱ شیء، در جعبه دوم ۳ شیء و در جعبه سوم نیز ۳ شیء قرار می‌گیرد.

ملاحظه می‌شود که ۹ مکان وجود دارد که باید با هفت ستاره و دو خط عمود پر شوند. ابتدا ۲ مکان از ۹ مکان انتخاب شده و خط عمودی در آن قرار می‌گیرد. تعداد حالت‌های این عمل $\binom{9}{2}$ است. سپس هفت مکان دیگر باید با ۷ ستاره مشابه پر شوند، که تنها به یک حالت امکان‌پذیر است (زیرا با جایجا کردن ستاره‌ها حالت جدیدی ایجاد نمی‌شود). بنابه اصل ضرب کل حالات برابر است با: $\binom{9}{2} \times 1 = \binom{9}{2}$

►

✓ قضیه ۵-۶: فرض کنید n عدد طبیعی و k عدد صحیح نامنفی باشد، آن‌گاه:

- (الف) تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ برابر $\binom{k+n-1}{n-1}$ است.
 (ب) تعداد جواب‌های صحیح نامنفی نامعادله $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$ برابر $\binom{k+n}{n}$ است.
 (ج) تعداد جملات بسط چندجمله‌ای $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k$ برابر است $\binom{k+n-1}{n-1}$ است.
 اثبات در [۸]، قضیه ۱-۴-۲ بیان شده است.

کج مثال ۶-۲۲: معادله $x+y+z=13$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

حل:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله، معادل توزیع ۱۳ شیء یکسان در ۳ جعبه است. به عنوان مثال $\alpha=2, y=4, z=7$ به منزله این است که در جعبه اول ۲ شیء، در جعبه دوم ۴ و در جعبه سوم ۷ شیء قرار داده‌اند. لذا با توجه به قضیه ۵-۶ (الف) تعداد جواب‌های این معادله برابر است با:

$$\binom{13+3-1}{3-1} = \binom{15}{2}$$

کج مثال ۶-۲۳: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ را بیابید، به طوری که $x_1 \geq 0, x_2 \geq 2, x_3 \geq 1, x_4 \geq 3$ باشد.

حل:

قرار می‌دهیم $x'_1 = x_1 \geq 0, x'_2 = x_2 - 2 \geq 0, x'_3 = x_3 - 1 \geq 0, x'_4 = x_4 - 3 \geq 0$. آن‌گاه معادله به $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + 3 = 20$ تبدیل خواهد شد. لذا از قضیه ۵-۶ (الف) تعداد جواب‌های معادله $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 14$ برابر است با:

$$\binom{14+4-1}{4-1} = \binom{17}{3}$$

۴-۶- اصل لانه کبوتری

این اصل ترکیبیاتی ساده، اولین بار توسط دیریکله (۱۸۹۵-۱۸۰۵) در نظریه اعداد مورد استفاده قرار گرفت. این اصل برخلاف انتظار، کاربردهای بسیاری دارد و با

استفاده از آن، قضایای مهمی به اثبات می‌رسند. فرانک رمزی یکی از کسانی بود که تعمیم‌های وسیعی از این اصل ارائه کرد. امروزه مبحث "اعداد رمزی" یکی از بخش‌های مهم در علم ترکیبیات می‌باشد. ساده‌ترین صورت از اصل لانه کبوتری که اصل حجره‌ها نیز نامیده می‌شود به شکل زیر بیان شده است.

❏ اصل لانه کبوتری: $(n+1)$ کبوتر می‌خواهند در n لانه قرار گیرند، آن‌گاه حداقل یک لانه شامل بیش از یک کبوتر خواهد بود.

کج مثال ۶-۲۴: با استفاده از اصل لانه کبوتری می‌توان نشان داد که عبارات زیر درست هستند.

- در بین سه نفر حتماً دو نفر با یک جنسیت وجود دارند.
- در بین ۱۳ نفر حتماً دو نفر در یک ماه متولد شده‌اند.
- در بین حداقل ۸ نفر، حتماً دو نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند.

❏ تعمیم اصل لانه کبوتری: فرض کنید m کبوتر به سوی n لانه حرکت می‌کنند، می‌خواهیم بدانیم به هر لانه چند کبوتر برود، به طوری که هیچ لانه‌ای بدون کبوتر نماند؛ دو حالت به شرح زیر رخ می‌دهد:

(الف) اگر تعداد کبوترها با تعداد لانه‌ها برابر باشد $(n=m)$ ، آن‌گاه به هر لانه دقیقاً یک کبوتر می‌رود.

(ب) اگر تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر باشد $(m > n)$ ، آن‌گاه "حداقل" یک لانه وجود دارد که "حداقل" دو کبوتر به آن می‌رود.

کج مثال ۶-۲۵: نشان دهید اگر ۵ عدد متمایز از بین اعداد ۱ تا ۸ انتخاب شوند، آن‌گاه جمع ۲ تا از آنها ۹ می‌شود.
 حل:

اعداد ۱ تا ۸ به ۴ دسته $\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$ طوری تقسیم می‌شوند، که هر دسته شامل ۲ عدد با مجموع ۹ می‌باشد، این ۴ دسته ۴ لانه است و اگر ۵ کبوتر وارد آنها

شوند (یعنی ۵ عدد انتخاب شود)، آن‌گاه ۲ تا از آنها وارد یک لانه می‌شوند که مجموع آنها ۹ خواهد بود.

مثال ۶-۲۶: نشان دهید اگر ۲۰ نفر همگی با هم و به هر تعداد که بخواهند با هم دست دهند، آن‌گاه حداقل ۲ نفر از آنها به تعداد مساوی دست داده‌اند.

حل:

فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ مجموعه افراد و $B = \{1, 2, \dots, 19\}$ تعداد دست‌دادن‌ها باشد (حداقل تعداد دست‌دادن‌ها ۱ و حداکثر آنها ۱۹ می‌باشد). A را کیوت‌ها و B را لانه‌ها در نظر می‌گیریم. چون $|A| > |B|$ ، پس حداقل ۲ نفر به تعداد مساوی دست داده‌اند.

صورت‌های دیگر اصل کیوت‌ری:

الف) اگر m کیوتر و n لانه داشته باشیم، آن‌گاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن حداقل $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ کیوتر وجود دارد.

ب) اگر $(kn+1)$ کیوتر و n لانه داشته باشیم، در این صورت حداقل یک لانه وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کیوتر دارد.

ج) اگر m کیوتر و n لانه داشته باشیم و $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = k$ ، آن‌گاه کمترین مقدار m برابر $n(k-1)+1$ است.

مثال ۶-۲۷: در کیسه‌ای ۶ مهره قرمز، ۴ مهره آبی، ۲۰ مهره زرد و ۵ مهره سبز است. چند مهره از کیسه بیرون بیاوریم تا مطمئن باشیم که:

الف) حداقل ۴ مهره هم‌رنگ خواهیم داشت.

ب) حداقل ۶ مهره هم‌رنگ خواهیم داشت.

حل:

الف) (روش اول): از آنجا که ۴ رنگ متمایز در کیسه وجود دارد تعداد لانه‌ها را $n=4$ قرار می‌دهیم و از $k+1=4$ داریم $k=3$ بنابراین از صورت (ب) اصل لانه کیوت‌ری، حداقل تعداد مهره‌های انتخابی برابر است با: $kn+1=3 \times 4 + 1 = 13$

(روش دوم): اگر مهره‌ها به صورت

قرمز	آبی	زرد	سبز
۳	۳	۳	۳

انتخاب شوند ۴ مهره هم‌رنگ نخواهیم داشت. پس باید حداقل یک خانه بیش از ۳ عضو داشته باشد، یعنی لازم است حداقل یک مهره دیگر از کیسه بیرون بیاید. بنابراین اگر ۱۳ مهره از کیسه بیرون بیاید مطمئن خواهیم بود که حداقل ۴ مهره هم‌رنگ هستند.

ب) (روش اول): تعداد مهره‌های آبی و سبز کمتر از ۶ است. بنابراین این دو خانه را کنار می‌گذاریم. پس اگر مهره‌ها از قرمز و زرد باشند، با انتخاب $n=2$ ، $k=5$ خواهیم داشت: $kn+1=5 \times 2 + 1 = 11$. ولی امکان دارد مهره‌های بیرون آمده از مهره‌های آبی یا سبز باشند بنا به اصل جمع $11+4+5=20$. پس اگر ۲۰ مهره از کیسه بیرون بیاید مطمئن خواهیم بود که حداقل ۶ مهره هم‌رنگ هستند.

(روش دوم): اگر مهره‌ها به صورت

قرمز	آبی	زرد	سبز
۵	۵	۴	۵

انتخاب شوند، ۶ مهره هم‌رنگ نخواهیم داشت. پس باید حداقل یک مهره دیگر از کیسه بیرون بیاید که مطمئناً مهره بیرون آمده قرمز یا زرد خواهد بود. بنابراین اگر ۲۰ مهره از کیسه بیرون بیاید مطمئن هستیم که حداقل ۶ مهره هم‌رنگ هستند.

مثال ۶-۲۸: حداقل چند نقطه با مختصات صحیح در فضای ۳ بعدی انتخاب کنیم تا مطمئن شویم که مختصات وسط دو نقطه از آن‌ها نیز عدد صحیح است؟

حل:

مختصات نقطه وسط نقطه $(k=2)$ با مختصات (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) عبارت است از: $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$ از طرفی یک نقطه با مختصات صحیح (x, y, z) از نظر زوج و فرد بودن مؤلفه‌ها دارای ۸ حالت (لانه) است، به عنوان مثال (زوج، زوج، زوج)، (فرد، زوج، زوج) و ... پس: $m=n(k-1)+1=8(2-1)+1=9$ بنابراین اگر ۹ نقطه (کیوتر) در

صفحه انتخاب کنیم مؤلفه‌های حداقل ۲ نقطه از نظر زوج و فرد بودن یکسان خواهد بود و مختصات وسط آنها عددی صحیح است.

مثال ۶-۲۹: کتابخانه مرکزی دانشگاهی دارای ۹۸۲۵۳ کتاب مرجع لاتین رشته‌های مختلف می‌باشد. اگر قرار باشد این کتاب‌ها را در ۳۳۰ ردیف بچینند در این صورت یکی از ردیف‌ها باید حداقل شامل چند کتاب باشد؟
حل:

اگر تعداد کتاب‌ها را کبوتر و تعداد ردیف‌ها لانه‌ها باشند، باید حداقل یکی از ردیف‌ها دارای حداقل $\left\lceil \frac{98253}{330} \right\rceil = 298$ کتاب مرجع لاتین باشد.

مثال ۶-۳۰: از یک کلاس حداقل چند نفر انتخاب شوند که مجموع یا تفاضل سال تولدشان مضربی از ۱۰ باشد؟
حل:

رقم یکان اعداد انتخاب شده یکی از اعداد ۰ تا ۹ می‌باشد؛ با توجه به بخش‌پذیری اعداد بر عدد ۱۰، شش (لانه) دسته‌بندی $(0,0), (5,5), (1,9), (2,8), (3,7), (4,6)$ شرایط مسأله را دارد. بنابراین حداقل تعداد افراد (کبوتر) انتخابی از این کلاس برابر است با:
 $m = n(k-1) + 1 = 6(2-1) + 1 = 7$

۵-۶- توانی مولد

در این بخش مفهوم تابع مولد معرفی می‌شود که ابزاری قدرتمند در حل مسائل شمارشی به‌ویژه مسائل حاوی انتخاب متغیرهای محدود شده می‌باشد.

به عنوان مثال در مسأله خرید کردن پول می‌توان از این روش استفاده کرد. فرض کنید می‌خواهیم بدانیم به چند طریق می‌توان ۱۰۰۰۰ ریال را با استفاده از سکه‌های ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ و ۳۰۰۰ ریالی خرید کرد؟ جواب مطلوب برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و

شمارش و توابع مولد

نامتفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10000$ که در آن x_1, x_2 و x_3 به انتخاب از مجموعه $\{1000, 2000, 3000\}$ محدود می‌شوند.

در ابتدای این بخش برای آشنایی با توابع مولد، مسأله ساده‌ای طرح می‌شود.

مثال ۶-۳۱: مطلوب است تعیین تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ در صورتی که $x_1, x_2, x_3 \leq 4$ باشد.

حل:

یک روش حل، استفاده از شمارش ضریب و تعیین تمامی حالات ممکن است. جدول زیر فهرست کلیه حالت‌های ممکن را نشان می‌دهد.

x_1	x_2	x_3
۲	۴	۴
۳	۴	۳
۳	۳	۴
۴	۲	۴
۴	۴	۲
۴	۳	۳

روش دوم حل این مسأله استفاده از توابع مولد است. برای این منظور معادل با سه متغیر x_1, x_2, x_3 سه چندجمله‌ای $P(x_1), P(x_2), P(x_3)$ معرفی می‌شود. چون هر متغیر می‌تواند عدد ۲ یا ۳ یا ۴ باشد، متناظر با هر عدد، جمله‌ای در چندجمله‌ای با توان آن عدد در نظر گرفته می‌شود. این توان‌ها از x^0 شروع و به x^4 ختم می‌شوند. یعنی:

$$P_1(x) = P_2(x) = P_3(x) = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$$

این سه جمله‌ای در هم ضرب می‌شوند تا چندجمله‌ای جدید $P(x)$ شکل بگیرد. توان‌های x به دست آید:

$$P(x) = P_1(x)P_2(x)P_3(x) = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^3$$

تابع $P(x)$ را تابع مولد می‌نامیم. در چندجمله‌ای $P(x)$ ضریب جمله x^k جواب مسأله است.

به عنوان مثال x^1 می‌تواند از ضرب عامل x^2 از چندجمله‌ای اول و x^2 از چندجمله‌ای دوم و x^2 از چندجمله‌ای سوم حاصل شود. بنابراین یا توجه به توان این عوامل مقدار $x_1=2, x_2=4, x_3=4$ یکی از جواب‌های معادله $x_1+x_2+x_3=10$ است. پس ملاحظه می‌شود که هر جواب با دقتاً یک طریق به دست آوردن عامل x^1 در $P(x)$ متناظر است. بعد از باز کردن اتحاد $(x^2+x^2+x^2)^3$ ضریب x^1 ، عدد ۶ خواهد بود. پس تعداد جواب‌های صحیح نامنفی این معادله ۶ می‌باشد.

در مثال قبل به نظر می‌رسد فهرست کردن حالت‌ها در جدول سریع‌تر از یافتن ضریب x^1 در $P(x)$ است. در این مثال این نظر درست است، ولی زمانی که مسأله متغیرهای بیشتری را شامل شود، ارزش تابع مولد آشکار خواهد شد.

تعریف تابع مولد: اگر $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ را تابع مولد (تابع مولد معمولی) دنباله مزبور نامند.

فرض کنید a_n تعداد راه‌های مختلف برای انتخاب n شیء در یک مسأله ترکیبیاتی باشد. در این صورت سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را تابع مولد (معمولی) آن مسأله ترکیبیاتی گویند.

توجه:

از تابع مولد معمولی برای حل مسائل شمارش که در آنها ترتیب مهم نباشد، می‌توان استفاده کرد.

مثال ۳۲-۶: به نمونه‌هایی از توابع مولد توجه نمایید.

الف) تابع مولد دنباله $a_n = 3^n$ عبارت است از: $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

ب) تابع مولد دنباله $b_n = n+1$ عبارت است از: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$

ج) تابع مولد دنباله $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ برابر است با:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{1-x^6}{1-x}$$

پس تابع مولد دنباله، برابر $f(x) = \frac{1-x^6}{1-x}$ خواهد بود.

د) تابع مولد دنباله $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ تابع زیر می‌باشد:

$$f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

این چندجمله‌ای طبق قضیه دو جمله‌ای برابر $f(x) = (1+x)^n$ می‌باشد.

اکنون سوال این است که اگر بسط تابع مولد یک دنباله را در اختیار داشت، می‌توان جملات دنباله را یافت؟ برای پاسخ به این سوال به طرح چند مثال پرداخته می‌شود.

مثال ۳۳-۶:

الف) اگر $|x| < 1$ از $(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = (1-x^{n+1})$ تساوی

$$1 = (1-x)(1+x+x^2+\dots)$$

نتیجه می‌شود. بنابراین:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

در نتیجه $\frac{1}{1-x}$ ، تابع مولد دنباله $1, 1, 1, \dots$ می‌باشد.

ب) اگر از طرفین تساوی $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

بنابراین $\frac{1}{(1-x)^2}$ تابع مولد دنباله $1, 2, 3, 4, \dots$ است.

ج) اگر طرفین $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ را در عامل x ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

در این صورت $\frac{x}{(1-x)^2}$ تابع مولد $0, 1, 2, 3, \dots$ خواهد بود.

(د) با مشتق‌گیری مجدد از تابع مولد قسمت (ج) خواهیم داشت: $\frac{x+1}{(1-x)^2}$ تابع مولد دنباله $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ می‌باشد.

(ه) مشابه تکنیک قسمت (ج)، $\frac{x(x+1)}{(1-x)^2}$ تابع مولد دنباله $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$ می‌شود.

مثال ۶-۳۴: تابع مولد دنباله $0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, \dots$ را بیابید.
حل:

$$a_0 = 0 = 0^2 + 0$$

$$a_1 = 2 = 1^2 + 1$$

$$a_2 = 6 = 2^2 + 2$$

$$a_3 = 12 = 3^2 + 3$$

$$a_4 = 20 = 4^2 + 4$$

با مشاهده جملات خواهیم داشت: $a_n = n^2 + n$ ($n \geq 0$)، که مجموع دو دنباله $c_n = n^2$ و $b_n = n$ است. بنابراین تابع مولد a_n مجموع دو تابع مولد دنباله‌های c_n و b_n است که از مثال ۶-۳۳ (ج، ه) داریم:

$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^2}$$

توجه:

در $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ اگر به جای n مقدار $-n$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k n(n+1)\dots(n+k-1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

اگر $n \in \mathbb{N}$ در این صورت برای $k > n$ خواهیم داشت: $\binom{n}{k} = 0$
اگر $x/1 < 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k \quad (1-6)$$

دقت شود با توجه به تساوی دو جمله

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$$

می‌توان نتیجه گرفت که، $\frac{1}{(1+x)^n}$ تابع مولد دنباله $\binom{-n}{0}, \binom{-n}{1}, \dots$ می‌باشد.

اگر در رابطه قبل بجای x مقدار $-x$ قرار داده شود، از اینکه $x^k = (-x)^k (-1)^k$ داریم:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \quad (2-6)$$

مثال ۶-۳۵: ضریب جمله x^7 در $\frac{1}{(1-x)^4}$ چیست؟
حل:

با قراردادن $k=7$ و $n=4$ در فرمول (۲-۶)، ضریب جمله x^7 عبارت است از:

$$\binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = 120$$

مثال ۶-۳۶: ضریب جمله x^{12} در $(x^7 + x^6 + x^5 + \dots)^0$ چیست؟

حل:

ابتدا از عامل مشترک x^7 داخل پرانتز فاکتور می‌گیریم و سپس با توجه به قسمت (الف)

از مثال ۶-۳۳ نتیجه می‌شود:

$$(x^7 + x^6 + x^5 + \dots)^0 = (x^7)^0 (1 + x + x^2 + \dots)^0 = x^{10} \left(\frac{1}{1-x} \right)^0 = \frac{x^{10}}{(1-x)^0}$$

با ظاهر شدن x^{10} برای ساختن x^{24} کافی است ضریب x^4 در $\frac{1}{(1-x)^9}$ به دست آید. مطلوب مسأله با قراردادن $n=5$ و $k=9$ در فرمول (۲-۶)، حاصل می‌شود.

$$\binom{5+9-1}{9} = \binom{13}{9} = 715$$

✓ قضیه ۶-۶:

(الف) اگر a_k ضریب x^k در بسط سری $g(x) = (1+x+x^2+\dots)^n$ باشد آن‌گاه:

$$a_k = C(n+k-1, n-1)$$

(ب)

$$(1-x^m)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{km} = 1 - \binom{n}{1} x^m + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} x^{nm}$$

(ج)

$$(1+x+x^2+\dots+x^{m-1})^n = (1-x^m)^n (1+x+x^2+\dots)^n$$

اثبات در [۸] قضیه ۱-۴-۲ بیان شده است.

توجه:

طبق قضیه ۶-۶، برای به دست آوردن ضریب x^k اگر تابع مولد به صورت سری باشد کافی است در فرمول $C(n+k-1, n-1)$ مقادیر k و n را جایگذاری می‌کنیم. اما اگر تابع مولد به صورت سری نباشد در این صورت بنا به قسمت ب و ج قضیه ۶-۶، باید تابع مولد را به دو پرانتز تجزیه کرده و ضریب x^k را در این دو پرانتز به دست آوریم. بنابراین در ابتدا دقت می‌کنیم که آیا تابع مولد به سری تبدیل خواهد شد یا خیر؟

در جدول ۱-۶ تساوی‌های مهم که در خل مسائل این بخش مورد نیاز است، نشان داده شده است. برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ و $a \in \mathbb{R}$ داریم:

جدول ۱-۶

۱	$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k$
۲	$(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \dots + \binom{n}{n}a^n x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(ax)^k$
۳	$(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \dots + \binom{n}{n}x^{nm} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{km}$
۴	$(1-x^m)^n = 1 - \binom{n}{1}x^m + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}x^{nm} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}x^{km}$
۵	$\frac{(1-x^{n+1})}{(1-x)} = (1+x+x^2+\dots+x^n)$
۶	$\frac{(1-x^m)}{(1-x)} = (1+x+x^2+\dots+x^{m-1})$
۷	$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
۸	$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k$
۹	$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$
۱۰	$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n$

مثال ۶-۳۷: به چند طریق می‌توان هفت سیب و شش پرتقال را بین چهار کودک توزیع کرد به طوری که هر کودک حداقل یک سیب دریافت کند؟

حل:

ابتدا تابع مولد توزیع پرتقال را به دست می‌آوریم. برای توزیع پرتقال هیچ شرطی نداریم و می‌توان شش پرتقال را به یک کودک داد. پس باید معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=6$ ($x_i \geq 0$)

را حل کرد. همان‌طور که در ابتدای بخش توضیح داده شد، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x_1+x_2+x_3+x_4=6$ ، معادل با ضرب x^6 در $g(x)=(1+x+x^2+\dots+x^5)^4$ است. تابع $g(x)$ را می‌توان به سری تبدیل کرد، زیرا اضافه کردن جملات $x^6, x^7, \dots$ تاثیری در محاسبه ضریب x^6 ندارد. بنابراین می‌توان از تابع $h(x)=(1+x+x^2+\dots+x^5+\dots)^4$ برای یافتن ضریب x^6 کمک گرفت. طبق قسمت الف قضیه ۶-۶، ضریب x^6 برابر است با $C(9,3)$.

اما توزیع هفت سیب بین کودکان باید طوری صورت‌پذیرد که هرکودک حداقل یک سیب را دریافت کند. پس به هرکودک حداقل می‌توان چهارسیب داد. بنابراین باید معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ ($1 \leq x_i \leq 4$) را حل نمود. تابع مولد این معادله به صورت زیر است:

$$f(x)=(x^1+x^2+x^3+x^4)^4=x^4(1+x+x^2+x^3)^4$$

برای یافتن ضریب x^6 در $f(x)$ ، کافی است ضریب x^2 در بسط $(1+x+x^2+x^3)^4$ را یافت.

$k(x)=(1+x+x^2+x^3)^4$ قابل تبدیل شدن به سری است، زیرا اضافه کردن جملات $x^4, x^5, \dots$ تاثیری در محاسبه ضریب x^2 در $k(x)$ ندارد. بنابراین:

$$q(x)=(1+x+x^2+\dots)^4$$

و طبق قسمت الف قضیه ۶-۶، ضریب x^2 در $q(x)$ برابر $C(6,3)$ است.

بنابراین تعداد طرق مختلف توزیع سیب و پرتقال بین کودکان طبق اصل ضرب برابر است با: $C(9,3) \times C(6,3)$.

که مثال ۶-۳۸: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x_1+x_2+\dots+x_6=18$ که در آن $2 \leq x_i \leq 4$ را بیابید.

حل:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله، معادل با ضرب x^{18} در بسط $(x^2+x^3+x^4)^6$ است. قرار می‌دهیم:

$$f(x)=(x^2+x^3+x^4)^6=x^{12}(1+x+x^2)^6$$

پس کافی است ضریب x^6 را در بسط $(1+x+x^2)^6$ به دست آوریم. توجه‌شود که تابع مولد $g(x)=(1+x+x^2)^6$ تبدیل به سری نمی‌شود؛ زیرا اگر بخواهیم این تابع را به سری تبدیل نمائیم باید مابقی جملات مانند $x^3, x^4, \dots$ را به آن اضافه کنیم. اما اضافه کردن x^3 به پرانترهای $g(x)$ جمله x^3 را خواهد ساخت که در جواب مسأله تاثیر دارد. پس طبق قسمت ج قضیه ۶-۶ داریم:

$$(1+x+x^2)^6=(1-x^3)^6(1+x+\dots)^6$$

اما:

$$(1-x^3)^6=1-C(6,1)x^3+C(6,2)x^6-C(6,3)x^9+\dots-C(6,6)x^{18}$$

ازاینکه ضریب x^6 جواب است، پس فقط دو جمله اول بسط $(1-x^3)^6$ برای ما مهم هستند. از طرفی پرانتر $(1+x+\dots)^6$ به صورت سری می‌باشد و می‌توان ضریب جملات آن را طبق قسمت (الف) قضیه ۶-۶ به دست آورد. کافی است از این پرانتر ضرایب x^0 و x^3 را حاصل کرد.

در نتیجه عامل x^6 از عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$1 \times C(10,6)x^6 - C(6,1)x^3 \times C(6,6)x^6$$

بنابراین ضریب x^6 در بسط $(1+x+x^2)^6$ برابر است با:

$$1 \times C(10,6) - C(6,1) \times C(6,6) = C(10,6) - 6C(6,1) = 210 - 36 = 174$$

که مثال ۶-۳۹: الف) به چند طریق می‌توان یک گروه ۱۰ نفری از دانشجویان سال اول تا چهارم را به نمایندگی انتخاب کرد؟

ب) به چند طریق می‌توان یک گروه ۱۰ نفری از دانشجویان سال اول تا چهارم به نمایندگی انتخاب کرد به طوری که حداقل یک نماینده از سال اولی‌ها، حداقل دو نماینده از سال دومی‌ها، حداقل یک نماینده از سال سومی‌ها و حداقل سه نماینده از سال چهارمی‌ها داشته باشند؟

حل:

(بدون استفاده از تابع مولد)

الف) از آنجا که می‌توان همه اعضای گروه ۱۰ نفری را (به عنوان مثال) از بین دانشجویان سال دوم انتخاب کرد، بنابراین کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ ($x_i \geq 0$) را به دست آوریم. از قضیه ۶-۶ داریم:

$$C(n+k-1, n-1) = C(4+10-1, 4-1) = C(13, 3)$$

ب) در این قسمت نیز کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \quad (x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 1, x_4 \geq 3)$$

قرار می‌دهیم:

$$x'_1 = x_1 - 1 \geq 0$$

$$x'_2 = x_2 - 2 \geq 0$$

$$x'_3 = x_3 - 1 \geq 0$$

$$x'_4 = x_4 - 3 \geq 0$$

آن‌گاه معادله $x'_1 + 1 + x'_2 + 2 + x'_3 + 1 + x'_4 + 3 = 10$ حاصل می‌شود. تعداد جوابهای

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 3 \quad (x'_i \geq 0)$$

$$C(4+3-1, 4-1) = C(6, 3) = 20$$

بنابراین به ۲۰ طریق مختلف می‌توان ۱۰ نفر نماینده با شرایط مسأله انتخاب کرد.

چند نمونه مسأله حل شده

۱. تعداد توابع یک به یک از مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ به $B = \{1, 2, 3, 4\}$ را پیدا نمایید.

حل:

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

۲. مقدار متغیر k پس از اجرای قطعه برنامه فوق چیست؟

$$k := 0;$$

for $i_1 := 1$ to n_1

$$k := k + 1$$

for $i_2 := 1$ to n_2

$$k := k + 1$$

for $i_m := 1$ to n_m

$$k := k + 1$$

حل:

مقدار اولیه k برابر صفر است و هر دفعه که یک حلقه اجرا می‌شود یک واحد به k اضافه می‌شود. هر حلقه نام به تعداد n_i دفعه تکرار می‌شود. از آنجا که حلقه‌ها مستقل از هم عمل می‌کنند، اصل جمع مجموع تعداد دفعاتی که تمام حلقه‌ها اجرا می‌شوند و در نتیجه مقداری که به k اضافه می‌شود را مشخص می‌نماید. بنابراین مقدار k برابر $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ خواهد بود.

۳. در یک نسخه از زبان برنامه نویسی Basic نام متغیر می‌تواند یک رشته ۱ یا ۲ کاراکتری از اعداد و حروف الفبای لاتین باشد که بین حروف بزرگ و کوچک آن تفاوتی وجود ندارد. نام یک متغیر حتماً باید با یک حرف الفبا شروع شود. ۵ کلمه

کلیدی ۲ کاراکتری در این زبان وجود دارد که نام متغیر نمی‌تواند این کلمات باشد. با این شرایط چند نام متغیر در یک برنامه در این نسخه از زبان Basic می‌توان تعریف نمود؟

حل:

اگر V تعداد متغیرهایی باشد که در این زبان بتوان نامگذاری نمود، و نیز V_1 متغیرهای تک کاراکتری و V_2 متغیرهای ۲ کاراکتری باشند، بنابه اصل جمع $V = V_1 + V_2$. مشخص است که $V_1 = 26$ ، (برای متغیرهای تک حرفی نمی‌توان با عدد شروع نمود و فقط می‌توان از حروف الفبای لاتین استفاده نمود).

در مورد متغیرهای ۲ حرفی، قسمت اول می‌تواند فقط حرف لاتین و کاراکتر دوم می‌تواند ترکیبی از حروف و اعداد ۰ تا ۹ باشد، بنابراین تعداد متغیرهای ۲ حرفی بنابه اصل ضرب 26×36 می‌باشد؛ اما از آنجا که ۵ نام دو کاراکتری جزء کلمات کلیدی زبان می‌باشند، بنابراین: $V_2 = 26 \times 36 - 5$. در نتیجه:

$$V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$$

۴. با ۵ نقطه واقع بر روی یک دایره، چند مثلث می‌توان ساخت؟

حل:

با هر سه نقطه می‌توان یک مثلث ساخت. (از آنجا که نقاط بر روی دایره واقع هستند، هر سه نقطه بر یک استقامت نیستند). لذا تعداد مثلث‌ها عبارت است از:

$$C(5, 3) = \frac{5!}{3! 2!} = 10$$

۵. از بین ۱۰ نفر می‌خواهند کمیته‌ای ۴ نفره تشکیل دهند. تعداد حالت‌هایی که حتماً دو نفر a و b در کمیته باشند را بیابید.

حل:

دو نفر a و b را مشخص کرده، لذا باید ۲ نفر دیگر از بین ۸ نفر انتخاب شوند. لذا تعداد کل حالات: $\binom{8}{2}$

۶. n را طوری بیابید که تعداد جملات بسط $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^7$ برابر ۱۵۴۰ شود.

حل:

تعداد جملات بسط $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^7$ برابر $C(n+7, 7) = C(3+n-1, n-1)$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$1540 = C(n+7, 7) = \frac{(n+7)(n+6)\dots(n+1)}{7!} \Rightarrow n=20$$

۷. الف) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ را بیابید.

ب) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ را با شرط $(x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3)$ بیابید.

حل:

الف) کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ ($x_i \geq 0$) را به دست آوریم. از قضیه ۵-۶ داریم:

$$C(n+k-1, n-1) = C(15+3-1, 3-1) = C(17, 2)$$

ب) در این قسمت نیز باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ ($x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$) را بیابیم. قرار می‌دهیم:

$$x_1 = x_1' + 1 \geq 0, x_2 = x_2' + 2 \geq 0, x_3 = x_3' + 3 \geq 0$$

آن‌گاه معادله $x_1' + 1 + x_2' + 2 + x_3' + 3 = 15$ حاصل می‌شود. تعداد جواب‌های معادله $x_1' + x_2' + x_3' = 9$ ($x_i' \geq 0$) برابر است با:

$$C(9+3-1, 3-1) = C(11, 2)$$

►

۸. اگر هشت عدد صحیح مثبت انتخاب کنیم حداقل باقیمانده چند عدد از آنها بر عدد هفت با یکدیگر مساوی خواهند بود.

حل:

باقیمانده هر عدد بر عدد ۷، یکی از اعداد مجموعه $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ خواهد بود. اگر هشت عدد صحیح مثبت را کبوترها و اعداد مجموعه A را لانه‌ها در نظر بگیریم، طبق

اصل لانه کیوتری حداقل $1 + \left\lfloor \frac{n}{v} \right\rfloor$ کیوتر در یک لانه قرار دارند، یعنی باقیمانده دو عدد بر ۷ یکسان خواهد بود.

۹. حداقل تعداد دانشجویان درس ساختمان گسته چند نفر باشد تا حداقل ۶ نفر از آنها نمره یکسان بگیرند.

حل:

روش اول: اگر تعداد دانشجویان (کیوترها) را m و تعداد نمرات (لانه‌ها) را n در نظر بگیریم؛ در این صورت باید $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = 6$ یا به عبارتی دیگر حداقل $6(7-1)+1=26$ دانشجو مورد نیاز است.

روش دوم: قرار می‌دهیم: $n=5$ از $k+1=6$ نتیجه می‌شود $k=5$. پس طبق اصل لانه کیوتری $kn+1=5 \times 5 + 1 = 26$ بنابراین کافی است ۲۶ دانشجو انتخاب کنیم. در این صورت حداقل ۶ دانشجو نمره یکسان گرفته‌اند.

۱۰. یک تنیس‌باز ۷۷ روز فرصت دارد تا خود را برای یک مسابقه مهم آماده کند؛ او می‌خواهد در هر روز اقل یک‌بار به طور تمرینی با دوستش بازی کند، به‌طوری‌که در این مدت دقیقاً ۱۳۲ بازی تمرینی انجام دهد. نشان دهید با این فرضیات حتماً دنباله‌ای از روزهای متوالی وجود دارند که طی آنها دقیقاً ۲۱ بازی انجام داده است.

حل:

فرض کنید a_i تعداد بازی‌هایی باشد که تا روز i ام انجام داده است. به عنوان مثال a_1 تعداد بازی‌های ۱۰ روز اول تنیس‌باز است. در این صورت:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{77} \leq 132$$

اگر طرفین نامساوی فوق را با ۲۱ جمع کنیم، داریم:

$$22 = 21 + 1 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \leq 132 + 21 = 153$$

حال دنباله زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$$

این دنباله شامل ۱۵۴ جمله است که مقادیر آن حداقل ۱ و حداکثر ۱۵۳ است. طبق اصل لانه کیوتری، دو جمله این دنباله با هم مساویند. چون a_i ها با هم متفاوت و $a_i + 21$ نیز با هم متمایزند، بنابراین یکی از a_i ها با یکی از $a_j + 21$ ها برابر است؛ یعنی $a_i - a_j = 21$. بنابراین این تنیس باز از روز $j+1$ تا روز i ام دقیقاً ۲۱ بازی انجام داده است.

۱۱. فرض کنید S مجموعه‌ای ۷ عضوی از مجموعه اعداد $\{1, 2, \dots, 23\}$ می‌باشد. نشان دهید دو زیرمجموعه ناتهی و مجزا از S مانند A و B وجود دارد که مجموع اعضای A با مجموع اعضای B برابر است؟

حل:

هر زیرمجموعه ۷ عضوی دارای دقیقاً $2^7 - 2 = 126$ (لانه) زیرمجموعه ناتهی و سره است. از طرفی مجموع اعضای هر یک از این مجموعه‌ها حداکثر $23 \times 7 = 161$ (کیوتر) می‌باشد. بنابراین حداقل دو زیرمجموعه وجود دارد که مجموع اعضای آن‌ها با هم برابر است.

۱۲. اگر ۷ تکنسین قرار باشد ۵۰ کامپیوتر یک شرکت را تعمیر نمایند، حداقل چند کامپیوتر توسط حداقل یک نفر تعمیر می‌گردد؟

حل:

داریم: $\left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor = 8$ ، به عبارت دیگر حداقل ۸ کامپیوتر توسط یک نفر تعمیر می‌گردد.

۱۳. تابع مولد دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $a_n = 2n + 3$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$

ب) $a_n = \binom{n}{n}$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$

ج) $a_n = \binom{n+1}{n}$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$

حل:

الف) با توجه به بند ۷ و ۱۰ جدول ۱-۶:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)-2+3]x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 2 \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)} = \frac{3-x}{(1-x)^2}$$

(ب) برای $n > 8$, $\binom{8}{n} = 0$. با توجه به بند ۱ جدول ۱-۶:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{8}{n} x^n = \sum_{n=0}^8 \binom{8}{n} x^n = (1+x)^8$$

(ج) از بند ۹ جدول ۱-۶:

$$\frac{1}{(1-x)^5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k$$

حال با جایگذاری متغیر n به جای k :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^5}$$

۱۴. دنباله تولیدشده توسط هر کدام از توابع مولد زیر را بیابید.

(الف) $(3x-4)^7$

(ب) $\frac{x^7}{1+3x}$

حل:

(الف)

$$(3x-4)^7 = \left[-4 \left(1 - \frac{3}{4}x \right) \right]^7 = (-4)^7 \left(1 - \frac{3}{4}x \right)^7 = -64 \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} \left(-\frac{3}{4} \right)^k x^k = -64 \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} \left(-\frac{3}{4} \right)^k x^k$$

$$= -64 + (-64)3 \left(-\frac{3}{4} \right) x + (-64)3 \left(-\frac{3}{4} \right)^2 x^2 + (-64) \left(-\frac{3}{4} \right)^3 x^3 = -64 + 144x - 108x^2 + 27x^3$$

پس:

$$a_0 = -64, a_1 = 144, a_2 = -108, a_3 = 27,$$

$$a_k = 0 \quad k=4, 5, \dots$$

(ب) می‌دانیم که همواره $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ بنابراین داریم:

$$\frac{x^7}{1+3x} = x^7 \left(\frac{1}{1+3x} \right) = x^7 (1 - (3x) + (3x)^2 - (3x)^3 + \dots)$$

$$= x^7 (1 - 3x + 3^2 x^2 - 3^3 x^3 + 3^4 x^4 + \dots)$$

$$= x^7 - 3x^8 + 3^2 x^9 - 3^3 x^{10} + 3^4 x^{11} + \dots$$

لذا دنباله متناظر با آن برابر است با:

$$\{0, 0, 0, 1, -3, 9, -27, 81, \dots\}$$

۱۵. ضریب x^{11} را در تابع $(1+x^5+x^{10}+\dots)^7$ بیابید.

حل:

(از تساوی $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots$ استفاده می‌شود)

$$(1+x^5+x^{10}+\dots)^7 = (1+x^5+(x^5)^2+(x^5)^3+\dots)^7$$

$$= \left(\frac{1}{1-x^5} \right)^7 = \frac{1}{(1-x^5)^7} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{7+k-1}{k} (x^5)^k$$

ضریب x^{11} از قرار دادن $k=2$ در ضریب بسط اخیر حاصل می‌شود:

$$\binom{7+2-1}{2} = 6$$

۱۶. ۹ آب‌نبات را بین سه کودک توزیع کنید به طوری که هر کودک حداقل ۲ آب‌نبات دریافت کند؟

حل:

کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $a+b+c=9$ با شرط $a, b, c \geq 2$ را بیابیم.

روش اول:

قرار می‌دهیم $a' = a-2$, $b' = b-2$, $c' = c-2$ از آنجا معادله به معادله $a'+b'+c'+2+2+2=9$

تبدیل می‌شود. تعداد جواب‌های معادله $a'+b'+c'=3$ ($a', b', c' \geq 0$) برابر است با:

$$C(3+3-1, 3-1) = C(5, 2) = 10$$

روش دوم:

هر کودک حداقل ۳ و حداکثر ۵ آب‌نبات می‌تواند بگیرد، پس تابع مولد این معادله به صورت زیر است:

صورت زیر است:

$$g(x) = (x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2 = (x^1)^2 (1 + x + x^2 + x^3)^2 = x^2 (1 + x + x^2 + x^3)^2$$

ضریب x^4 در $g(x)$ جواب است. پس کافی است ضریب x^2 را در بسط $(1 + x + x^2 + x^3)^2$ بیابیم. تابع $(1 + x + x^2 + x^3)^2$ قابل تبدیل به سری است، لذا ضریب x^2 برابر است با:

$$C(3+3-1, 2) = C(5, 2) = 10$$

۱۷. تعداد راه‌های مختلفی که می‌توان ۹ کامپیوتر یکسان را به ۴ اداره فرستاد، به‌طوری‌که هر اداره حداقل یک کامپیوتر جدید دریافت کند، را بیابید.

حل:

تابع مولد مسأله به صورت $g(x) = (x + x^2 + \dots + x^9)^4$ است، زیرا به هر اداره حداقل یک کامپیوتر و حداکثر شش کامپیوتر می‌توان داد. جواب مسأله ضریب x^4 در $g(x)$ است.

$$g(x) = (x + x^2 + \dots + x^9)^4 = x^4 (1 + x + \dots + x^8)^4$$

پس کافی است ضریب x^0 را در بسط $h(x) = (1 + x + \dots + x^8)^4$ بیابیم. ولی $h(x)$ قابل تبدیل شدن به سری است. لذا برای به‌دست آوردن ضریب x^0 از قضیه ۶-۶ قسمت (الف) داریم:

$$C(5+4-1, 4-1) = C(8, 3) = 56$$

۱۸. اگر سه تاس متمایز ریخته‌شوند، تعداد حالت‌هایی را به‌دست آورید که جمع اعداد روی این سه تاس برابر با عدد ۱۳ شود.

حل:

فرض کنیم a تاس اول، b تاس دوم و c تاس سوم باشد. پس $a+b+c=13$ به طوری‌که $(1 \leq a, b, c \leq 6)$. تابع مولد آن برابر است با:

$$g(x) = (x + x^2 + \dots + x^6)^3 = x^3 (1 + x + \dots + x^5)^3$$

ضریب x^{13} در $g(x)$ جواب است. بنابراین کافی است ضریب x^{10} را از بسط $h(x) = (1 + x + \dots + x^5)^3$ بیابیم.

$h(x)$ قابل تبدیل شدن به سری نیست زیرا اضافه کردن جملات $x^6, x^7, \dots$ به آن، جمله x^1 را تولید می‌کند و در به‌دست آوردن ضریب x^1 در $h(x)$ تأثیر دارد. لذا باید از قسمت (ب) و (ج) قضیه ۶-۶ استفاده کرد.

$$(1 + x + \dots + x^5)^3 = (1 - x^6)^{-3} (1 + x + x^2 + \dots)^3$$

از طرفی

$$(1 - x^6)^{-3} = 1 - C(3, 1)x^6 + C(3, 2)x^{12} - C(3, 3)x^{18}$$

از اینکه ضریب x^1 مورد نظر است، جملات اول و دوم بسط $(1 - x^6)^{-3}$ لازم است. هم‌چنین در بسط سری $(1 + x + x^2 + \dots)^3$ کافی است ضریب x^1 و x^7 را محاسبه می‌کنیم. در نتیجه عامل x^1 از عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$1 \times C(12, 2)x^{12} - C(3, 1)x^6 \times C(6, 2)x^7$$

لذا ضریب x^1 برابر است با:

$$1 \times C(12, 2) - C(3, 1) \times C(6, 2) = 21$$

پس به ۲۱ طریق می‌توان سه تاس ریخت به‌طوری‌که حاصل جمع اعداد روی تاس‌ها ۱۳ باشد.

۱۹. در یک مسابقه معلومات عمومی، ۲۰ سؤال از ۳ نفر پرسیده می‌شود. به چند طریق می‌توان این مسابقه را برگزار کرد به شرطی‌که از هر نفر حداقل ۳ سؤال و حداکثر ۷ سؤال پرسیده شود؟

حل:

به عنوان مثال یک حالت این است که از نفر اول و دوم هر کدام ۷ سؤال و از نفر سوم ۶ سؤال پرسیده شود. تابع مولد پرسش از این سه نفر با توجه به شرط برگزاری مسابقه عبارت است از:

$$(x^3 + x^4 + \dots + x^7)^2$$

ضریب x^{20} جواب است. داریم:

$$(x^3 + x^4 + \dots + x^7)^2 = x^6 (1 + x + \dots + x^4)^2$$

کافی است ضریب x^{11} را از بسط $h(x) = (1+x+\dots+x^5)^2$ بیابیم.

$h(x)$ قابل تبدیل شدن به سری نیست زیرا، اضافه کردن جملات $x^6, x^7, \dots$ به آن، جمله x^{11} را تولید می‌کند و در به دست آوردن ضریب x^{11} در $h(x)$ تأثیر دارد. لذا باید از قسمت (ب) و (ج) قضیه ۶-۶ استفاده کرد.

$$(1+x+\dots+x^5)^2 = (1-x^6)^2 (1+x+x^2+\dots)^2$$

از طرفی

$$(1-x^6)^2 = 1 - C(2,1)x^6 + C(2,2)x^{12}$$

از اینکه ضریب x^{11} مورد نظر است، جملات اول و دوم و سوم بسط $(1-x^6)^2$ لازم است. همچنین در بسط سری $(1+x+x^2+\dots)^2$ کافی است ضریب x^5, x^6, x^{11} را محاسبه می‌کنیم. در نتیجه عامل x^{11} از عبارت زیر حاصل می‌شود

$$1 \times C(12,2)x^{11} - C(2,1)x^6 \times C(8,2)x^5 + C(2,2)x^{11} \times C(2,2)x$$

لذا ضریب x^{11} برابر است با:

$$1 \times C(12,2) - C(2,1) \times C(8,2) + C(2,2) \times C(2,2) = 3$$

پس به ۳ طریق می‌توان این مسابقه را برگزار کرد.



۲۰. به چند طریق می‌توان ۲۴ ریات را در ۴ خط مونتاژ یک کارخانه به کار گرفت، اگر در هر خط مونتاژ حداقل ۳ ریات و حداکثر ۹ ریات به کار گرفته شوند؟

حل:

تابع مولد آن برابر است با:

$$g(x) = (x^3 + x^4 + \dots + x^9)^4 = x^{12}(1+x+\dots+x^6)^4$$

کافی است ضریب x^{12} را از بسط $h(x) = (1+x+\dots+x^6)^4$ بیابیم. $h(x)$ قابل تبدیل شدن به سری نیست زیرا اضافه کردن جملات $x^7, x^8, \dots$ در به دست آوردن ضریب x^{12} در $h(x)$ تأثیر دارد. داریم:

$$(1+x+\dots+x^6)^4 = (1-x^7)^4 (1+x+x^2+\dots)^4$$

از طرفی

$$(1-x^7)^4 = 1 - C(4,1)x^7 + C(4,2)x^{14} - C(4,3)x^{21} + C(4,4)x^{28}$$

جملات اول و دوم بسط $(1-x^7)^4$ برای ساختن x^{12} کافی است.

همچنین در بسط سری $(1+x+x^2+\dots)^4$ تنها ضریب x^5 و x^7 را محاسبه کنیم. در نتیجه عامل x^{12} از عبارت زیر حاصل می‌شود

$$1 \times C(15,3)x^{12} - C(4,1)x^7 \times C(8,2)x^5$$

لذا ضریب x^{12} برابر است با:

$$1 \times C(15,3) - C(4,1) \times C(8,2) = 231$$

پس به ۲۳۱ طریق می‌توان این ریات‌ها را به کار گرفت.



تمرین‌های فصل

۱. تعداد اعدادی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100000\}$ را بیابید که مجموع ارقام آنها برابر ۷ باشد.
۲. در ۱۰ مسابقه فوتبال، تعداد حالاتی که ۶ برد، ۲ تساوی و ۲ باخت اتفاق بیافتد را به دست آورید.
۳. ضریب x^m در معادله $(1+x)^n$ را بیابید.
۴. در بسط دوجمله‌ای $(x^2 + 1/x)^{12}$ ضریب ثابت را به دست آورید.
۵. یک مثلث متساوی الاضلاع در نظر بگیرید. حداقل چند نقطه درون مثلث انتخاب کنیم تا:
 - الف) حداقل ۲ نقطه فاصله‌ای کمتر از یک چهارم طول ضلع مثلث داشته باشند؟
 - ب) حداقل ۳ نقطه فاصله‌ای کمتر از یک چهارم طول ضلع مثلث داشته باشند؟
۶. یک تیم فوتبال در یک دوره ۴ هفته‌ای حداکثر ۴۰ بازی دارد و در هر روز حداقل یک بازی انجام می‌دهد. نشان دهید دنباله‌ای از روزهای متوالی می‌توان یافت که مجموع بازی‌های این تیم دقیقاً ۱۵ بازی باشد.
۷. یک صفحه هدف به شکل مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ است.
 - الف) نشان دهید اگر ۵ بار با تیر به آن بزنیم دو سوراخ روی آن است که فاصله آنها کمتر یا مساوی ۱ است.
 - ب) اگر ۱۷ بار با تیر به این هدف بزنیم کمترین فاصله بین سوراخ‌ها حداکثر چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟
۸. $(n+1)$ عدد از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ انتخاب شده است، نشان دهید از میان اعداد انتخاب شده یکی بر دیگری بخش پذیر است.

شمارش و توابع مولد

۹. درون یک اتاق به مساحت ۵ متر مربع، ۹ قالیچه به مساحت یک متر مربع و با شکل دلخواه پهن کرده‌ایم. (ممکن است قالیچه‌ها مستطیل شکل نباشند) نشان دهید دو قالیچه وجود دارند که به اندازه حداقل $\frac{1}{4}$ متر مربع اشتراک دارند.
۱۰. نشان دهید هرگاه ۱۴ عدد از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 25\}$ انتخاب نماییم دو عدد در این انتخاب وجود دارند که حاصل جمع آنها ۲۶ است.
۱۱. ۱۰ عدد طبیعی متمایز و کوچکتر از ۱۰۷ مفروض هستند. با استفاده از اصل لانه کبوتری نشان دهید که دو زیر مجموعه مجزا و ناتهی از این دو عدد یافت می‌شود که مجموع آنها یکسان است.
۱۲. تابع مولد هر یک از رشته‌های زیر را به دست آورید. توجه نمایید $C_n^k = \binom{n}{k}$.
 - الف) $c_0^0, c_0^1, c_0^2, \dots, c_0^n, \dots$
 - ب) $c_0^0, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0, \dots$
 - ج) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$
 - د) $0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, -3, 3, -3, 3, \dots$
۱۳. رشته تولید شده توسط هر یک از توابع مولد زیر را بیابید.
 - الف) $F(x) = (3x-2)^2$
 - ب) $F(x) = \frac{x^2}{1+2x}$
 - ج) $F(x) = \frac{1}{1+x} + 4x^5 - 1$
 - د) $F(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{5x}{1-x}$
۱۴. ضریب x^4 در بسط عبارت $\frac{1}{(x-2)(x-2)}$ به دست آورید.
۱۵.
 - الف) ضریب x^4 در عبارت $(1+x+x^2+\dots)^{15}$ پیدا کنید.
 - ب) ضریب x^{10} در عبارت $(x^7+x^3+x^2+x^0+x^6)^5$ بیابید.

ج) ضریب x^4 را در عبارت $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots)^2$ بیابید.

۱۶. به چند طریق می‌توان از یک سکه ۱ ریالی، یک سکه ۲ ریالی، یک سکه ۵ ریالی، یک سکه ۱۰ ریالی و ۴ سکه بیست ریالی، چهار سکه انتخاب کرد؟

۱۷. تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $x_1+x_2+x_3+x_4=27$ را با شرط $3 \leq x_i \leq 8$ به دست آورید.

فصل هفتم

روابط بازگشتی

اهداف:

در پایان این فصل انتظار می‌رود:

- مفهوم روابط بازگشتی و مفاهیم اساسی آن را توضیح دهد.
- بتواند ابزار روابط بازگشتی را در حل مسائل شمارش بکار گیرد.
- روابط بازگشتی همگن را حل نماید.
- جواب‌های عمومی و خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن مرتبه دوم و بالاتر را در شرایط متفاوت بیابد.
- با استفاده از توابع مولد بتواند رابطه بازگشتی را حل نماید.

۷-۱- مقدمه‌ای بر روابط بازگشتی

فرض کنید یک ویروس کامپیوتری بتواند در هر ساعت دوبرابر کامپیوترهای موجود در شبکه را آلوده نماید. اگر این ویروس در ابتدا بر روی ۵ کامپیوتر از یک شبکه جهانی وجود داشته باشد؛ بعد از n ساعت چند کامپیوتر در شبکه ویروسی خواهند شد؟ تعداد کامپیوترهای ویروسی شده در ساعات مختلف عبارتند از:

زمان	شروع	بعد از ۱ ساعت	بعد از ۲ ساعت	...	بعد از n ساعت	...
تعداد کامپیوترهای ویروسی شده	۵	۱۰	۲۰	...	?	...

برای حل این مسأله، فرض می‌شود a_n تعداد کامپیوترهای ویروسی شده بعد از ساعت n ام است. از آنجا که سرعت رشد ویروس در هر ساعت دو برابر است و در ساعت $(n-1)$ ام تعداد کامپیوترهای ویروسی شده a_{n-1} می‌باشد، بنابراین:

$$a_n = 2a_{n-1}$$

از این‌که در ابتدا ۵ کامپیوتر ویروسی شده‌اند، داریم:

$$a_1 = 5$$

به رابطه $f(x) = \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ a_1 = 5 \end{cases}$ یک رابطه بازگشتی گویند. زیرا a_n بر حسب جمله ماقبل خود محاسبه می‌شود.

می‌توان از شیوه بازگشتی برای تعریف دنباله‌ها، توابع و مجموعه‌ها استفاده نمود. به این صورت که گاهی در یک دنباله برای محاسبه مقادیر یک جمله لازم است مقادیر برخی جملات نظیر a_{n-1} و a_{n-2} مشخص باشد.

به‌طور مثال رابطه بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 5 \\ a_1 = 3, n > 1 \end{cases}$$

این رابطه این‌طور بیان می‌کند که برای محاسبه مقادیر هر جمله کافی است به سه برابر جمله قبلی آن، پنج واحد اضافه شود. به‌عنوان مثال:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2(3) + 5 = 11 \\ a_3 &= 2(11) + 5 = 27 \\ a_4 &= 2(27) + 5 = 59 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب می‌توان همه جملات دنباله را مرحله به مرحله به دست آورد.

تعریف رابطه بازگشتی: یک رابطه بازگشتی از مرتبه k برای دنباله a_n فرمولی است که جمله n ام دنباله را بر حسب k جمله پیشین دنباله، یعنی $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$ بیان می‌کند. (k عددی صحیح و $n \geq k$)

شرایط مرزی: به مقادیر اولیه معلوم $a_1, a_2, \dots, a_k$ از دنباله a_n شرایط مرزی گفته می‌شود.

مثال ۷-۱: در رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$ مقادیر a_3 و a_4 را به دست آورید.

حل:

در این رابطه جمله a_n بر حسب دو جمله a_{n-1} و a_{n-2} تعریف می‌شود. توجه نمایید که a_1, a_2 شرایط مرزی این دنباله هستند

$$a_3 = 2a_2 - a_1 = 2(2) - 1 = 3$$

$$a_4 = 2a_3 - a_2 = 2(3) - 2 = 4$$



۷-۲- مدل‌سازی با استفاده از روابط بازگشتی

مثال ۷-۲: خرگوش‌ها و اعداد فیبوناچی: در قرن سیزدهم لئوناردو پیزانو^۱ معروف به فیبوناچی^۲ در کتاب *Liber abaci* مسأله زاد و ولد خرگوش‌ها را این‌گونه مطرح کرد:

1. Leonardo Pisano
2. Fibonacci

یک جفت خرگوش (نر و ماده) در یک جزیره رها می‌شوند. این دو در دو ماه اول زاد و ولد نمی‌دارند. پس از گذشت دو ماه، در هر ماه یک جفت خرگوش دیگر به دنیا می‌آورند. این قضیه در مورد خرگوش‌های تازه به دنیا آمده نیز برقرار است.

جفت‌های مولد (حداقل دو ماهه)	جفت‌های متولد شده (کمتر از دو ماهه)	ماه	جفت‌های مولد	جفت‌های متولد شده	جفت‌های موجود
		۱	۰	۱	۱
		۲	۰	۱	۱
		۳	۱	۱	۲
		۴	۱	۲	۳
		۵	۲	۳	۵
		۶	۳	۵	۸

شکل ۷-۱. خرگوش‌ها و اعداد فیبوناچی

با فرض آنکه هیچ خرگوشی نمی‌میرد، رابطه بازگشتی‌ای بیابید که نشان‌دهنده پس از n ماه چند خرگوش وجود خواهند داشت؟
حل:

فرض کنید a_n تعداد زوج خرگوش پس از گذشت n ماه باشد. تعداد جفت خرگوش‌ها می‌تواند با استفاده از رابطه بازگشتی مدل شود. از آنجا که در ابتدا هیچ خرگوشی در جزیره وجود نداشت لذا $a_0 = 0$ و در ماه اول و دوم همان‌طور که در شکل ۷-۱ دیده می‌شود $a_1 = 1$ و $a_2 = 1$ با توجه به مطالب اخیر دیده می‌شود که تعداد خرگوش‌های "موجود" در انتهای ماه n برابر با تعداد جفت‌های "موجود" در انتهای ماه $(n-1)$ به اضافه تعداد جفت خرگوش‌های "متولد شده" در انتهای ماه n است.

تعداد جفت خرگوش‌های "متولد شده" در انتهای ماه n نیز برابر تعداد جفت خرگوش‌های "موجود" در انتهای ماه $(n-2)$ است، زیرا در انتهای ماه n ، جفت خرگوش‌های متولد شده در انتهای ماه $(n-1)$ ، هنوز تولیدمثل نکرده‌اند. پس تنها جفت خرگوش‌های موجود در ماه $(n-2)$ هستند که در انتهای ماه n ، تولیدمثل می‌کنند. پس:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

بنابراین دنباله فیبوناچی دارای رابطه بازگشتی زیر است:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 1 \end{cases}$$

این دنباله را اعداد فیبوناچی نامند. به عنوان مثال جملات a_3, a_4, a_5 به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

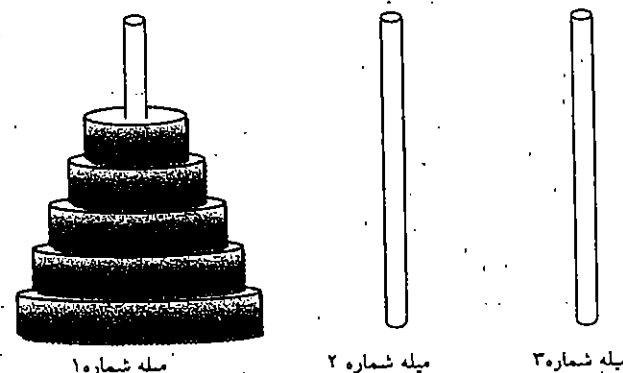
همان‌طور که در مثال اخیر مطرح شد، حل یک مسأله به صورت بازگشتی به معنای پیدا کردن راهی برای شکستن مسأله مزبور به زیر مسائل است که صورت ظاهری آنها مشابه مسأله اولیه است. این روند برای زیرمسائل کوچک‌تر، آنقدر تکرار می‌شود تا آخرین زیر مسائل را بتوان به صورت ساده‌تری حل کرد. گام پایانی در این روش، ترکیب جواب‌های حاصل از زیر مسائل کوچک‌تر با یکدیگر و به دست آوردن جواب کلی برای مسأله است.

که مثال ۷-۳: برج‌های هانوی: در اواخر قرن نوزدهم پازل برج هانوی توسط ادوارد لوکاس^۱ ریاضی‌دان فرانسوی بیان شد.

در این پازل فرض بر این است که n دیسک با قطرهای متفاوت مطابق شکل روی میله شماره ۱ به ترتیب از بزرگ به کوچک (به قسمی که کوچک‌ترین دیسک روی همه دیسک‌ها باشد) قرار گرفته باشد. می‌خواهیم که بدون به هم خوردن ترتیب،

۱. Edvard Lucas

دیسک‌ها به میله شماره ۲ منتقل شوند. برای این منظور از میله شماره ۳ به عنوان مکان موقت دیسک‌ها استفاده می‌شود.



شکل ۷-۲. حالت اولیه مسأله برج‌های هانوی

سوال این است که با چند حرکت، انتقال دیسک‌ها به میله ۲ انجام می‌شوند؟ به عنوان مثال اگر ۲ دیسک داشته باشیم:

- ابتدا دیسک کوچک‌تر را به میله ۳ منتقل کرده،
 - سپس دیسک بزرگ را به میله ۲ انتقال داده،
 - در مرحله آخر دیسک کوچک از میله ۳ به میله ۲ منتقل می‌شود.
- یعنی در مجموع در ۳ حرکت این دو دیسک از میله ۱ به میله ۲ منتقل می‌شوند. به ازای $n \geq 2$ فرض کنید a_n حداقل تعداد حرکت‌هایی باشد که n دیسک به میله ۲ منتقل می‌شوند.

مرحله اول شکستن مسأله به زیرمسأله‌هاست:

الف) ابتدا بالاترین $(n-1)$ دیسک، طبق ترتیب کوچک به بزرگ از میله ۱ به ۳ منتقل می‌شوند. بنابه تعریف، این عمل در a_{n-1} حرکت انجام می‌پذیرد، که فعلاً فرمول صریح آن در دسترس نیست.

ب) بزرگ‌ترین دیسک، از میله ۱ به میله ۲ منتقل می‌شود که یک حرکت می‌شود.

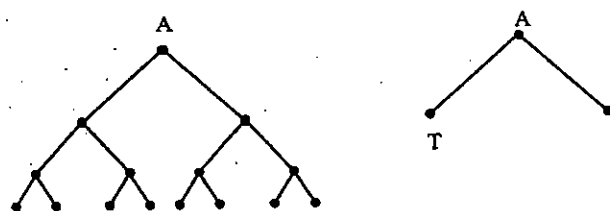
ج) سرانجام $(n-1)$ دیسک روی میله ۳ را با رعایت ترتیب کوچک به بزرگ به میله ۲ منتقل می‌شوند. این عمل نیز به a_{n-1} حرکت دیگر نیاز دارد. مرحله دوم ترکیب زیرمسأله‌هاست. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

دقت نمایید تاکنون یک جواب کلی برای مسأله حاصل شده و هنوز دنباله صریحی بیان نشده است. در ادامه فصل به حل دنباله بازگشتی و یافتن دنباله صریح برای a_n پرداخته خواهد شد.

ک) مثال ۷-۴: درخت m تایی کامل T_m به عمق n را در نظر بگیرید. رابطه‌ای بازگشتی برای محاسبه تعداد رأس‌های T_m بیابید.

حل: مرحله اول شکستن مسأله به زیرمسأله‌هاست. با اندکی ملاحظه دیده می‌شود که یک درخت m تایی کامل به عمق n از دو درخت کامل با عمق $(n-1)$ و یک ریشه تشکیل شده است. به عنوان مثال شکل ۷-۳، T_2 را به عمق ۳ نشان می‌دهد.



شکل ۷-۳

در این شکل درخت T_2 به عمق ۳ از دو درخت کامل T_1 به عمق ۲ و یک ریشه A تشکیل شده است پس تعداد رئوس T_2 شامل تعداد رئوس T_1 و یک رأس A می‌باشد. از طرفی تعداد رئوس درخت کامل به عمق صفر برابر با یک می‌باشد.

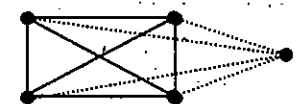
در نتیجه با ترکیب زیر مسأله‌ها اگر $V(n)$ تعداد رئوس T_n باشد آن‌گاه:

$$\begin{cases} V(n) = 2V(n-1) + 1 & n > 1 \\ V(0) = 1 \end{cases}$$

مثال ۵-۷: یک رابطه بازگشتی برای محاسبه تعداد یال‌های گراف کامل K_n بیابید.

حل:

در مرحله شکستن مسأله به زیر مسأله‌ها، گراف کامل K_{n-1} با $n-1$ رأس را در نظر بگیرید. با اضافه کردن یک رأس و $(n-1)$ یال می‌توان گراف K_n را تشکیل داد. به عنوان مثال شکل ۴-۷ چگونگی ساختن گراف K_4 را از روی گراف K_3 با اضافه کردن یک رأس ۷ و چهار یال نشان می‌دهد.



شکل ۴-۷

توجه داریم که تعداد یال‌های گراف تک رأسی کامل صفر است. بنابراین اگر $E(n)$ تعداد یال‌های گراف K_n باشد، با ترکیب زیر مسأله‌ها:

$$\begin{cases} E(n) = E(n-1) + (n-1) & n > 1 \\ E(1) = 0 \end{cases}$$

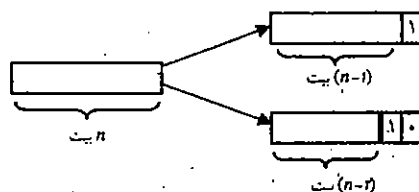
مثال ۶-۷: تعداد رشته‌های ۸ بیتی که دو صفر متوالی ندارند را بیابید.

حل:

به عنوان نمونه ۱۱۱۱۱۱۱۱ و ۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰ رشته‌هایی به طول ۸ هستند که دو صفر متوالی ندارند.

مرحله اول: (شکستن مسأله به زیر مسأله‌ها) اگر a_n تعداد رشته‌های ۸ بیتی فاقد دو صفر متوالی باشد، به وضوح این رشته‌ها ۲ دسته‌اند.

الف) تعداد رشته‌هایی که به عدد ۱ ختم می‌شوند، a_{n-1} می‌باشد. زیرا رقم آخر آنها ثابت و $(n-1)$ رقم پیش از رقم آخر نباید دو صفر متوالی داشته باشد.
ب) رشته‌هایی که به عدد صفر ختم می‌شوند. این رشته‌ها لزوماً رقم ماقبل آخرشان ۱ می‌باشد و تعداد آنها a_{n-2} می‌باشد. زیرا $(n-2)$ رقم پیش از دو رقم آخر نباید حاوی دو صفر متوالی باشد.



شکل ۵-۷. رشته‌های n بیتی

با ترکیب زیر مسأله‌ها، رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ با دو شرط اولیه $a_1 = 2$ (تعداد رشته‌های یک بیتی دوتاست) و $a_2 = 3$ (زیرا تعداد رشته‌های ۲ بیتی بدون دو صفر متوالی ۳ رشته ۰۱ و ۱۰ و ۱۱ می‌باشد) به دست می‌آید. بنابراین فرمول بازگشتی این مسأله به صورت:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, & n \geq 3 \\ a_1 = 2, & a_2 = 3 \end{cases}$$

خواهد بود. توجه داریم که رابطه بازگشتی به دست آمده همان دنباله بازگشتی فیبوناچی است. طبق رابطه بازگشتی a_n برابر است با:

$$a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 13, a_6 = 21, a_7 = 34, a_8 = 55$$

مثال ۷-۷: یک سیستم کامپیوتری دنباله‌ای از اعداد در مبنای ۱۰ را یک کد صحیح تشخیص می‌دهد، هرگاه تعداد صفرهای آن عدد زوج باشد (به عنوان مثال ۱۲۳۰۴۰۷۸۶۸ کدی صحیح و ۱۲۰۹۸۷۰۴۵۶۰۸ یک کد ناصحیح است). حال اگر a_n تعداد کدهای صحیح n رقمی باشد، یک رابطه بازگشتی برای a_n به دست آورید.

حل:

اولاً $a_1=9$ زیرا ۹ کد صحیح یک رقمی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ داریم (کد ۰ صحیح نیست).
حال می‌توان تعداد کدهای صحیح n رقمی را از روی تعداد کدهای $(n-1)$ رقمی محاسبه کرد. به دو روش می‌توان یک کد صحیح n رقمی از روی یک کد $(n-1)$ رقمی تولید کرد.

الف) کد $(n-1)$ رقمی مورد نظر، کدی صحیح است. با اضافه کردن یکی از ارقام ۱ تا ۹ به انتهای آن می‌توان یک کد صحیح n رقمی ساخت. در این حال کدهای صحیح n رقمی برابر است با $9a_{n-1}$.

ب) کد $(n-1)$ رقمی مورد نظر، کدی غیر صحیح است. با اضافه کردن یک صفر به انتهای آن تعداد صفرها زوج خواهد شد و یک کد صحیح n رقمی به دست می‌آید. از آنجا که تعداد کدهای $(n-1)$ رقمی 10^{n-1} و کدهای صحیح $(n-1)$ رقمی a_{n-1} می‌باشد، پس تعداد کدهای غیر صحیح $(n-1)$ رقمی برابر است با $10^{n-1} - a_{n-1}$.

لذا با ترکیب دو حالت خواهیم داشت.

$$a_n = 9a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1} = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$$

۳-۷-۳ حل روابط بازگشتی

▣ رابطه بازگشتی با ضرایب ثابت از مرتبه k اگر $k \geq 0$ و $c_n \neq 0, c_{n-1} \neq 0, \dots, c_{n-k} \neq 0$ و $c_{n-k} \neq 0$ اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه:

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k) \quad (1-7)$$

یک رابطه بازگشتی با ضرایب ثابت از مرتبه k است.

▣ رابطه بازگشتی همگن: اگر در رابطه (۱-۷) به ازای هر $n \geq 0$ ، $f(n)=0$ باشد، آن‌گاه رابطه بازگشتی را همگن گویند. در صورتی که مقدار $f(n)$ غیر صفر باشد رابطه بازگشتی را ناهمگن گویند.

به عنوان مثال رابطه مسأله برج هانوی $n \geq 2$ $a_n = 2a_{n-1} + 1$ رابطه ناهمگن از مرتبه یک می‌باشد.

▣ حل روابط بازگشتی: منظور از حل یک رابطه بازگشتی، یافتن دنباله‌ای با جمله عمومی از اعداد حقیقی است که در معادله بازگشتی مفروض صدق کند. به عبارت دیگر اگر تابع $g(n)$ چنان باشد که به ازای $n=0, 1, 2, \dots$ $a_n = g(n)$ در رابطه بازگشتی (۱-۷) صدق کند آن‌گاه $g(n)$ یک جواب رابطه بازگشتی است. به $g(n)$ جمله عمومی یا فرمول صریح رابطه بازگشتی گویند.

۷-۳-۱-۱ حل روابط بازگشتی همگن مرتبه اول با روش تکرار

یک رابطه بازگشتی مرتبه اول همگن به صورت $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} = 0$ ($c_n \neq 0, c_{n-1} \neq 0$) تعریف می‌شود. روش تکرار، تکنیکی است که می‌توان از آن در حل روابط بازگشتی همگن مرتبه اول یاری جست. در این شیوه به کمک شرایط مرزی و رابطه بازگشتی چند جمله اول را نوشته و بر اساس منطق جملات، جمله عمومی حدس زده می‌شود. سپس به کمک استقرای ریاضی، جمله حدس زده شده، اثبات می‌گردد.

▣ مثال ۷-۳-۱-۱: جمله عمومی رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} & n \geq 1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$ را بیابید.

حل:

این رابطه یک رابطه بازگشتی همگن مرتبه اول می‌باشد. که چهار جمله نخست عبارتند از:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= 2a_0 = 2(3) \\ a_2 &= 2a_1 = 2(2a_0) = 2^2(3) \\ a_3 &= 2a_2 = 2(2^2a_0) = 2^3(3) \end{aligned}$$

با استفاده از این جملات، حدس زده می‌شود که $a_n = 3(2^n)$ $n \geq 1$. این فرمول را جواب عمومی یا فرمول صریح رابطه بازگشتی مفروض نامند. جهت اثبات حدس اخیر می‌توان از استقرای ریاضی استفاده نمود:

در این حالت جواب عمومی رابطه بازگشتی به صورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ که در آن c_1, c_2 ثابت‌های دلخواهی هستند و در صورت مشخص بودن شرایط مرزی قابل محاسبه‌اند.

تعمیم: راه حل ارائه شده برای معادله بازگشتی مرتبه دوم ناهمگن کلی است و می‌توان هر رابطه بازگشتی از مرتبه k ام را با تشکیل معادله مشخصه و به‌دست آوردن ریشه‌های معادله مشخصه حل نمود.

مثال ۷-۹: رابطه بازگشتی مرتبه اول همگن $\begin{cases} a_n = \gamma a_{n-1} & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

در رابطه بازگشتی قرار می‌دهیم $a_n = r^n$ خواهیم داشت: $r^n - \gamma r^{n-1} = 0$ پس از فاکتورگیری از عامل r^{n-1} داریم: $r^{n-1}(r - \gamma) = 0$ بنابراین $r - \gamma = 0$ معادله مشخصه و $r = \gamma$ ریشه ساده آن است. جواب عمومی رابطه بازگشتی برابر $a_n = c(\gamma)^n$ است. با جایگذاری شرط مرزی $a_0 = 1$ داریم:

$$a_0 = 1 = c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a_n = \gamma^n$$

مثال ۷-۱۰: رابطه بازگشتی (دنباله فیبوناچی) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

در رابطه بازگشتی قرار می‌دهیم $a_n = r^n$ خواهیم داشت: $r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$ اکنون از r^{n-2} فاکتور گرفته می‌شود و از آنجا:

$$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0$$

حاصل شده که معادله مشخصه $r^2 - r - 1 = 0$ می‌باشد. دو ریشه این معادله به صورت $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ می‌باشند. لذا جواب عمومی دنباله عبارتست از:

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

• گام استقرا: $n=0$ برقرار است.

• فرض کنیم حکم برای $n=k$ برقرار باشد، با توجه به رابطه بازگشتی ثابت می‌کنیم:

$$a_{k+1} = 3(2^k + 1)$$

اما

$$3(2^{k+1} + 1) = 3(2^k)(2) = a_k(2) = a_{k+1}$$

لذا حکم استقرا برقرار است و جمله عمومی رابطه بازگشتی فوق $a_n = 3(2^k)$ است.

۷-۳-۲- حل روابط بازگشتی همگن مرتبه دوم

یک رابطه بازگشتی همگن با ضرایب ثابت از مرتبه ۲ به صورت زیر است:

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = 0 \quad n \geq 2 \quad (2-7)$$

یک تکنیک اساسی برای حل رابطه‌های بازگشتی همگن آن است که به دنبال یافتن جوابی به صورت $a_n = r^n$ ($r \neq 0$) باشیم. اگر $a_n = r^n$ را در رابطه (۲-۷) قرار دهیم تساوی $r^n + c_{n-1} r^{n-1} + c_{n-2} r^{n-2} = 0$ به‌دست می‌آید. از آنجا با فاکتورگیری عامل r^{n-2} (عامل با توان کمتر) از طرفین تساوی، معادله درجه دوم $c_n r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2} = 0$ حاصل می‌شود که آن را معادله مشخصه نامند.

لذا دنباله $a_n = r^n$ جواب رابطه بازگشتی همگن مرتبه دوم است، اگر و تنها اگر r جواب معادله مشخصه اخیر باشد. بنابراین کافی است ریشه معادله مشخصه محاسبه شود.

اگر ریشه‌های این معادله را r_1 و r_2 بنامیم سه حالت ممکن است:

(الف) r_1 و r_2 دو عدد حقیقی متمایزند.

(ب) r_1 و r_2 دو ریشه حقیقی مضاعف هستند.

(ج) r_1 و r_2 دو عدد مختلط مزدوج اند.

• حالت (الف) (ریشه‌های حقیقی و متمایز):

برای یافتن c_1, c_2 از شرایط مرزی کمک می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$a_0 = 0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

$$a_1 = 1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

با جایگذاری $c_2 = -c_1$ در معادله دوم می‌توان نوشت:

$$1 = c_1(1+\sqrt{5}) - c_1(1-\sqrt{5}) \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

و جواب مطلوب عبارتست از:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad n \geq 0$$

که مثال ۱۱-۷: رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \\ a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15 \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

در رابطه بازگشتی قرار می‌دهیم $a_n = r^n$ خواهیم داشت: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$. اکنون از r^3 فاکتور گرفته و از آنجا $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ حاصل شده که معادله مشخصه برابر $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ می‌باشد. سه ریشه این معادله به صورت $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$ می‌باشند. لذا جواب عمومی دنباله عبارتست از:

$$a_n = c_1(1)^n + c_2(2)^n + c_3(3)^n$$

برای یافتن c_1, c_2, c_3 به کمک شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_0 = 2 = c_1 + c_2 + c_3 \\ a_1 = 5 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ a_2 = 15 = c_1 + 4c_2 + 9c_3 \end{cases}$$

با حل این دستگاه $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 2$ به دست می‌آید. بنابراین

$$a_n = 1 - (2)^n + 2(3)^n$$

• حالت ب) معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $r_1 = r_2 = r$ می‌باشد. در این حالت جواب عمومی به صورت $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$ است.

در حالت کلی، اگر $(n \geq k)$ $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = 0$ و $c_n \neq 0$ اعداد حقیقی و r یک ریشه تکراری مکرر از مرتبه m ($2 \leq m \leq k$) باشد آن‌گاه جواب عمومی به صورت:

$$(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$$

است که در آن $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ ثابت‌های دلخواهی هستند.

که مثال ۱۲-۷: جواب رابطه بازگشتی $\begin{cases} 4a_n + 4a_{n+1} + a_{n+2} = 0 \\ a_0 = 1, a_1 = 1 \end{cases}$ را بیابید.

حل:

با قرار دادن $a_n = r^n$ در رابطه بالا خواهیم داشت: $4r^n + 4r^{n+1} + r^{n+2} = 0$. با فاکتورگیری از عامل r^n به عبارت $r^2(4r^2 + 4r + 1) = 0$ می‌رسیم و از آنجا معادله مشخصه $4r^2 + 4r + 1 = 0$ حاصل شده که دارای ریشه مضاعف $r = -\frac{1}{2}$ است. بنابراین جواب عمومی این رابطه عبارتست از:

$$a_n = c_1 \left(-\frac{1}{2} \right)^n + c_2 n \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

با جایگذاری شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$c_1 = 1, c_2 = -3$$

و جمله عمومی برابر است با:

$$a_n = \left(-\frac{1}{2} \right)^n - 3n \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

که مثال ۱۳-۷: رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0 \\ a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = -1 \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

با قراردادن $a_n = r^n$ در رابطه بازگشتی و فاکتورگیری از عامل r^{n-3} به عبارت $r^3(r^3 + 3r^2 + 3r + 1) = 0$ خواهیم رسید. بنابراین معادله مشخصه به صورت

$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3 = 0$ به دست می‌آید که به وضوح دارای سه ریشه تکراری $r = -1$ می‌باشد و خواهیم داشت:

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2)(-1)^n$$

به کمک شرایط مرزی می‌توان c_1, c_2, c_3 را یافت:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = c_1 \\ a_1 = -2 = -c_1 - c_2 - c_3 \Rightarrow c_2 + c_3 = 1 \\ a_2 = -1 = c_1 + 2c_2 + c_3 \Rightarrow 2c_2 + c_3 = -2 \end{cases}$$

و از آنجا $c_2 = 3, c_3 = -2$ بنابراین $a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$ جواب معادله است.

● حالت ج) معادله مشخصه دارای دو ریشه موهومی r_1, r_2 باشد؛ در این حالت جواب عمومی رابطه بازگشتی عبارتست از $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ که در آن c_1 و c_2 دو عدد ثابت هستند. البته دقت شود برای به دست آوردن جواب a_n از نمایش مثلثاتی اعداد موهومی استفاده می‌کنیم.

کله مثال ۷-۱۴: رابطه بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} & n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

حل:

در رابطه بازگشتی قرار می‌دهیم $a_n = r^n$ و لذا داریم:

$$r^n - 2r^{n-1} + 2r^{n-2} = 0 \Rightarrow r^{n-2}(r^2 - 2r + 2) = 0$$

از آنجا معادله مشخصه $r^2 - 2r + 2 = 0$ حاصل می‌شود که ریشه‌های آن عبارتست از:

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}i}{2} = 1 \pm i \Rightarrow r_1 = 1+i, r_2 = 1-i$$

بنابراین جواب عمومی رابطه مزبور به صورت $a_n = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n$ می‌باشد. اما در a_n تمایز مثلثاتی r_1, r_2 جایگذاری می‌شود.

بنابراین:

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(1+i)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$(1-i)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

لذا:

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) + c_2 \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2}^n \cos \frac{n\pi}{4} (c_1 + c_2) + i \sqrt{2}^n \sin \frac{n\pi}{4} (c_1 - c_2) \end{aligned}$$

حال با تعریف $k_1 = c_1 + c_2$ و $k_2 = i(c_1 - c_2)$ می‌توان نوشت:

$$a_n = \sqrt{2}^n (k_1 \cos \frac{n\pi}{4} + k_2 \sin \frac{n\pi}{4})$$

اکنون می‌توان ضرایب حقیقی k_1, k_2 را با استفاده از شرایط مرزی به دست آورد.

$$a_0 = 1 = k_1 \cos 0 + k_2 \sin 0 = k_1 \Rightarrow k_1 = 1$$

$$a_1 = 2 = \sqrt{2} \left(1 \times \cos \frac{\pi}{4} + k_2 \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + k_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + k_2 \Rightarrow k_2 = 1$$

بنابراین:

$$a_n = \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) \quad n \geq 0$$

۷-۳-۳- حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

همان‌طور که بیان شد صورت کلی رابطه بازگشتی ناهمگن از مرتبه k با ضرایب ثابت به صورت زیر است:

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k)$$

که در آن ضرایب ثابت غیر صفر می‌باشند. همچنین $f(n)$ یک تابع غیر صفر بر حسب متغیر n می‌باشد.

نکته:

الف) در بند ۴ قسمت ب) اگر عدد یک، ریشه مکرر معادله مشخصه با تکرار باشد، معادل با ترکیب قسمت ب) در بندهای ۱ و ۲ می‌باشد. به عبارت دیگر عامل حاصل شده n^2 حاصل ضربی از دو عامل n^2 در قسمت ب بند ۱ و n^2 در قسمت ب بند ۲ می‌باشد.

ب) اگر $f(n)$ به صورت حاصل جمعی از توابع ارائه شده در ستون سمت راست جدول ۱-۷ باشد $a_n^{(p)}$ نیز مساوی حاصل جمع جملات متناظر در ستون سمت چپ جدول می‌باشد.

مثال ۷-۱۵: دنباله بازگشتی مسأله برج هانوی $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1 & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

رابطه بازگشتی $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ناهمگن است. برای حل آن، ابتدا رابطه بازگشتی همگن $a_{n+1} - 2a_n = 0$ را حل و سپس جواب خصوصی را با توجه به $f(n) = 1$ به دست می‌آوریم.

در رابطه همگن قرار می‌دهیم $a_n = r^n$ از آنجا:

$$r^{n+1} - 2r^n = 0 \Rightarrow r^n(r-2) = 0 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین $a_n^{(h)} = c(2^n)$ جواب عمومی رابطه بازگشتی است.

از آنجایی که $f(n) = c = 1$ می‌باشد و $c = 1$ ریشه ای از معادله مشخصه نیست بنا

به حالت ۳-الف در جدول ۱-۷ می‌توان گفت: $a_n^{(p)} = A$

پس $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c(2^n) + A$. حال برای به دست آوردن ضریب A در جواب رابطه بازگشتی ابتدا جواب خصوصی $a_n^{(p)} = A$ را در دنباله بازگشتی اولیه قرار داده و به تساوی $A = 2A + 1$ می‌رسیم. پس $A = -1$. در نتیجه $a_n = c(2^n) - 1$ از طرفی برای یافتن ضریب c ، با توجه به شرایط مرزی، تساوی $a_1 = c(2^1) - 1 = 2c - 1 = 1$ حاصل شده و $c = 1$ به دست می‌آید. بنابراین: $a_n = 2^n - 1$ ($n \geq 2$)

جواب عمومی روابط بازگشتی مرتبه دوم ناهمگن:

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = f(n) \quad (3-7)$$

به صورت $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ است که در آن $a_n^{(h)}$ جواب عمومی رابطه بازگشتی همگن $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = 0$ و $a_n^{(p)}$ یک جواب خصوصی برای رابطه (۳-۷) می‌باشد.

جواب خصوصی یک معادله به جمله $f(n)$ بستگی دارد. جدول ۱-۷ دسته‌بندی جواب خصوصی را با توجه به صورت‌های مختلف $f(n)$ ارائه داده است.

در این جدول $A_1, A_2, \dots, A_r, A, B$ ثابت‌هایی هستند که با جایگذاری $a_n^{(p)}$ در (۳-۷) به دست آیند.

جدول ۱-۷: جواب‌های خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

$a_n^{(p)}$	$F(n)$
الف) اگر r ریشه معادله مشخصه نباشد Ar^n ب) اگر r ریشه مکرر معادله مشخصه با تکرار s باشد $Ar^n n^s$	۱ r^n ($r \neq 0$)
الف) اگر عدد یک ریشه معادله مشخصه نباشد $A_1 + A_2 n + \dots + A_r n^{r-1}$ ب) اگر عدد یک ریشه مکرر معادله مشخصه با تکرار s باشد $n^s(A_1 + A_2 n + \dots + A_r n^{r-1})$	۲ $(i \in \mathbb{N}) n^i$
الف) اگر c ریشه معادله مشخصه نباشد A ب) اگر c ریشه مکرر معادله مشخصه با تکرار s باشد $n^s A$	۳ عدد ثابت c
الف) اگر r ریشه معادله مشخصه نباشد $r^n(A_1 + A_2 n + \dots + A_r n^{r-1})$ ب) اگر r ریشه مکرر معادله مشخصه با تکرار s باشد $n^s r^n(A_1 + A_2 n + \dots + A_r n^{r-1})$	۴ $(i \in \mathbb{N}, 0 \neq i \in \mathbb{R}) n^i r^n$
الف) اگر $\alpha \neq i$ ریشه معادله مشخصه نباشد $(A \sin \alpha n + B \cos \alpha n)$ ب) اگر $\alpha \neq i$ ریشه مکرر معادله مشخصه با تکرار s باشد $n^s (A \sin \alpha n + B \cos \alpha n)$	۵ $\cos \alpha n$ یا $\sin \alpha n$ ($\alpha \neq i \alpha$)
الف) اگر $\alpha \neq i$ ریشه معادله مشخصه نباشد $r^n (A \sin \alpha n + B \cos \alpha n)$ ب) اگر $\alpha \neq i$ ریشه مکرر معادله مشخصه با تکرار s باشد $n^s r^n (A \sin \alpha n + B \cos \alpha n)$	۶ $\left((r \neq 0) r^n \cos \alpha n \text{ یا } r^n \sin \alpha n (\alpha \neq i \alpha) \right)$

که مثال ۷-۱۶: جواب رابطه بازگشتی زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n & n \geq 2 \\ a_1 = 7, a_0 = 1 \end{cases}$$

حل:

با قرار دادن $a_n = r^n$ در معادله همگن $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ خواهیم داشت:

$$r^n - 5r^{n-1} + 6r^{n-2} = 0 \Rightarrow r^{n-2}(r^2 - 5r + 6) = 0$$

معادله مشخصه $r^2 - 5r + 6 = 0$ دو ریشه $r_1 = 2$ و $r_2 = 3$ دارد. بنابراین جواب عمومی رابطه

$$a_n^{(h)} = c_1(2^n) + c_2(3^n)$$

جواب خصوصی به فرم $f(n) = r^n = 2^n$ است که $r = 2$ ریشه معادله مشخصه

می‌باشد. از جدول ۷-۱، حالت ۱-ب جواب خصوصی به صورت $a_n^{(p)} = An(2^n)$

خواهد بود. در نتیجه:

$$a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A ، جواب خصوصی در رابطه بازگشتی اولیه قرار داده می‌شود:

$$An2^n - 5A(n-1)2^{n-1} + 6A(n-2)2^{n-2} = 2^n$$

از عامل 2^{n-2} فاکتور گرفته می‌شود:

$$2^{n-2} [2^2 An - 2(5)A(n-1) + 6A(n-2)] = 2^{n-2} (2^2)$$

با حذف 2^{n-2} از طرفین و ساده کردن عبارت، $-2A = 4 \Rightarrow A = -2$ نتیجه می‌شود.

$$a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n - 2n(2)^n$$

از طرف دیگر با توجه به شرایط مرزی می‌توان c_1 و c_2 را محاسبه نمود.

$$\begin{cases} a_0 = 1 = c_1 + c_2 \\ a_1 = 7 = 2c_1 + 3c_2 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 3c_2 = 11 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 16, c_2 = -9$$

بنابراین:

$$a_n = 16(2^n) - 9(3^n) - 2n(2^n) = 2^{n+2} - 3^{n+2} - n2^{n+1}$$

که مثال ۷-۱۷: یک جواب خصوصی برای رابطه بازگشتی

$$a_n = n^2 + 3^n$$

حل:

با قرار دادن $a_n = r^n$ در معادله همگن خواهیم داشت:

$$r^{n+2} - r^{n+1} - 2r^n = 0 \Rightarrow r^n(r^2 - r - 2) = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 2$$

برای یافتن جواب خصوصی، دو عامل 3^n و n^2 دیده می‌شود. با توجه به عامل

n^2 و از آنجا که $r = 1$ ریشه معادله مشخصه نمی‌باشد بنابه حالت ۲-الف جدول ۷-۱

$$a_n^{(p)} = A_0 + A_1 n + A_2 n^2$$

اولین جواب خصوصی عبارتست از: $r = 3$ و اینکه $r = 3$ ریشه معادله مشخصه نیست بنا به ۱-

الف دومین جواب خصوصی برابر است با:

$$a_n^{(p)} = A(3^n)$$

لذا:

$$a_n^{(p)} = a_{n_1}^{(p)} + a_{n_2}^{(p)} = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A(3^n)$$

برای یافتن ضرایب باید $a_n^{(p)}$ را در رابطه بازگشتی قرار داد:

$$(A_0 + A_1(n+2) + A_2(n+2)^2 + A(3^{n+2})) - (A_0 + A_1(n+1) + A_2(n+1)^2 + A(3^{n+1})) - 2(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A(3^n)) = n^2 + 3^n$$

$$A_0 + A_1 n + 2A_1 + A_2 n^2 + 4A_2 n + 4A_2 + A(3^{n+2}) - A_0 - A_1 n - A_1 - A_2 n^2 - 2A_2 n - 2A_2 - A(3^{n+1}) - 2A_0 - 2A_1 n - 2A_2 n^2 - 2A(3^n) = n^2 + 3^n$$

$$-2A_0 + A_1 + 2A_2 + (-2A_1 + 2A_2)n + (-2A_2)n^2 + 4A(3^n) = n^2 + 3^n$$

با متحد قرار دادن عبارتهای طرفین رابطه خواهیم داشت:

$$-2A_0 + A_1 + 2A_2 = 0$$

$$-2A_1 + 2A_2 = 0$$

$$-2A_2 = 1$$

$$4A = 1$$

در نتیجه $A = \frac{1}{4}$, $A_0 = -1$, $A_1 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = -\frac{1}{4}$ و داریم:

$$a_n^{(p)} = -1 - \frac{1}{4}n - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}(3^n)$$

►

۷-۴-۱ حل روابط بازگشتی با استفاده از توابع مولد

یکی از روش‌های حل روابط بازگشتی استفاده از توابع مولد است.

مثال ۷-۱۸: رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ a_0 = 3 \end{cases}$ را با استفاده از تابع مولد حل کنید.

حل:

فرض کنید $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ باشد. به روش زیر به دنباله صریح a_n دست می‌یابیم. ابتدا طرفین رابطه بازگشتی را در x^n که در آن n بزرگ‌ترین اندیس رابطه است، ضرب می‌شود:

$$a_n x^n = 2a_{n-1} x^n$$

با جایگزینی $n = 1, 2, 3, \dots$ تساوی‌های زیر را خواهیم داشت:

$$a_1 x = 2a_0 x$$

$$a_2 x^2 = 2a_1 x^2$$

$$a_n x^n = 2a_{n-1} x^n$$

با جمع طرفین تساوی‌های اخیر، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 2a_0 x + \dots + 2a_{n-1} x^n$$

ملاحظه می‌شود که عبارت سمت چپ فاقد a_0 است. با توجه به فرض:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots$$

تابع مولد $g(x)$ را در عبارت بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$g(x) - a_0 = 2xg(x) \Rightarrow g(x) = \frac{a_0}{1-2x} = \frac{3}{1-2x}$$

اکنون از بند ۷ از جدول ۱-۶ (در فصل قبل) با قرار دادن $2x$ به جای x

$$g(x) = \frac{3}{1-2x} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3(2^n) x^n$$

بنابراین $a_n = 3(2^n)$ جواب عمومی رابطه بازگشتی مسأله است.

►

مثال ۷-۱۹: با استفاده از تابع مولد رابطه بازگشتی مسأله برج هانوی را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \quad n \geq 1$$

حل:

فرض کنید $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ باشد. نخست طرفین رابطه بازگشتی را در x^n ضرب می‌کنیم: $a_n x^n = 2a_{n-1} x^n + x^n$. سپس همه معادلات حاصل شده به‌ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ را با هم جمع می‌کنیم. بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad (4-7)$$

طبق تعریف تابع مولد $g(x)$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = g(x) - a_0$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = xg(x)$$

از طرفی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - x^0 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

با جایگذاری در (۴-۷)

$$g(x) - a - 2xg(x) = \frac{x}{1-x} \text{ و } a=0 \Rightarrow g(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

$g(x)$ را به صورت زیر به کسرهای ساده‌تر تجزیه می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x}$$

پس از اعمال مخرج مشترک و متحد قرار دادن دو کسر $a=-1$ و $b=1$ حاصل خواهد شد. با جایگذاری تساوی‌های جدول ۱-۶ داریم:

$$g(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n$$

بنابراین $a_n = 2^n - 1$ جواب عمومی رابطه بازگشتی مسأله برج هانوی خواهد بود.

مثال ۷-۲۰: با استفاده از تابع مولد رابطه بازگشتی مثال ۷-۷ را حل کنید.

حل:

فرض کنید $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ باشد، ابتدا طرفین رابطه را در x^n

ضرب می‌کنیم: $a_n x^n = \lambda a_{n-1} x^n + 1 \cdot 0^{n-1} x^n$

پس از جمع همه معادلات حاصل شده به‌ازای $n=1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} g(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot 0^{n-1} x^n \\ &= \lambda x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot 0^{n-1} x^{n-1} \\ &= \lambda x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot 0^n x^n = \lambda x g(x) + \frac{x}{1-0 \cdot x} \end{aligned}$$

$$g(x) - 1 = \lambda x g(x) + \frac{x}{1-0 \cdot x}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1-0x}{(1-\lambda x)(1-0 \cdot x)} = \frac{1}{1-\lambda x} \left(\frac{1}{1-\lambda x} + \frac{1}{1-0 \cdot x} \right)$$

از بند ۷. جدول ۱-۶:

$$g(x) = \frac{1}{1-\lambda x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot 0^n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda} (\lambda^n + 1 \cdot 0^n) x^n$$

در نتیجه:

$$a_n = \frac{1}{1-\lambda} (\lambda^n + 1 \cdot 0^n)$$



چند نمونه مسأله حل شده

۱. فرض کنید شخصی مبلغ ۱۰۰۰۰۰ تومان در یک حساب سپرده کوتاه مدت که بهره آن ۱۱٪ می باشد پس انداز می کند. پس از مدت ۳۰ سال مبلغ پس انداز شخص در این حساب چه مقدار خواهد بود؟

حل:

فرض کنید a_n بیانگر مبلغ باقیمانده در حساب پس از n سال باشد. از آنجایی که مبلغ باقیمانده در حساب بعد از n سال برابر است با مبلغ باقیمانده در حساب بعد از $(n-1)$ سال به علاوه سود متعلق به آن در سال n ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 0.11 a_{n-1} = 1.11 a_{n-1} \\ a_0 = 100000 \end{cases}$$

معادله مشخصه آن به فرم $r - 1.11 = 0$ است و $r = 1.11$ ریشه ساده آن می باشد پس $a_n = c(1.11)^n$ یا جایگذاری شرط مرزی $a_0 = 100000$ خواهیم داشت:

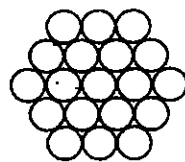
$$A_0 = 100000 = c(1.11)^0 \Rightarrow c = 100000$$

$$\text{بنابراین } a_n = 100000 \times (1.11)^n \text{ و } a_{30} = 100000 \times (1.11)^{30}$$

۲. در یک بازی، هدف این است که توسط تعدادی دایره هم شکل یک شش ضلعی توپر ساخته شود. به عنوان مثال شکل ۷-۶ نشان می دهد که با ۱۹ دایره می توان یک شش ضلعی رسم کرد که روی هر یال آن ۳ دایره قرار می گیرد. اگر a_n را تعداد دایره های لازم برای رسم یک شش ضلعی با n دایره روی هر یال باشد، رابطه بازگشتی a_n را بنویسید و حل نمایید.

حل:

$$\text{شکل ۷-۶ نشان می دهد که } a_2 = 7, a_3 = 19$$



شکل ۷-۶

برای یافتن a_n (تعداد دایره های لازم برای رسم یک شش ضلعی با n دایره روی هر یال) از a_{n-1} باید کمک گرفت. برای ساختن a_n کافی است ۶ یال که هر کدام شامل n دایره می باشند به a_{n-1} اضافه شود. اما از آنجا که طی این مرحله تعداد ۶ دایره روی هر رأس شش ضلعی جدید دو بار تکرار شده اند، با کم کردن این ۶ دایره از کل دایره ها رابطه بازگشتی به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n = a_{n-1} + 6n - 6 \quad n \geq 2$$

با قرار دادن $a_n = r^n$ در معادله همگن خواهیم داشت:

$$r^n - r^{n-1} = r^{n-1}(r-1) = 0 \Rightarrow r = 1$$

بنابراین $a_n^{(h)} = c(1)^n = c$ جواب عمومی رابطه بازگشتی است.

از طرفی $r = 1$ ریشه معادله مشخصه می باشد. پس بنابه حالت ۲-ب جدول ۷-۱

جواب خصوصی عبارتست از:

$$a_n^{(p)} = n(A_0 + A_1 n)$$

برای یافتن ضرایب باید $a_n^{(p)}$ را در رابطه بازگشتی قرار داد:

$$\begin{aligned} n(A_0 + A_1 n) - (n-1)(A_0 + A_1(n-1)) &= nA_0 + A_1 n^2 - nA_0 - A_1 n^2 + A_1 n + A_0 + A_1 n - A_0 \\ &= 2A_1 n + A_0 - A_1 = 6n - 6 \end{aligned}$$

با متحد قراردادن عبارتهای طرفین رابطه خواهیم داشت: $A_0 = -3, A_1 = 3$

بنابراین $a_n^{(p)} = n(3n-3)$ از طرفی $a_2 = 7 = c$ پس جواب معادله بازگشتی برابر است با:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = 7 + n(3n-3) = 3n^2 - 3n + 7$$

۳. پلکانی با n پله را در نظر بگیرید. تعداد حالت‌هایی که بتوان n پله را فقط توسط یک گام یا دو گام طی کرد بیابید؟
حل:

صورت سؤال را می‌توان به گونه‌ای دیگر بیان کرد: به چند طریق می‌توان عدد n را توسط مجموع اعداد ۱ و ۲ نوشت؟ به عبارتی تعداد جواب‌های معادله $s_1 + s_2 + \dots + s_k = n$ در صورتی که $s_i \in \{1, 2\}$ و $i = 1, 2, \dots, k$ باشد، کدام است؟
اگر a_n تعداد جواب‌های این معادله باشد. از آنجا $a_1 = 1$ زیرا فقط با یک گام می‌توان یک پلکان با یک پله را طی کرد. از طرفی با توجه به شرایط مسأله به دو صورت می‌توان پلکانی با دو پله را طی کرد پس $a_2 = 2$ برای به دست آوردن یک رابطه بازگشتی روی a_n باید دو حالت در نظر گرفت:

الف) اگر در آخرین مرحله یک گام برداشته شود، پس $(n-1)$ پله دیگر باقی خواهد ماند که در کل تعداد حالت‌های طی کردن n پله، a_{n-1} می‌باشد.

ب) اگر در آخرین مرحله دو گام برداشته شود، لذا $(n-2)$ پله دیگر باقی خواهد ماند، پس در این حالت تعداد روش‌های طی کردن n پله، a_{n-2} خواهد شد.
بنابراین

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & n \geq 2 \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

که همان دنباله فیبوناچی است.

۴. یک سیستم رمزنگاری، پیام‌ها را با استفاده از رشته‌هایی از اعداد در مبنای ۸ کدگذاری می‌کند. در این سیستم یک کلمه رمز معتبر است که شامل تعدادی زوج عدد ۷ باشد (مثلاً ۱۷۷ و ۱۲۳ هر دو رمزی معتبراند زیرا اولی شامل ۲ عدد هفت و دومی شامل صفر عدد ۷ است).

الف) اگر a_n تعداد کلمات رمز معتبر به طول n باشد، یک دنباله بازگشتی برای a_n بیابید. یک شرط اولیه برای آن پیدا کنید.

ب) رابطه بازگشتی (الف) را حل کنید.

حل:

الف) ابتدا دقت شود که ارقام یک عدد در مبنای ۸، اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ می‌تواند باشد. تعداد کلمات رمز معتبر به طول یک، ۷ تا است زیرا یک رمز معتبر به طول یک، اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ می‌تواند باشد. پس $a_1 = 7$

فرض کنیم a_n تعداد کدهای معتبر n رقمی باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم:
حالت (۱): رقم آخر کد n رقمی معتبر، ۷ نباشد. بنابراین هر کدام از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ می‌تواند رقم آخر باشد. در این صورت تعداد کدهای معتبر $(n-1)$ رقمی برابر با a_{n-1} است و تعداد کدهای n رقمی معتبر در این حالت $4a_{n-1}$ است.
حالت (۲): رقم آخر کد n رقمی معتبر ۷ باشد. بنابراین باید تعداد فردی ۷ در $(n-1)$ رقم دیگر وجود داشته باشد. پس اگر رقم آخر را در نظر نگیریم یک کد $(n-1)$ رقمی نامعتبر داریم.

از آنجا که تعداد کل رمزهای به طول $n+1$ در مبنای ۸ (معتبر و نامعتبر)، 8^{n+1} و تعداد رمزهای معتبر به طول $(n-1)$ ، a_{n-1} است، تعداد رمزهای نامعتبر به طول $n-1$ برابر $8^{n-1} - a_{n-1}$ می‌باشد. بنابراین $a_n = 4a_{n-1} + 8^{n-1} - a_{n-1} = 3a_{n-1} + 8^{n-1}$

ب) رابطه بازگشتی $a_n = 3a_{n-1} + 8^{n-1}$ ناممکن است. برای حل آن، ابتدا رابطه بازگشتی همگن $a_n - 3a_{n-1} = 0$ را حل و سپس جواب خصوصی را با توجه به $f(n) = 8^{n-1}$ به دست می‌آوریم. در رابطه همگن قرار می‌دهیم $a_n = r^n$ از آنجا:

$$r^n - 3r^{n-1} = 0 \Rightarrow r^{n-1}(r-3) = 0 \Rightarrow r = 3$$

بنابراین $a_n^{(h)} = c(3^n)$ جواب عمومی رابطه بازگشتی است.

از آنجایی که $f(n) = 8^{n-1}$ می‌باشد بنا به حالت ۱-الف در جدول ۱-۷ می‌توان گفت $a_n^{(p)} = A(8^n)$

پس $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c(3^n) + A(8^n)$ برای به دست آوردن ضریب A در جواب رابطه بازگشتی ابتدا جواب خصوصی $a_n^{(p)} = A(8^n)$ را در دنباله بازگشتی اولیه قرار داده و به تساوی $8A = 3A + 1$ می‌رسیم. پس $A = \frac{1}{5}$. در نتیجه:

$$a_n = c(3^n) + \frac{1}{5}(8^n)$$

از طرفی برای یافتن ضریب c با توجه به شرط مرزی $a_1 = 7$ تساوی
 $(8) \quad 7 = c(8) + \frac{1}{8}$ حاصل شده و $c = \frac{1}{8}$ به دست می‌آید. بنابراین:
 $a_n = \frac{1}{8}(6^n + 8^n) \quad (n \geq 1).$

۵. تعداد رشته‌های n بیتی که شامل 001 نیستند را بیابید.

حل:

به عنوان مثال 1111 رشته‌ای قابل قبول و 0001 رشته‌ای غیر قابل قبول است.

اگر a_n تعداد رشته‌های n بیتی فاقد 001 باشد، این رشته‌ها ۳ دسته‌اند:

الف) رشته‌هایی n بیتی فاقد 001 که با عدد ۱ شروع می‌شوند: که تعداد آنها a_{n-1} می‌باشد، زیرا باید $n-1$ رشته بعدی نیز فاقد 001 باشد.

ب) رشته‌هایی n بیتی فاقد 001 که با 01 شروع می‌شوند: که تعداد آنها a_{n-2} می‌باشد، زیرا باید $n-2$ رشته بعدی نیز فاقد 001 باشد.

ج) رشته‌هایی n بیتی فاقد 001 که با 00 شروع می‌شوند: که به یک صورت خواهد بود. این رشته بیت فقط حاوی اعداد صفر می‌باشد، زیرا در غیر این صورت شامل 001 خواهد شد که با فرض مسأله تناقض دارد. پس با ترکیب حالت‌ها:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1 & n \geq 2 \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

معادله مشخصه $r^2 - r - 1 = 0$ می‌باشد. دو ریشه این معادله به صورت $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ می‌باشند. لذا جواب عمومی دنباله عبارتست از:

$$a_n^{(h)} = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

از طرفی بنا به حالت ۳-الف جدول ۱-۷ جواب خصوصی برابر $a_n^{(p)} = A$ است. با جایگذاری در معادله داریم: $A = A + A + 1$ پس $A = -1$ و بنابراین

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n - 1$$

که $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. دقت داریم که $r_1 + r_2 = 1$ و $r_1 - r_2 = \sqrt{5}$ با توجه به

شرایط مرزی می‌توان c_1 و c_2 را محاسبه نمود.

$$\begin{cases} a_1 = 1 = c_1 + c_2 - 1 \\ a_2 = 2 = c_1 r_1 + c_2 r_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = 3 \end{cases}$$

با جایگذاری $c_2 = 2 - c_1$ در معادله دوم خواهیم داشت:

$$3 = c_1 r_1 + (2 - c_1) r_2 \Rightarrow 3 - 2r_2 = c_1(r_1 - r_2) \Rightarrow c_1 = \frac{3 - 2r_2}{r_1 - r_2} \xrightarrow{r_1 - r_2 = \sqrt{5}} c_1 = \frac{1 + 2r_1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow c_2 = 2 - c_1 = 2 - \frac{1 + 2r_1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} - 1 - 2r_1}{\sqrt{5}}$$

و با جایگذاری $\sqrt{5} = r_1 - r_2$ در صورت کسر

$$c_2 = \frac{-1 - 2r_2}{\sqrt{5}}$$

بنابراین

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n - 1 = \frac{1 + 2r_1}{\sqrt{5}} (r_1)^n + \frac{-1 - 2r_2}{\sqrt{5}} (r_2)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} (r_1^n - r_2^n) + \frac{r}{\sqrt{5}} (r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) - 1$$

۶. رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 6 \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

معادله مشخصه برابر است با $r^2 - 6r + 9 = 0$ که دارای ریشه مضاعف $r = 3$ می‌باشد و لذا

$$a_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$$

با وجود شرایط اولیه c_1 و c_2 قابل محاسبه‌اند.

$$\begin{cases} 1 = a_1 = c_1 \\ 6 = a_2 = 3c_1 + 3c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 1 \Rightarrow a_n = 3^n + n 3^n$$

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 5(3^n) \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

۷. رابطه بازگشتی

حل:

$$d_n = b \begin{vmatrix} b & b & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{(n-1)(n-1)}$$

$$b \begin{vmatrix} b & b & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{(n-1)(n-1)}$$

دترمینان سمت چپ در عبارت بالا همان d_{n-1} است، اما اگر دترمینان سمت راست را با استفاده از ستون اول بسط دهیم، مقدار آن مساوی bd_{n-2} خواهد بود لذا:

$$d_n = bd_{n-1} - bd_{n-2} = bd_{n-1} - b^2 d_{n-2}$$

بنابراین رابطه بازگشتی زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} d_n = bd_{n-1} - b^2 d_{n-2} \\ d_1 = b \text{ و } d_2 = 0 \end{cases}$$

معادله مشخصه $r^2 - br + b^2 = 0$ و $r_1 = \frac{b}{2}(1 + i\sqrt{3})$ و $r_2 = \frac{b}{2}(1 - i\sqrt{3})$ ریشه ها هستند.

هم چنین با توجه به اینکه $\frac{1}{r_1} + i\frac{\sqrt{3}}{r_1} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d_n &= b^n \left[c_1 \left(\frac{1}{r_1} + i\frac{\sqrt{3}}{r_1} \right)^n + c_2 \left(\frac{1}{r_2} - i\frac{\sqrt{3}}{r_2} \right)^n \right] \\ &= b^n \left[c_1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^n + c_2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^n \right] \end{aligned}$$

معادله مشخصه $r^2 - 3r + 3 = 0$ دارای ریشه $r = 3$ می باشد. بنابراین $a_n^{(h)} = c(3)^n$. از جدول ۷-۱ حالت ۱-ب، با توجه به فرم $f(n) = O(3)^n$ خواهیم داشت: $a_n^{(p)} = An^{3^n}$ با جایگذاری در رابطه بازگشتی داریم:

$$c(3)^n + An(3)^n - 3c(3)^{n-1} - 3A(n-1)(3)^{n-1} = O(3)^n$$

بنابراین:

$$\Rightarrow (c + An - c - A(n-1))3^n = O(3)^n$$

$$\Rightarrow (An - An + A)3^n = O(3)^n$$

$$\Rightarrow A(3)^n = O(3)^n \Rightarrow A = O$$

چون $a = 2$ بنابراین از تساوی $2 = a = c(3)^0 + O(0)(3)^0$ مقدار $c = 2$ حاصل می شود و

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = 2(3)^n + O n(3)^n$$

۸ فرض کنید که $b \in \mathbb{R}^+$ باشد و d_n دترمینال $n \times n$ تعریف شده در زیر است:

$$d_n = \begin{vmatrix} b & b & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

مقدار دترمینان d_n را بر حسب b و n به دست آورید.

حل:

داریم:

$$d_1 = |b| = b \text{ و } d_2 = \begin{vmatrix} b & b \\ b & b \end{vmatrix} = 0$$

اگر d_n را با استفاده از سطر اول بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$= b^n [k_1 \cos \frac{n\pi}{\sqrt{5}} + k_2 \sin \frac{n\pi}{\sqrt{5}}]$$

به کمک شرایط مرزی می‌توان گفت:

$$b = d_1 = b[k_1 \cos \frac{\pi}{\sqrt{5}} + k_2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{5}}] = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} k_1 + \frac{\sqrt{5}}{5} k_2$$

$$\text{و یا } k_1 + \sqrt{5} k_2 = 2$$

از طرف دیگر:

$$0 = d_2 = b[k_1 \cos \frac{2\pi}{\sqrt{5}} + k_2 \sin \frac{2\pi}{\sqrt{5}}] = 0 = k_1(-\frac{1}{\sqrt{5}}) + k_2(\frac{\sqrt{5}}{5})$$

$$\text{و یا } k_1 = \sqrt{5} k_2$$

بنابراین $k_1 = 1$ و $k_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ و در نتیجه:

$$d_n = b^n [\cos \frac{n\pi}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{5} \sin \frac{n\pi}{\sqrt{5}}]$$

$$\text{۹. رابطه بازگشتی} \begin{cases} a_n - 9a_{n-1} + 26a_{n-2} - 24a_{n-3} = 0^n, n \geq 3 \\ a_0 = 1, a_1 = 18, a_2 = 45 \end{cases} \text{ را حل کنید.}$$

حل:

معادله مشخصه این رابطه بازگشتی برابر $r^3 - 9r^2 + 26r - 24 = 0$ است و ریشه‌های آن $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4$ هستند. جواب عمومی برابر است با:

$$a_n^{(h)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + c_3(4)^n$$

از جدول ۷-۱ حالت ۱-الف، با توجه به فرم $f(n) = 0^n$ خواهیم داشت $a_n^{(h)} = A(0)^n$ با جایگذاری در رابطه بازگشتی داریم:

$$A(0)^n - 9A(0)^{n-1} + 26A(0)^{n-2} - 24A(0)^{n-3} = 0^n \Rightarrow 6A = 0^3 \Rightarrow A = \frac{0^3}{6} \Rightarrow$$

$$a_n^{(h)} = \frac{0^3}{6} (0)^n = \frac{1}{6} (0^{n+3})$$

بنابراین

$$a_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 4^n + \frac{1}{6} (0^{n+3})$$

با جایگذاری در شرایط مرزی

$$\begin{cases} a_0 = 1 = c_1 + c_2 + c_3 + \frac{0^3}{6} \\ a_1 = 18 = 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + \frac{0^3}{6} \\ a_2 = 45 = 4c_1 + 9c_2 + 16c_3 + \frac{0^3}{6} \end{cases}$$

با حل این دستگاه $c_1 = \frac{-166}{3}, c_2 = \frac{235}{3}, c_3 = -82$ دست می‌آید. بنابراین

جواب معادله بازگشتی برابر است با:

$$a_n = \frac{-166}{3} (2^n) + \frac{235}{3} (3^n) - 82 (4^n) + \frac{1}{6} (0^{n+3})$$

$$\text{۱۰. با استفاده از تابع مولد رابطه بازگشتی} \begin{cases} a_n - 3a_{n-1} = n, n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \text{ را حل کنید.}$$

حل:

فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ باشد، ابتدا طرفین رابطه را در x^n ضرب می‌کنیم: $a_n x^n - 3a_{n-1} x^n = n x^n$ و از آنجا همه معادلات حاصل شده به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ را با هم جمع می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \quad (5-7)$$

از طرفی داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 = g(x) - a_0$$

و همچنین

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \times x = xg(x)$$

از طرف دیگر سری سمت راست (۵-۷)، سری $(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)$ خواهد بود که با اضافه کردن صفر در ابتدای آن از مثال ۶-۲۴ (ج) خواهیم داشت:

$$0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

با جایگذاری دز (۵-۷) داریم:

$$\begin{aligned} f(x) - a_1 - 3xg(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ \stackrel{a_1=1}{\Rightarrow} g(x)(1-3x) &= \frac{x}{(1-x)^2} + 1 = \frac{x^2-x+1}{(1-x)^2} \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{x^2-x+1}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-3x} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

با متحد قرار دادن دو کسر ضرایب $a = \frac{1}{4}$ و $b = -\frac{1}{4}$ و $c = \frac{1}{4}$ حاصل خواهند شد:

$$g(x) = \frac{\frac{1}{4}}{1-3x} + \frac{-\frac{1}{4}}{1-x} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-x)^2} =$$

به کمک جدول ۱-۶ خواهیم داشت:

$$g(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

و لذا:

$$a_n = \frac{1}{4}(3)^n - \frac{1}{4}(1)^n - \frac{1}{4}(n+1) = \frac{1}{4}(3)^n - \frac{n+2}{4}$$

►

تمرین‌های فصل

در تمرین‌های ۱ الی ۴، ۵ جمله اول دنباله‌های داده شده را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

۲.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}^2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

۳.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad a_1 = 2$$

۴.

$$\begin{cases} a_n = na_{n-1} + na_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 1 \end{cases}$$

در تمرین‌های ۵ الی ۷ نشان دهید دنباله تعریف شده در قسمت (الف) در رابطه بازگشتی داده شده در قسمت (ب) صدق می‌کند.

۵.

$$a_n = (-4)^n \quad \text{(الف)}$$

$$a_n = -2a_{n-1} + 4a_{n-2} \quad \text{(ب)}$$

۶.

$$a_n = 2^n - 1 \quad n \geq 1 \quad \text{(الف)}$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad n \geq 1 \quad \text{(ب)}$$

۷.

$$a_n = 7(2)^n - n + 2 \quad \text{(الف)}$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9 \quad \text{(ب)}$$

۸. رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید.

(الف)

$$\begin{cases} a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} a_{n+2} + 4a_{n+1} + 2a_n = 7^n & n \geq 0 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 2 \end{cases}$$

(ج)

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_n = \sin \frac{nm}{\pi} & n \geq 0 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

۹. یک کارمند در یک شرکت نرم‌افزار کار خود را ابتدا با حقوق ۳۰۰۰۰۰ تومان آغاز می‌کند و رئیس شرکت به وی قول می‌دهد در پایان هر سال حقوق وی دو برابر حقوق سال گذشته شود. و البته بابت همکاری هر ساله با شرکت مبلغ ۵۰۰۰۰ تومان نیز افزایش حقوق خواهد داشت.

(الف) یک دنباله بازگشتی برای حقوق این کارمند در سال n ام همکاری با شرکت بیابید.

(ب) دنباله بازگشتی (الف) را حل کنید.

۱۰. اگر $A = A^1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، مطلوب است:

(الف) A^n

(ب) A^{100}

۱۱. با استفاده از یک رابطه بازگشتی، مجموع $\sum_{i=1}^n i^2$ را حساب کنید.

۱۲. n قرص سفید، قرمز، سبز، آبی در اختیار داریم. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد طرق چیدن این قرص‌ها روی هم به طوری که هیچ دو قرص آبی روی هم قرار نگیرند تعیین کرده و سببی آن را حل کنید.

۱۳. تعداد باکتری‌ها در یک کشت آزمایشگاهی (تقریباً) ۱۰۰۰ است و این تعداد در هر دو ساعت ۲۵٪ افزایش می‌یابد. تعداد باکتریها را پس از یک روز با استفاده از رابطه بازگشتی تعیین کنید.

۱۴. اگر در مسئله برج هانوی به جای سه ستون، از چهار ستون استفاده شده باشد و مشابه برج هانوی در مرحله یک حلقه را از یک ستون به ستون دیگر انتقال داده به گونه‌ای که بر روی حلقه کوچک‌تر واقع نشود و فرض کنید که s_n حداقل تعداد جابه‌جایی‌های لازم برای انتقال n حلقه از ستون سمت چپ به ستون راست باشد.

(الف) s_1 و s_2 و s_3 را بیابید.

(ب) نشان دهید به ازای هر $n \geq 3$ داریم: $s_n = 2s_{n-2} + 3$

۱۵. یک جفت خرگوش (نر و ماده) در ابتدای سال متولد شده اند. شرایط زیر را در نظر بگیرید:

- جفت خرگوش‌ها در ماه اول تولدشان تولید مثل نمی‌کنند، اما در انتهای هر ماه دیگری غیر از ماه اول، چهار جفت (نر و ماده) خرگوش به دنیا می‌آورند.
- هیچ خرگوشی نمی‌میرد.

(الف) اگر r_n برابر با تعداد خرگوش‌های موجود در انتهای ماه n ام، $n \geq 1$ باشد، بدیهی است که $r_0 = 1$ یک رابطه بازگشتی برای دنباله r_n بیابید.

(ب) r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 را به دست آورید.

(ج) تعداد خرگوش‌های موجود در انتهای سال را به دست آورید.

۱۶. رابطه بازگشتی
$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0 \\ a_0 = 7, a_1 = -4, a_2 = 8 \end{cases}$$
 را به کمک معادله مشخصه حل کنید.

۱۷. روابط بازگشتی زیر را با استفاده از توابع مولد حل کنید.

(الف)

مراجع

بیژن شمس، محمدعلی رضوانی، "ریاضیات گسسته مقدماتی"، تألیف: و.ک.بالاکریشنان، انتشارات فاطمی، ۱۳۹۰

محمد صادق متخب "گراف و کاربردهای آن"، تألیف: آویستین آور، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۴

Douglas B. West, "Introduction to Graph Theory", Second Edition, Prentice Hall, 2000.

Kenneth H. Rosen, "Discrete Mathematics and Its Applications", Sixth Edition, Mc Graw Hill, 2007.

L.Lova'sz, k.vesztergombi, "Discrete Mathematics Lectur NOTES", Yale University Spring, 1999.

Mario Benedicty, Frank R.Sledge, "Discrete Mathematical Structures", Harcourt Brace Jonovich, Inc, 1987.

N. Chandrasekaran, M.Umaparvathi, "Discrete Mathematics", PHL Learning Pvt. Ltd., 2011

Ralph P. Grimaldi, "Discrete And Combinatorial Mathematics An Applied Introduction", FIFTH EDITION, Addison Wesley Publishing Company, 2004.

Reinhard Diestel, "Graph Theory", Oxford University Press, 1997

Semour Lipschutz, Marc Lars Lipson, "2000 Solved Problems in Discrete Mathematics", Mc Graw Hill, 1992

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1, n \geq 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

(ج)

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + n^2, n \geq 2 \\ a_1 = 2, a_2 = 5 \end{cases}$$

(د)

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n, n \geq 0 \\ a_1 = 1, a_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

نمادها

تقیض P	$\neg P$	گزاره ها
ترکیب عطفی P و Q	$P \wedge Q$	
ترکیب فصلی P و Q	$P \vee Q$	
ترکیب $Nand$ دو گزاره	$P \uparrow Q$	
ترکیب Nor دو گزاره	$P \downarrow Q$	
ترکیب OR انحصاری دو گزاره	$P \oplus Q$	
ترکیب شرطی دو گزاره	$P \rightarrow Q$	
ترکیب دو شرطی دو گزاره	$P \leftrightarrow Q$	
هم ارزی دو گزاره	$P \equiv Q$	
ارزش درست	T	
ارزش نادرست	F	
سور عمومی	$\forall x P(x)$	
سور وجودی	$\exists x P(x)$	
سور صفر	$\nexists x P(x)$	
بنابراین / در نتیجه	$\therefore$	
x عضو مجموعه S است	$x \in S$	مجموعه ها
x عضو مجموعه S نیست	$x \notin S$	
اعضای یک مجموعه	$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	
نشان دادن خاصیت اعضای یک مجموعه	$\{x / P(x)\}$	
مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$	
مجموعه اعداد گویا	$\mathbb{Q}$	
مجموعه اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$	

مجموعه اعداد صحیح مثبت	$\mathbb{Z}^+$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه تهی	$\emptyset$
زیر مجموعه (S زیر مجموعه T)	$S \subseteq T$
زیر مجموعه محض (S زیر مجموعه T است اما مساوی با آن نیست)	$S \subset T$
کاردینالیتی (تعداد اعضای) مجموعه S	$ S $
مجموعه شامل زیر مجموعه‌های مجموعه S	$P(S)$
زوج مرتب	(a, b)
ضرب دکارتی دو مجموعه A و B	$A \times B$
اجتماع دو مجموعه	$A \cup B$
اشتراک دو مجموعه	$A \cap B$
تفاضل دو مجموعه	$A - B$
اجتماع مجموعه‌های A_i به‌طوری‌که $i=1, 2, \dots, n$	$\bigcup_{i=1}^n A_i$
اشتراک مجموعه‌های A_i به‌طوری‌که $i=1, 2, \dots, n$	$\bigcap_{i=1}^n A_i$
مقدار رابطه در a	$R(a)$
رابطه‌ای از A به B	$R: A \rightarrow B$
معکوس رابطه	R^{-1}
بستار بازتابی یک رابطه	$\bar{R}_{xx}$
بستار تقارن یک رابطه	$\bar{R}_{xy}$
بستار تعدی یک رابطه	R^∞
ترکیب دو رابطه R و S	RoS
بزرگترین عدد صحیح کوچکتر مساوی x	$[x]$
کوچکترین عدد صحیح بزرگتر مساوی x	$\lceil x \rceil$

روابط و توابع

اعداد

a مقدار b را عاد می‌کند. یعنی b بر a بخش‌پذیر است.	a/b
a مقدار b را عاد نمی‌کند.	$a \nmid b$
a و b به پیمانه m هم‌نهشت هستند.	$a \equiv b \pmod{m}$
کلاس‌های هم‌ارزی a	$[a]_R$
بزرگترین مقسوم‌الیه مشترک	GCD
کوچکترین مضرب مشترک	LCM
ماتریس رابطه R	M_R
ماتریس A نابیشتر از ماتریس B است.	$A \ll B$
داربه یک ماتریس	$\{a_{ij}\}$
ماتریس همانی با n سطر و ستون	I_n
ترکیب فصلی (وست) دو ماتریس بولی	$A \vee B$
ترکیب عطفی (وسند) دو ماتریس بولی	$A \wedge B$
ضرب بولی دو ماتریس بولی	$A \odot B$
بیشترین درجه رئوس گراف G	$\Delta(G)$
کوچکترین درجه رئوس گراف G	$\delta(G)$

ماتریس

گراف



واژه نامه فارسی - انگلیسی

Closure	بستار	Rule For Proof By Cases	اثبات برمیله حالات
Reflexive Closure	بستار بازتابی	Rule Of Conditional Proof	اثبات شرطی
Transitive Closure	بستار متعدی	Indirect Proof	اثبات غیر مستقیم
Symetric Closure	بستار متقارن	Mathematical Induction	استقراء ریاضی
Parallel Processing	پردازش موازی	Logical Implication	استلزام منطقی
Postorder	پس ترتیب	Inference	استنتاج
Postfix	پسوندی	Sum Rule	اصل جمع
Bridge	پل	Product Rull	اصل ضرب
Preorder	پیش ترتیب	Pigeonhole Principal	اصل لانه کبوتر
Prefix	پیشوندی	Fibonacci Numbers	اعداد فیبوناچی
Traversal	پیمایش	Partition	افراز
Link	پیوند	Rule Of Detachment	انتزاع
Function	تابع	Forum	انجمن
Boolean Function	تابع بولی	Size	اندازه
Onto(Surjective) Function	تابع پوشا	Size Of Graph	اندازه گراف
Bijective Function	تابع دوسویی	Argument	آرگومان
Ceiling Function	تابع سقف	Backtracking	برگشت
Floor Function	تابع کف	Proof By Contradiction	برهان خلف
Generating Function	تابع مولد	Greatest Lower Bound	بزرگترین کران پایین

Upper Bound	کران بالا	Sub Graph	زیر گراف
Lower Bound	کران پایین	Spanning Sub Graph	زیرگراف فراگیر (پوشا)
Floor	کف	Web Site	سایت
Equivalence Class	کلاس هم‌ارزی	Quantifier	سور
Least Upper Bound	کوچکترین کران بالا	Universal Quantifier	سور عمومی
Trial	گذر	Existential Quantifier	سور وجودی
Eulerian Circuit	گذر اویلری	Star Network	شبکه ستاره‌ای
i-Regular Graph	گراف i -منتظم	Personalization	شخصی سازی
Eulerian Graph	گراف اویلری	Associative	شرکت پذیری
Precedence Graph	گراف تقدم، گراف برتری	Binomial Coefficients	ضرایب دوجمله‌ای
Null Graph	گراف تهی	Product Of Sum	ضرب حاصل جمع
Directed Graph	گراف جهت‌دار	Loop	طوقه
Multi Graph	گراف چندگانه	Universe Of Discourse	عالم سخن
Bipartite Graph	گراف دوبخشی	Boolean Expression	بیانیت بولی
Complete Graph	گراف کامل	Conjunction	عطفی
Mixed Graph	گراف مختلط	Contrapositive	عکس نقیض
Plan Graph	گراف مسطح	Web Spider	عنکبوت وب
Web Graph	گراف وب	Odd	فرد
Weighted Graph	گراف وزن‌دار	Travel Sell Man	فروشنده دوره‌گرد
Connected Graph	گراف همبند	Disjunction	فصلی
Isomorphism Graph	گراف یک‌ریخت	Directory	فهرست
Information Flow	گردش اطلاعات	Pascal's Identity	قاعده پاسکال
Proposition	گزاره	Rule Of Contradiction	قاعده تناقض
Biconditional Proposition	گزاره دوشروطی	Law Of The Syllogism	قانون تمندی
Quantified Predicate	گزاره سودخار	Binomial Theorem	نقضیه دوجمله‌ای
Conditional Proposition	گزاره شرطی	Rule Of Conjunction	قوانین ترکیبات عطفی
Predicate	گزاره‌نما	Rule Of Disjunctive	قوانین ترکیبات فصلی

Tree	درخت	Inverse Function	تابع وارون
Decision Tree	درخت تصمیم	Identity Function	تابع همانی
Binary Tree	درخت دودویی	Identity Function	تابع همانی
Rooted Tree	درخت ریشه‌دار	One To One Function	تابع یک به یک
Spanning Tree	درخت فراگیر	Permutation	تبدیل
Minimum Spanning Tree	درخت فراگیر مینیمم	Topological Sorting	ترتیب توپولوژیکی
Complete Tree	درخت کامل	Partial Order	ترتیب جزئی
Graphical Sequence	دنباله گرافیکی	Lexicographic Order	ترتیب قاموسی
Cycle	دور	Combination	ترکیب
Data Center	دیتا ستر	Minterm	ترکیب عطفی بنیادی
Dijkstra	دیجکسترا	Maxterm	ترکیب فصلی بنیادی
Equivalence Relation	وابسته هم‌ارزی	Image	تصویر
Reflexive Relation	وابسته بازتابی	Correspondence	تناظر
Reccurence Relation	وابسته بازگشتی	Distributive	توزیع پذیری
Irreflexive Relation	وابسته ضدبازتابی	Commutative	جابجایی
Antisymmetric Relation	وابسته ضدمتقارن	Boolean Algebra	جبر بول
Transitive Relation	وابسته متعدی	Truth Table	جدول درستی
Symetric Relation	وابسته متقارن	Breadth First Search	جستجوی اول سطح
Vertex	رأس	Depth First Search	جستجوی اول عمق
Terminating Vertex	رأس خارجی	Boolean Search	جستجوی بولی
Pendent Vertex	رأس معلق، رأس آویزان	Sum Of Product	جمع حاصل ضرب
Adjacency Vertex	رأس‌های مجاور	Forest	جنگل
Bit String	رشته بیتی	Web Crawler	خزنده وب
MicroProcessor	ریزپردازنده	Idempotency	خود توانی
Chain	زنجیر	Outdegree	درجه خروجی
Even	زوج	Indegree	درجه ورودی
Sub Tree	زیر درخت	Degree	درجه

واژه نامه انگلیسی - فارسی

Bridge	پل	Adjacency Matrix	ماتریس مجاورت
Proof By Contradiction	برهان خلف	Adjacency Vertex	رأس‌های مجاور
Ceiling Function	تابع سقف	Antisymmetric Relation	رابطه ضدمتقارن
Chain	زنجیر	Argument	آرگومان
Chat	گفتگوی اینترنتی	Associative	شرکت پذیری
Circuit	مدار	Backtracking	برگشت
Closure	پستار	Biconditional Proposition	گزاره دوشرطی
Combination	ترکیب	Bijective Function	تابع دوسویی
Commutative	جابجایی	Binary Tree	درخت دودویی
Complemented Lattice	مشبکه متمم‌پذیر	Bionomial Coefficients	ضرایب دوجمله‌ای
Complete Graph	گراف کامل	Bionomial Theorem	قضیه دوجمله‌ای
Complete Tree	درخت کامل	Bipartite Graph	گراف دوبخشی
Compliment Graph	مکمل گراف	Bit String	رشته بیتی
Component	مولفه	Boolean Algebra	جبر بولی
Conditional Proposition	گزاره شرطی	Boolean Expression	عبارت بولی
Conjunction	عطفی	Boolean Function	تابع بولی
Connected Component	مولفه همبند	Boolean Search	جستجوی بولی
Connected Graph	گراف همبند	Bounded Lattices	مشبکه محدود
Contrapositive	عکس نقیض	Breadth First Search	جستجوی اول سطح

Connected Component	مولفه همبند	Well Formed Formula	گزاره‌های خوش ساخت
Inorder	میان‌ترتیب	Equivalent Propositions	گزاره‌های هم‌ارز
Inorder	میان‌وندی	Walk	گشت
Matching Theory	نظریه تطابق	Chat	گفتگوی اینترنتی
Graph Theory	نظریه گراف	Gate	گیت
Isolated Point	نقطه تنها/مفرد	Term	لفظ
Negation	نقیض	Zero - One Matrix	ماتریس صفر - یک
Modus Tollens	نقیض انتزاع	Adjacency Matrix	ماتریس مجاورت
Map	نگاشت	Indidence Matrix	ماتریس وقوع
Logic Diagrams	نمودار منطقی	Total Degree	مجموع درجه
Hase Diagram	نمودار هاس	Partial Ordered Set	مجموعه مرتب جزئی
Octahedral	هشت وجهی	Set Total Ordered	مجموعه مرتب کامل
Identity	همانی	Circuit	مدار
Edge	یال	Order	مرتبه
Multiple Edge	بال چندگانه	Order Of Graph	مرتبه گراف
Pendent Edge	یال معلق، یال آویزان	Path	مسیر
Parallel Edge	یال موازی	Hamiltonian Path	مسیر همپلتونی
Isomorphism	یک‌ریختی	Distributive Lattices	مشبکه توزیع پذیر
		Bounded Lattices	مشبکه محدود
		Lattice	مشبکه
		Hybrid Network	مشبکه ترکیبی
		Ring Network	مشبکه حلقه ای
		Complemented Lattice	مشبکه متمم‌پذیر
		Converse	معکوس
		Compliment Graph	مکمل گراف
		Web Search Engines	موتورهای جستجوی صفحات وب
		Component	مولفه