



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷

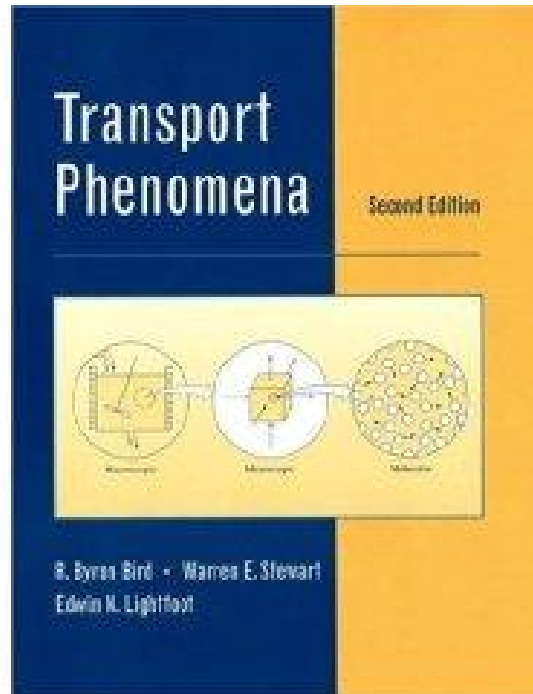


هدف بخش

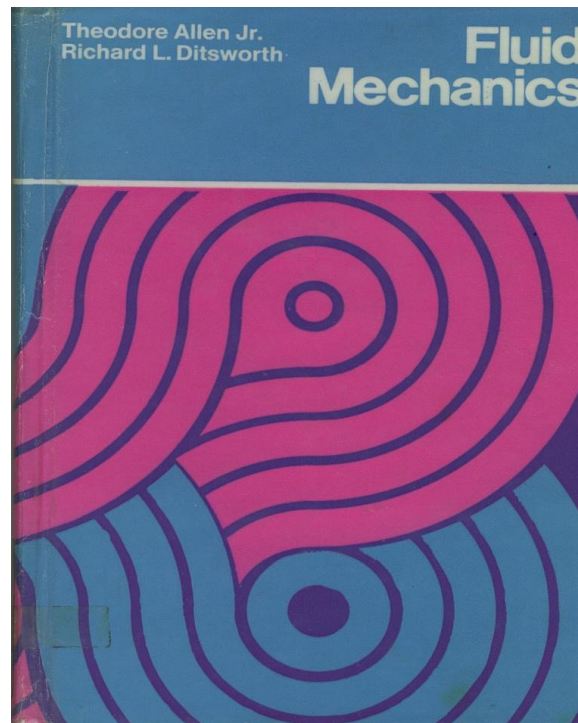
➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ اهداف و چهارچوبهای کلی درس و نیز دامنه کاربردهای دانش مکانیک سیالات را بشناسد.

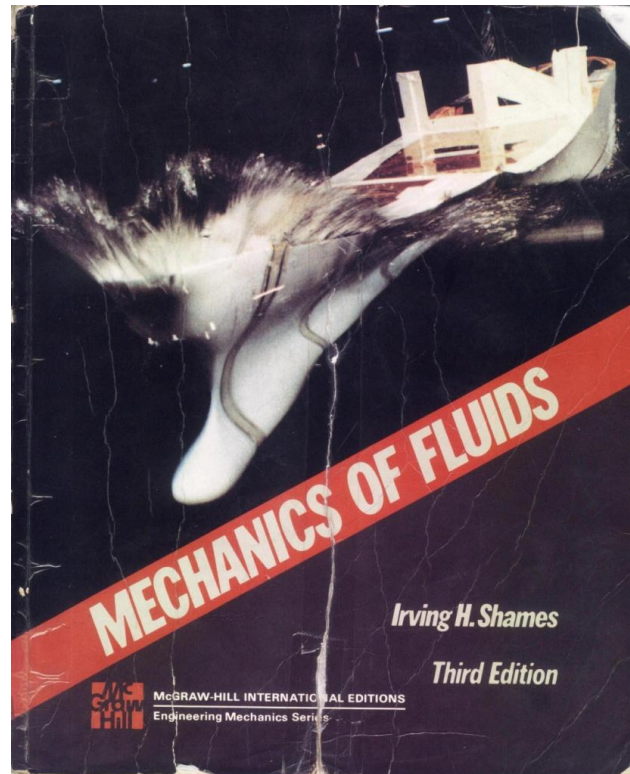
- R. Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, “Transport phenomena”, 2002.



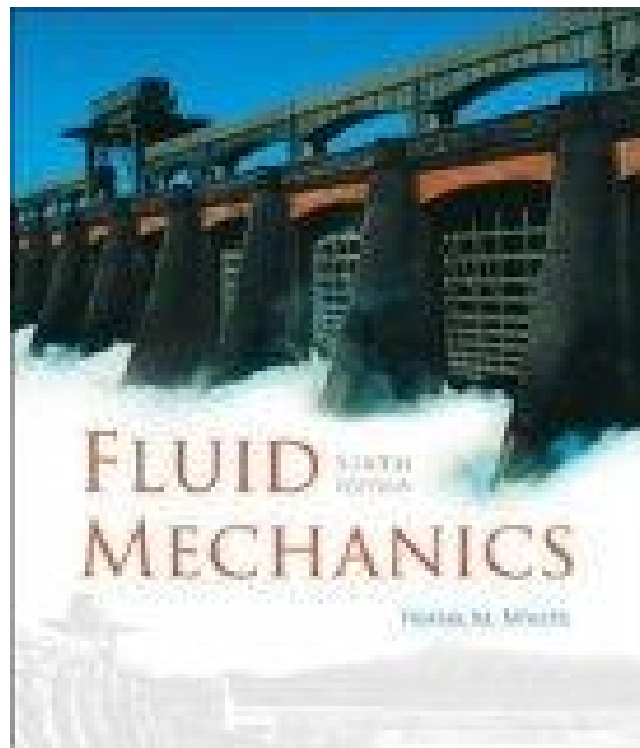
- Theodore Allen Jr. & Richard L. Ditsworth; “**Fluid Mechanics**”, 1972.



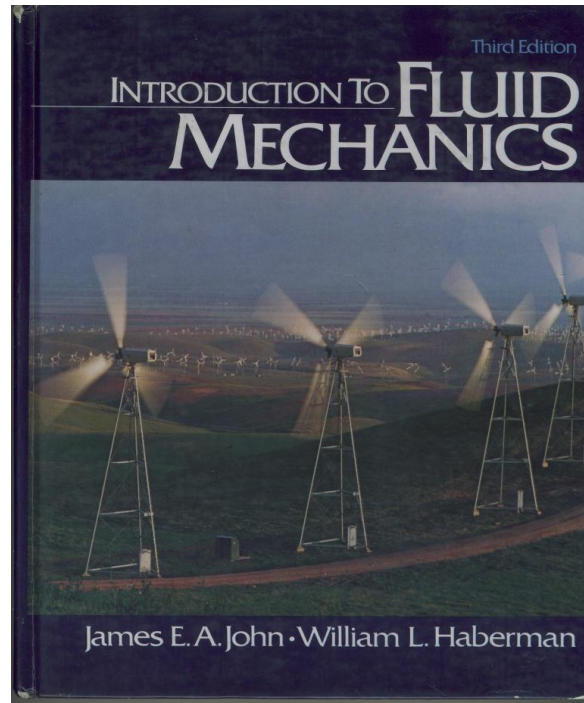
- ▶ Irving H. Shames; “**Mechanics of Fluid**”, 1982.



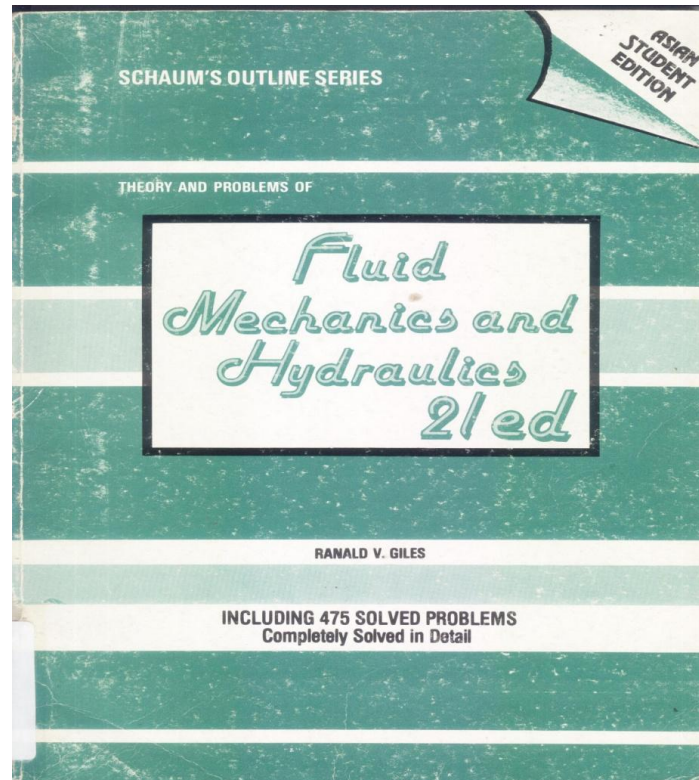
- Frank M. White; “**Fluid Mechanics**”, 1986.



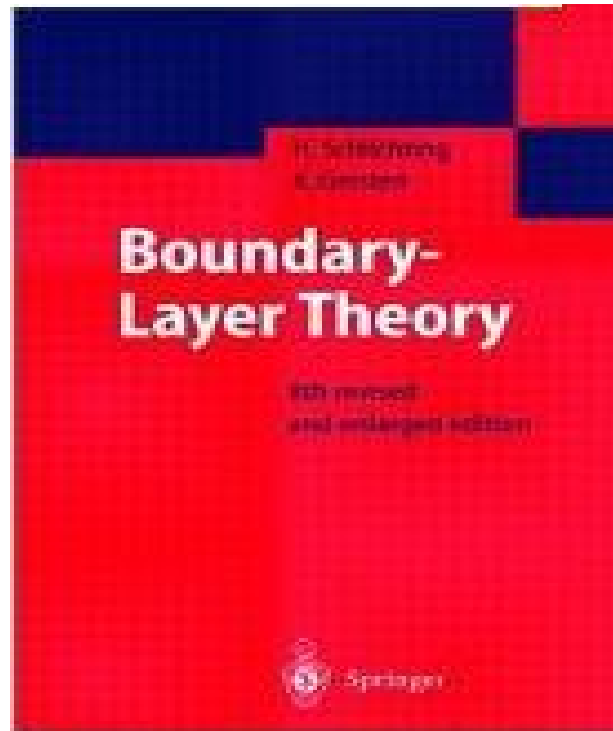
- ▶ James E. A. John, William L. Haberman; “**Introduction To Fluid Mechanics**”, 1988.



- Ranald V. Giles; “**Fluid Mechanics and Hydraulics**”, 1983.



- Herrmann Schlichting, Klaus Gersten, E. Krause, H. Jr. Oertel; “**Boundary-Layer Theory**”, 2004.



نرم افزارهای مکانیک سیالات

Pipe flow ➤

Pipesim ➤

مدول Pipesegment در Hysys ➤

Fluent بر پایه دینامیک سیالات محاسباتی ➤

(Computation Fluid Dynamics, CFD)

بخش‌های کلی درس

➤ بخش ۱ - معادلات حرکت و انواع تنشها

- ✓ ۱-۱ آشنایی با سیال، ویژگیها و جریان آن
- ✓ ۲-۱ رژیمهای آرام و آشفته جریان
- ✓ ۳-۱ معادله پیوستگی
- ✓ ۴-۱ انواع تنشها
- ✓ ۵-۱ معادلات حرکت
- ✓ ۶-۱ تمرین

➤ بخش ۲ - آنالیز ابعادی (افزایش مقیاس)، حرکت سیال بر روی اجسام، مفهوم لایه مرزی و کاربرد آنها در تعیین ویژگی سیالات

- ✓ ۱-۲ آنالیز ابعادی
- ✓ ۲-۲ حرکت سیال بر روی اجسام
- ✓ ۳-۲ لایه مرزی
- ✓ ۴-۲ تمرین

بخش‌های کلی درس

➤ بخش ۳- معادله های حرکت و شیوه ساده سازی آنها

- ✓ ۱-۳ معادلات حرکت و برخی مفاهیم جریان سیال
- ✓ ۲-۳ جریانهای چرخشی و غیر چرخشی و تابع جریان و سرعت پتانسیل
- ✓ ۳-۳ معادلات مربوط به لایه مرزی و چگونگی حرکت سیال بر روی سطحهای گوناگون
- ✓ ۴-۳ تمرین

➤ بخش ۴- رژیم حرکت سیال (آرام یا آشفته)، تئوری پرانتل

- ✓ تئوری پرانتل در جریان درهم و بررسی یک نمونه مساله

➤ بخش ۵- فرموله کردن لایه مرزی

- ✓ معادلات لایه مرزی و کاربرد آنها در مدلسازی جریان در سیستمهای مختصات گوناگون

➤ بخش ۶- بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز

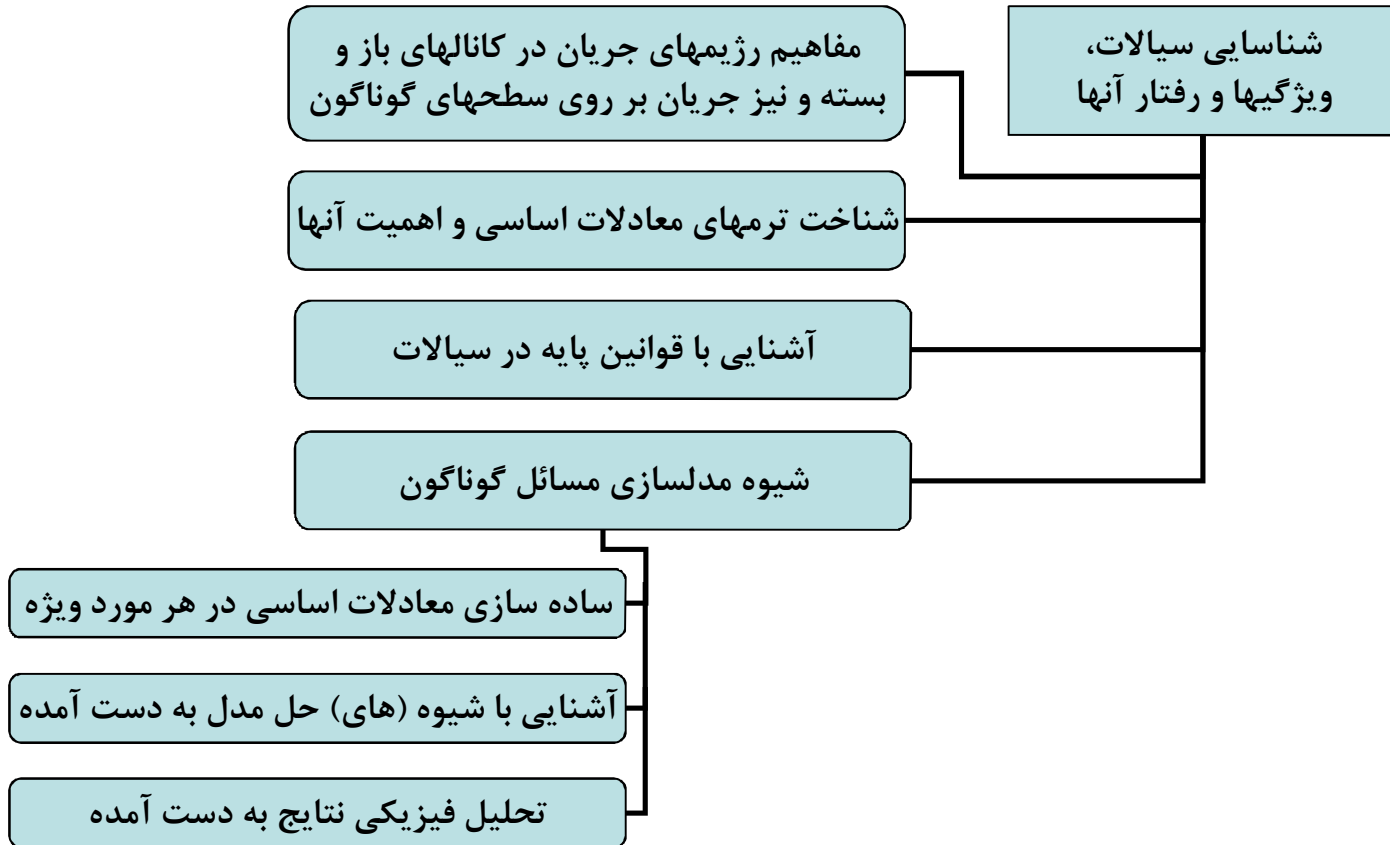
- ✓ مفاهیم و معادلات جریان سیال در کانالهای باز

بخش‌های کلی درس

بخش ۷ - سیال‌های غیر نیوتنی

- ✓ ۱-۷ سیال غیر نیوتنی، اثر دما بر ویسکوزیته و ویسکوزیته سیال غیر نیوتنی
- ✓ ۲-۷ گونه‌های سیال غیر نیوتنی و تفاوت آنها با سیال نیوتنی
- ✓ ۳-۷ مدل‌های ویسکوزیته سیال‌های غیر نیوتنی
- ✓ ۴-۷ دستگاه‌های اندازه‌گیری ویسکوزیته سیال غیر نیوتنی
- ✓ ۵-۷ حل چند مثال
- ✓ ۶-۷ اندازه‌کردن لوله‌های همگرا و واگرای برای جریان سیال‌های غیر نیوتنی

سازمان دهی مطالب



کاربردهای دانش مکانیک سیالات

آیرودینامیک

✓ حرکت هوا و دیگر گازها بر روی اجسام و برهم کنش آنها با اجسامی که در گیر این حرکت هستند (نیروهای لیفت و دراگ)

➤ هیدرولیک

✓ کاربری مکانیک سیالات در طراحی و ساخت تجهیزات و سازه های در تماس با مایعات مانند کانالها و تجهیزات فرآیندی حاوی مایعات، بندها و آبگیرها

➤ دینامیک سیالات ژئوفیزیکی

✓ پدیده های سیالاتی در اتمسفر و اقیانوسها مانند طوفها و سیلابها و نیز سیستمهای آب و هوا

➤ مکانیک سیالات زیستی

✓ مکانیک سیالات در فرآیندهای زیست - فیزیکی مانند جریان خون در رگها

کاربردهای دانش مکانیک سیالات

➤ آیرودینامیک

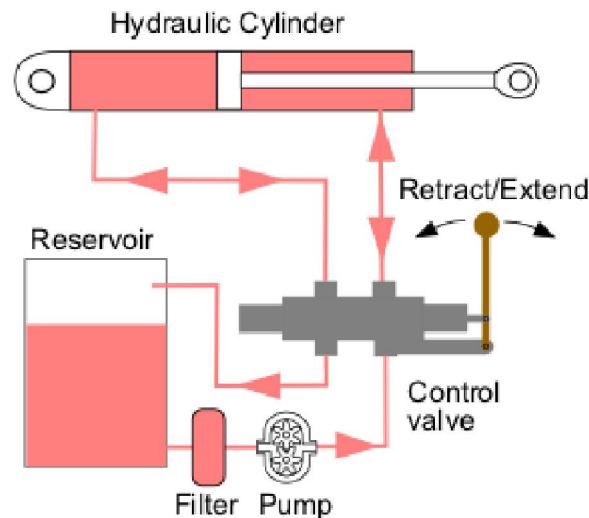
✓ حرکت هوا و دیگر گازها و برهم کنش آنها با اجسامی که در گیر این حرکت هستند (نیروهای لیفت و دراگ)



کاربردهای دانش مکانیک سیالات

➤ هیدرولیک

✓ کاربری مکانیک سیالات در طراحی و ساخت تجهیزات و سازه های در تماس با مایعات مانند کانالها و تجهیزات فرآیندی حاوی مایعات، بندها و آبنگورها



نمای شماتیک
یک بازوری مکانیکی

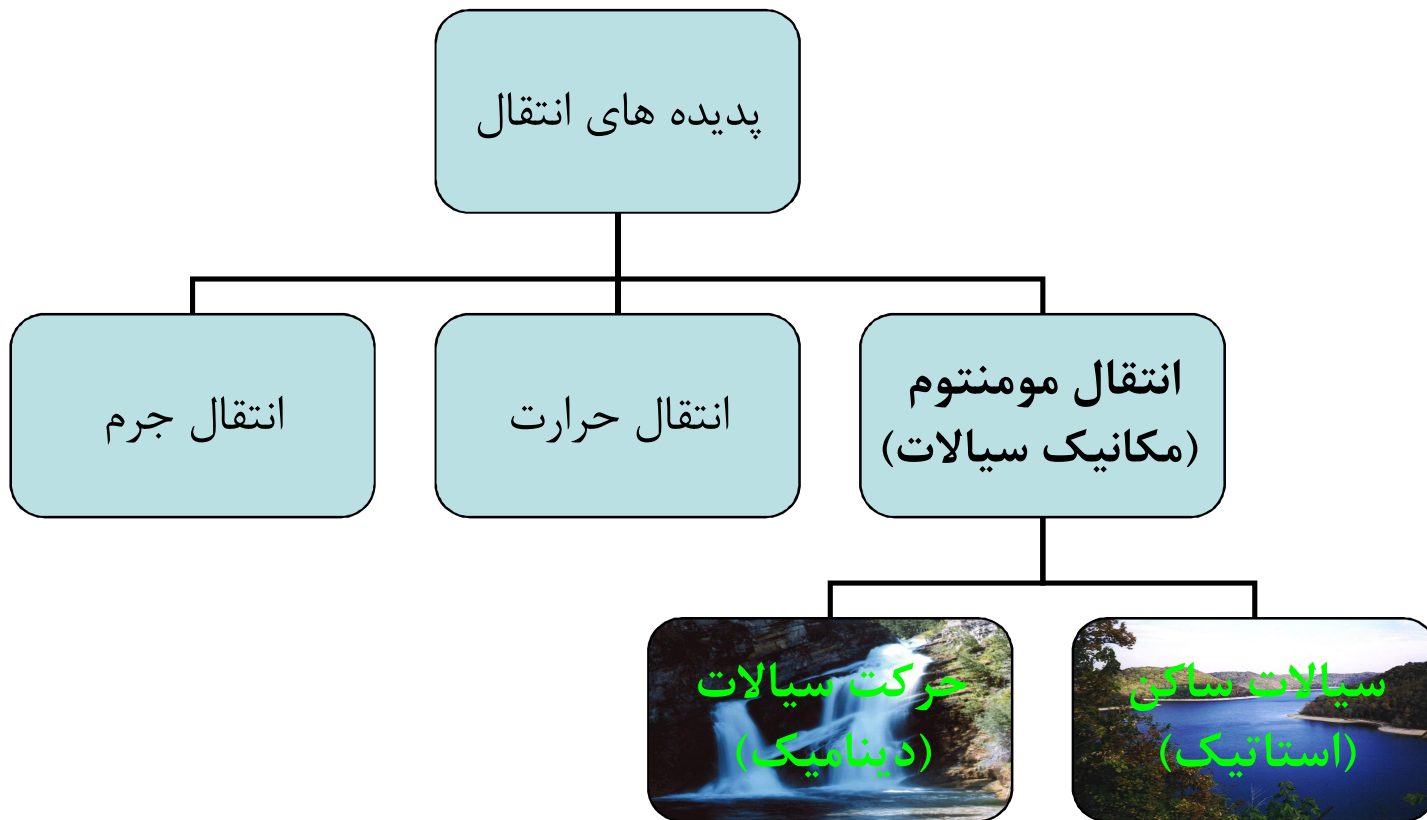
کاربردهای دانش مکانیک سیالات

➤ دینامیک سیالات ژئوفیزیکی

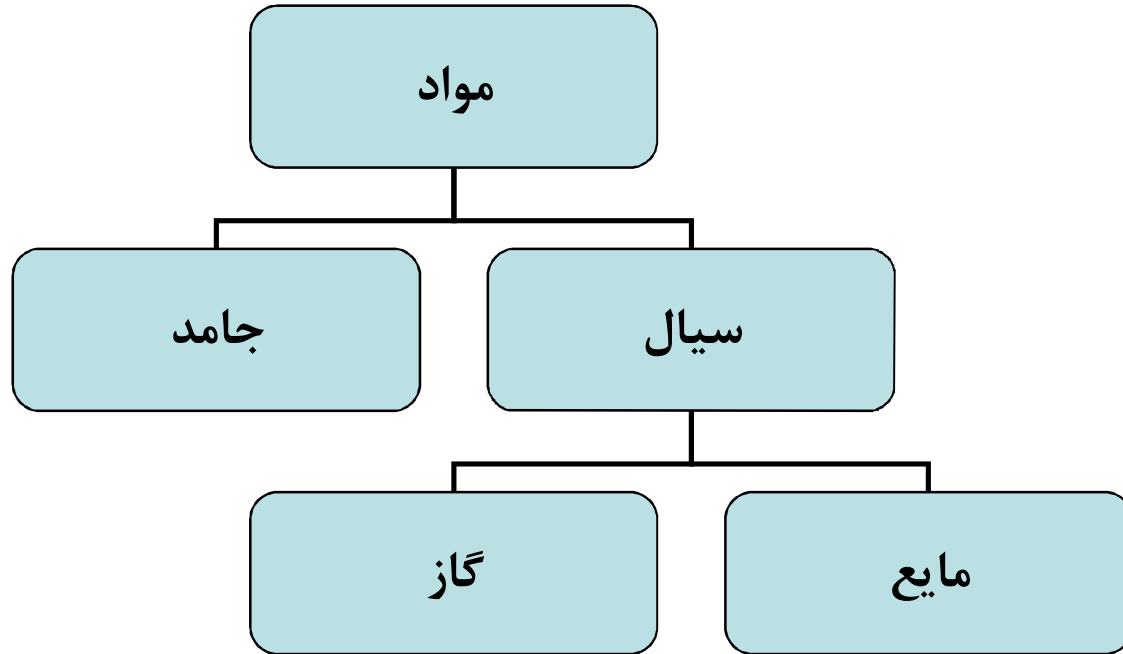
✓ پدیده های سیالاتی در اتمسفر و اقیانوسها مانند طوفها و سیلابها و نیز سیستمهای آب و هوا



دانش مکانیک سیالات



حالت‌های گوناگون مواد



ویژگی سیال: جریان یافتن در برابر وارد آمدن تنش برشی

➤ در این بخش با مراجع درس مکانیک سیالات پیشرفته، دامنه های کاربرد آن و جایگاه مکانیک سیالات به صورت اجمالی آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

- پس از پایان این بخش دانشجو باید بتواند:
 - ✓ سیال، ویژگیها و جریان آن را بشناسد.
 - ✓ انواع رژیمهای آرام، انتقالی و آشفته جریان را تشریح نماید.

➤ بدون داشتن درک درستی از سیال و ویژگیهای آن، نمی توان مدل و رفتار درستی از آنرا در سیستمهای گوناگون پیش بینی نمود. بنابراین بایستی ابتاد سیال و ویژگیهای مهم آنرا شناخت.

- ویژگی سیال: جریان یافتن لایه ای و یا گردابه ای به هنگام اعمال تنش
- تغییر شکل سیال و حرکت آن وابسته به
 - ✓ ویژگیهای فیزیکی سیال مانند ویسکوزیته (ایستادگی سیال در برابر حرکت) و دانسیته
 - ✓ میزان تنش برشی اعمال شده به سیال
 - ✓ بود و یا نبود سطح جامد در مرز سیال
 - ✓
- در مکانیک سیالات با تکیه بر قوانین و معادلات اساسی و نیز برخی روابط تجربی شیوه حرکت سیال و متغیرهای آن مانند سرعت و فشار تعیین می شوند.

تعریفهای اساسی در مکانیک سیالات

➤ سیال:

✓ حالتی از ماده که در اثر اعمال تنش برشی در راستای نیرو شروع به حرکت می کند.

➤ سیال ایده‌ال:

✓ در سیال ایده آل ویسکوزیته صفر است و تنش برشی (Shear Stress) بین سیال و دیواره جسم سخت وجود ندارد و سیال بصورت لغزشی (Slip) در نزدیکی دیواره بدون توزیع سرعت حرکت می کند.

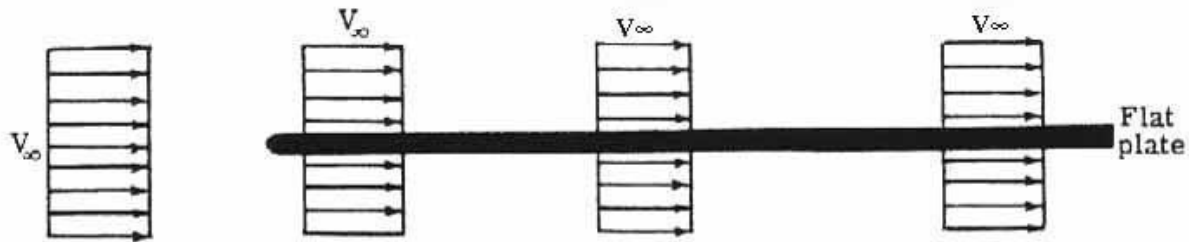
➤ سیال حقیقی:

✓ سیال حقیقی ویسکوز است و به علت اهمیت تنش برشی توزیع سرعت در مجاورت دیواره وجود دارد.

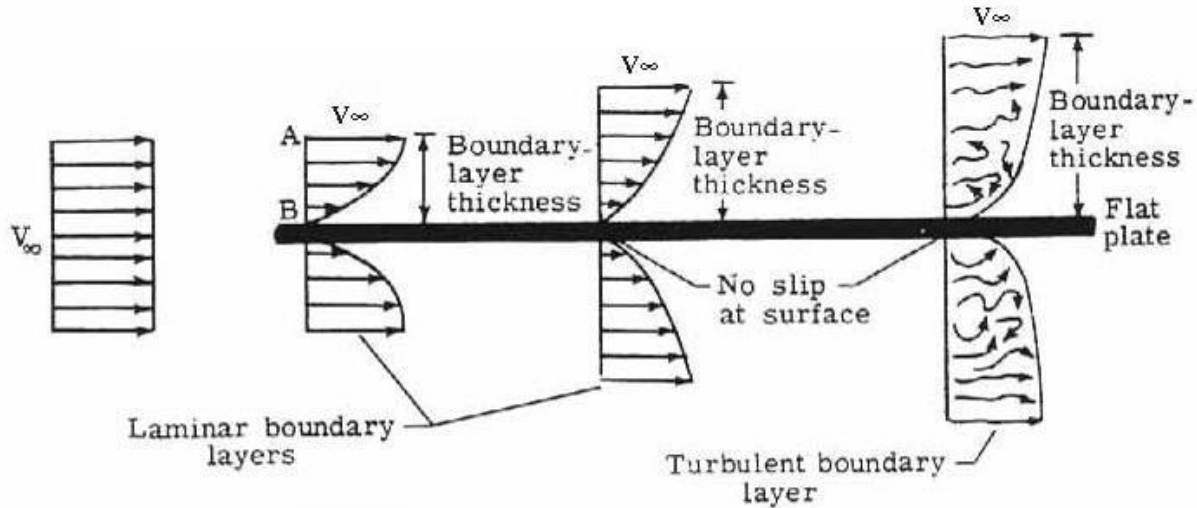
➤ عامل اختلاف سیال ایده آل و سیال حقیقی:

➤ تنش برشی و شرایط No-Slip در ناحیه نزدیک دیواره جسم سخت مجاور سیال، که در اثر ویسکوزیته ایجاد می شوند، عامل اختلاف سیال ایده‌ال و سیال حقیقی می باشد.

تعریفهای اساسی در مکانیک سیالات



Inviscid (ideal) fluid flow along a flat plate



Viscous (real) fluid flow along a flat plate

دسته بندی جریان سیال

➤ جریان آرام (Laminar)

✓ در این جریان انتقال ذرات سیال به صورت مولکولی از یک لایه به لایه مجاور سبب انتقال اندازه حرکت خواهد شد و قانون ویسکوزیته نیوتنی حاکم است.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-1)$$

➤ جریان آشفته (Turbulent)

✓ در این جریان انتقال ذرات سیال به صورت گردابه (eddy) از یک لایه به لایه مجاور سبب انتقال اندازه حرکت خواهد شد. در قانون نیوتن برای جریان آشفته به جای ترم μ ترم جدید مجموع μ و η (مربوط به جریان آشفته) قرار می گیرد.

$$\tau = (\mu + \eta) \frac{du}{dy} \quad (1-2)$$

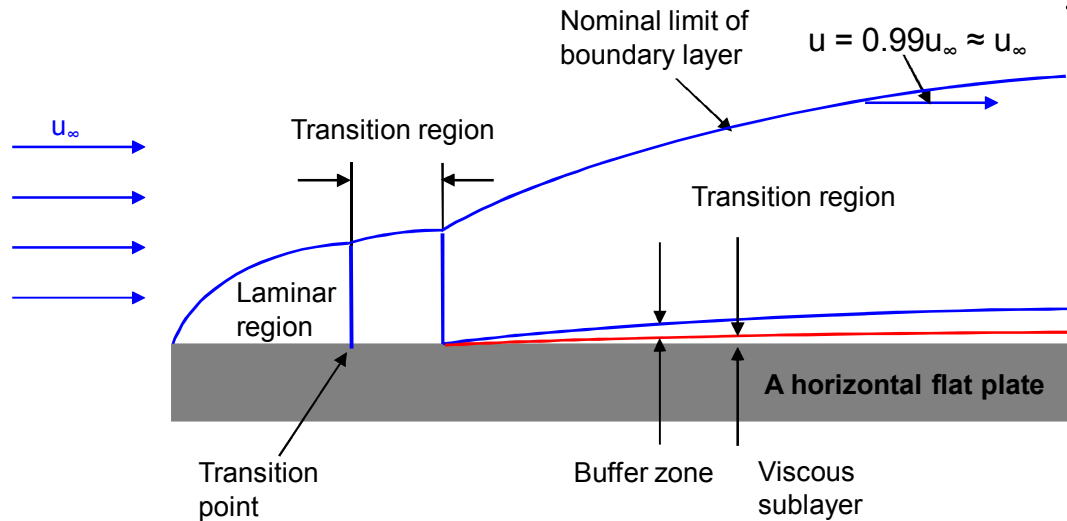
✓ در جریان آشفته معمولاً η (eddy viscosity) بسیار بزرگتر از μ است و هرچه جریان آشفته تر باشد، η بزرگتر است.

$$\eta \gg \mu \quad (1-3)$$

دسته بندی جریان سیال

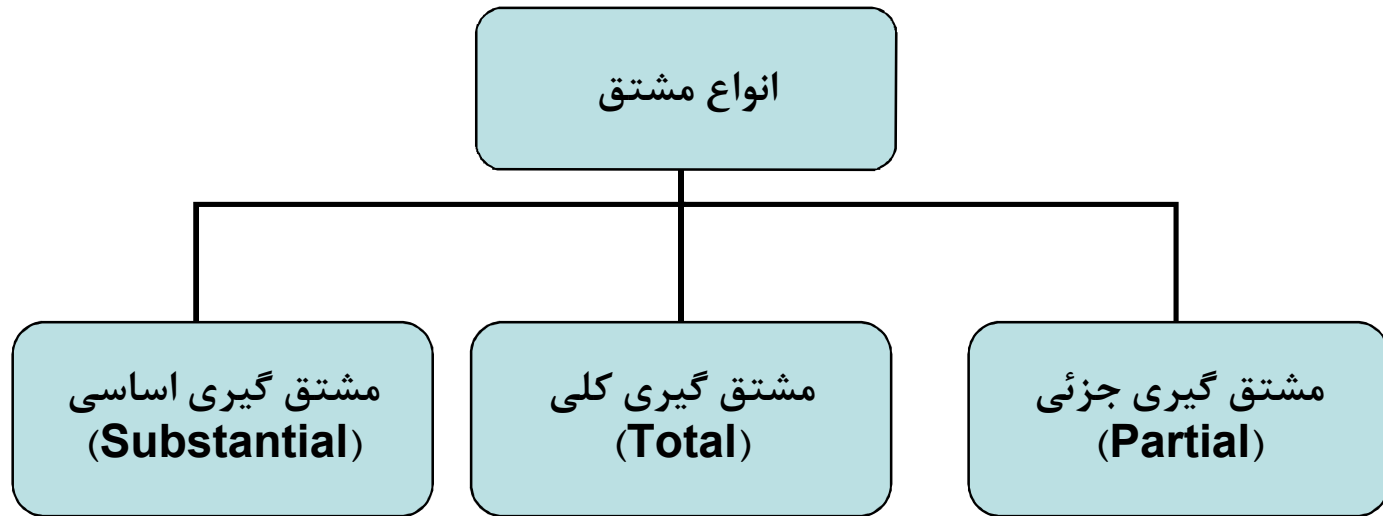
➤ بر خلاف molecular kinematic viscosity (μ/ρ) که تنها تابع نوع سیال است، eddy kinematic viscosity ($\nu=\eta/\rho$) تنها تابع نوع جریان است.

➤ جریان انتقالی (Transition) در فاصله جریان آرام و جریان آشفته قرار می گیرد.



شکل ۱-۱

یادآوری (شکلهای مختلف مشتق گیری)



➤ **Partial time derivative:** $(\partial C / \partial t)$

➤ **Total time derivative:** (dC / dt)

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (1-4)$$

➤ **Substantial time derivative:** (DC / Dt)

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + U_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} + W_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad (1-5)$$

- در این بخش با تعریفهای اساسی در مکانیک سیالات و دسته بندی کلی جریان و مفهوم لایه مرزی آشنا شدیم.
- دریافتیم وجود خاصیتی در سیال به نام ویسکوزیته موجب به وجود آمدن توزیع سرعت در حرکت سیال می شود.
- جریان سیال می تواند آرام، انتقالی و یا درهم باشد.

خود آزمایی

➤ تفاوت سیال ایده آل و سیال حقیقی در کدام یک از موارد زیر می باشد؟
وجود شرایط بدون لغزش (No-Slip) در دیواره که موجب توزیع سرعت می شود.
وجود نیروی تنش که موجب توزیع سرعت می شود.
وجود مقاومت سیال (ویسکوزیته) که موجب توزیع سرعت می شود.
همه موارد درست می باشند.

➤ کدامیک از موارد زیر علت تفاوت نیروی ویسکوزیته سیال در جریانهای آرام و آشفته می باشد؟
تفاوت در اندازه ذراتی که بین لایه های مجاور انتقال می یابند.
تفاوت در سرعت حرکت سیال در دو رژیم آرام و آشفته
تفاوت در هندسه مسیر حرکت سیال در دو رژیم آرام و آشفته
همه موارد درست می باشند.

خود آزمایی

eddy kinematic viscosity تابع کدام یک از موارد زیر می باشد؟ ➤

خصوصیات فیزیکی سیال

جریان سیال

هر دو

هیچکدام



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

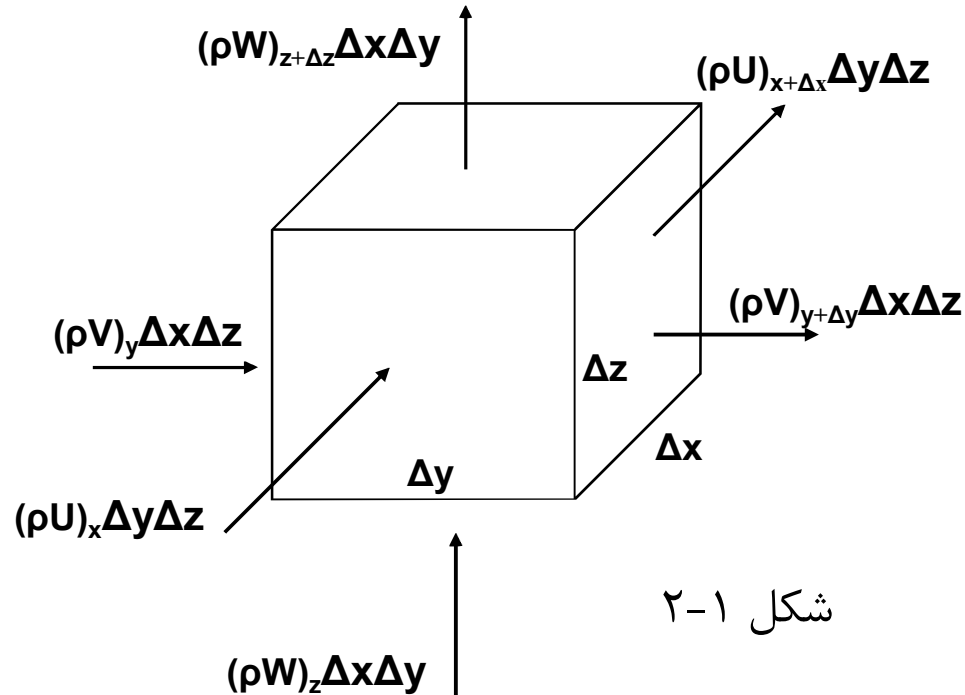
➤ پس از پایان این بخش دانشجو باید بتواند:
✓ معادله پیوستگی و اهمیت ترمهای آن را با توجه به سیستم مورد نظر بشناسد.

کاربرد

➤ آشنایی با معادله پیوستگی و حل آن که حل معادلات حرکت بدون توجه به آن امکان پذیر نمی باشد. به عبارت دیگر از نتیجه معادله پیوستگی باید در حل معادله حرکت استفاده کرد.

معادله پیوستگی (Continuity)

➤ با به کار گیری اصل بقاء جرم در سیستم مختصات کارتزین (XYZ) در سه راستای X، Y و Z این معادله به دست می آید.



معادله پیوستگی (Continuity)

در راستای X: ➤

$$(\rho U_x) \Delta y \Delta z \Big|_x \quad (1-6)$$

دبی جرمی ورودی ✓

$$(\rho U_x) \Delta y \Delta z \Big|_{x+\Delta x} \quad (1-7)$$

دبی جرمی خروجی ✓

$$\frac{(\rho U_x) \Delta y \Delta z \Big|_{x+\Delta x} - (\rho U_x) \Delta y \Delta z \Big|_x}{\Delta x} \quad (1-8)$$

تغییرات ✓

معادله پیوستگی (Continuity)

در راستای y ➤

$$(\rho V_y) \Delta x \Delta z \Big|_y \quad (1-9)$$

دبی جرمی ورودی ✓

$$(\rho V_y) \Delta x \Delta z \Big|_{y+\Delta y} \quad (1-10)$$

دبی جرمی خروجی ✓

$$\frac{(\rho V_y) \Delta x \Delta z \Big|_{y+\Delta y} - (\rho V_y) \Delta x \Delta z \Big|_y}{\Delta y} \quad (1-11)$$

تغییرات ✓

معادله پیوستگی (Continuity)

در راستای z: ➤

$$(\rho W_z) \Delta x \Delta y \Big|_z \quad (1-12)$$

دبی جرمی ورودی ✓

$$(\rho W_z) \Delta x \Delta y \Big|_{z+\Delta z} \quad (1-13)$$

دبی جرمی خروجی ✓

$$\frac{(\rho W_z) \Delta x \Delta y \Big|_{z+\Delta z} - (\rho W_z) \Delta x \Delta y \Big|_z}{\Delta z} \quad (1-14)$$

تغییرات ✓

معادله پیوستگی (Continuity)

➤ ترم انباشتگی جرم در حجم کنترل:

$$(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \Big|_t \quad (1-15)$$

✓ جرم حجم کنترل در زمان t

$$(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \Big|_{t+\Delta t} \quad (1-16)$$

✓ جرم حجم کنترل در زمان $t+\Delta t$

$$\frac{(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \Big|_{t+\Delta t} - (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \Big|_t}{\Delta t} \quad (1-17)$$

✓ تغییرات

معادله پیوستگی (Continuity)

➤ با کوچک نمودن ابعاد حجم کنترل و میل دادن آن به سمت صفر معادله پیوستگی (بقاء جرم) به دست می آید (شما می توانید به عنوان تکلیف به دست آورید):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W_z) = 0 \quad (1-18)$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + W_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \right) \quad (1-19)$$

$$\nabla : del(\text{gradient}) \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1-20)$$

$$\nabla \cdot U = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \quad (1-21)$$

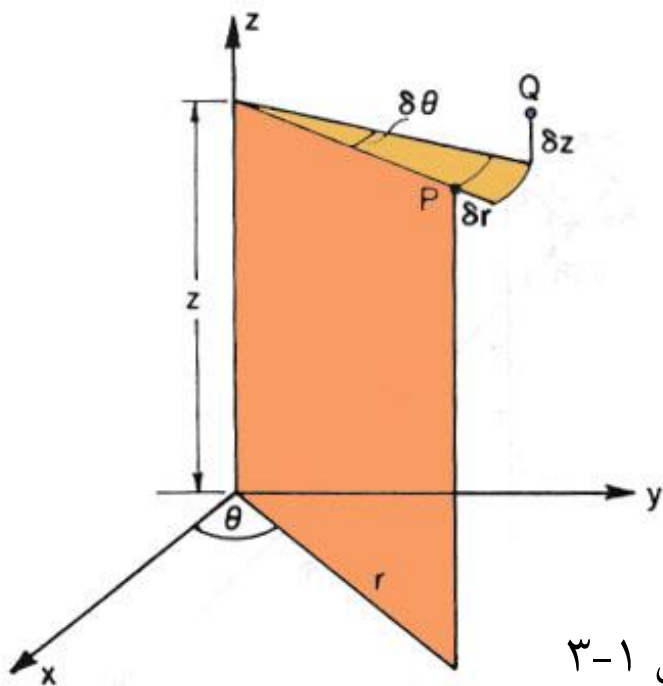
$$0 = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot U \quad (1-22)$$

➤ هر گاه سیال تراکم ناپذیر باشد:

$$\rho = cte \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \Delta \cdot U = 0 \quad (1-23)$$

معادله پیوستگی در مختصات استوانه ای

- با الگوی ارائه شده در مختصات کارتزین، می توان معادله پیوستگی را در مختصات استوانه ای و کروی نیز به دست آورد.
- دستگاه محور مختصات استوانه ای

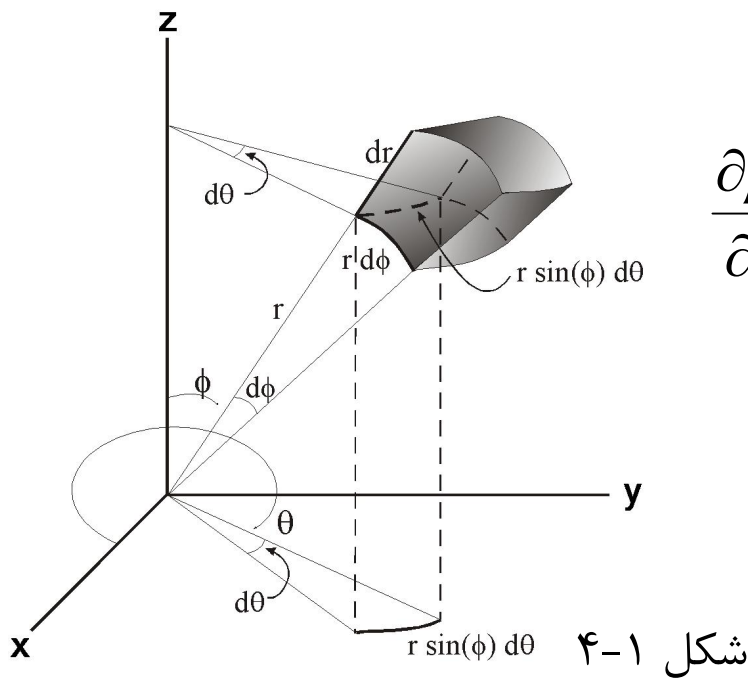


$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (1-24)$$

شکل ۱-۳

معادله پیوستگی در مختصات کروی

دستگاه محور مختصات کروی



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0 \quad (1-25)$$

➤ معادله پیوستگی مقدمه وارد شدن به حل مسائل دینامیک سیالات می باشد.

خود آزمایی

➤ با حل معادله پیوستگی کدامیک از ویژگیهای جریان سیال به دست می آید؟
توزیع سرعت سیال به دست می آید.
چگونگی تغییرات سرعت سیال در یک یا بیش از یک جهت مشخص می شود.
دینامیک سیال شناسایی می شود.
همه موارد فوق درست می باشند.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

- دانشجو پس از این بخش باید بتواند:
 - ✓ انواع تنشها را بشناسد.
 - ✓ معادله حرکت و اهمیت ترمهای آن را تشخیص دهد.
 - ✓ در هر مورد با توجه به فیزیک مسأله بتواند این معادله را ساده سازی نماید.

کاربرد

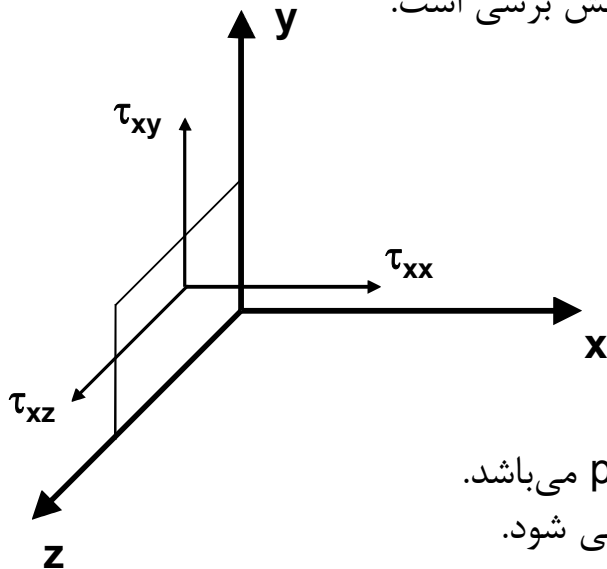
➤ کاربرد این بخش در تعیین توابع توزیع سرعت، فشار و تنش سیال و در نتیجه برآورد نیروی وارد شده از طرف سیال به جسمی که سیال آنرا فرا گرفته است، می باشد.

معادله حرکت (Motion or Momentum)

➤ تنش نیرو به ازای واحد سطح است.

✓ اگر نیروی وارد شده به سطح عمود بر آن باشد، تنش نرمال است.

✓ اگر نیروی وارده شده به سطح مماس بر آن باشد، تنش برشی است.



τ_{xx} : Normal Stress
 τ_{xy} & τ_{xz} : Shear Stress

شکل ۱-۵

➤ چند نکته:

✓ جهت normal stress برخلاف جهت pressure می باشد.

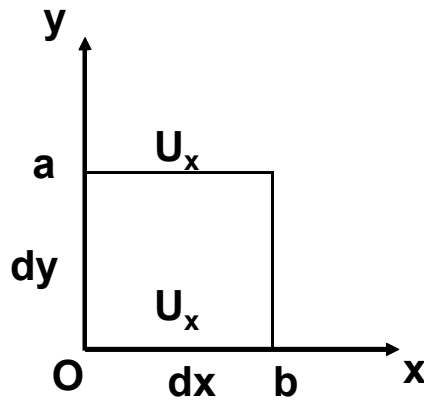
✓ تنها shear stress موجب تغییر شکل زاویه ای می شود.

✓ در حالت کلی می توان نوشت:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \& \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \& \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

تغییر شکل زاویه‌ای

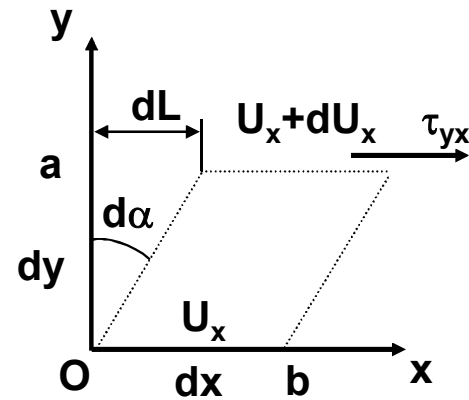
- هنگامی که تنش برشی به سیال وارد شود، لایه های آن در راستای تنش وارد شده شروع به حرکت می کنند. منظور از تغییر شکل زاویه ای، تغییرات سرعت لایه های سیال در راستای عمود بر جهت تنش برشی وارد شده به آن می باشد.
- اگر اختلاف سرعت در راستای y باشد:



وارد آمدن تنش برشی
در راستای x



شکل ۱-۶



تغییر شکل زاویه ای: $\frac{dU_x}{dy}$

تغییر شکل زاویه‌ای

با توجه به تغییر شکل زاویه‌ای ایجاد شده بر اثر اعمال تنش برشی می‌توان نوشت: ➤

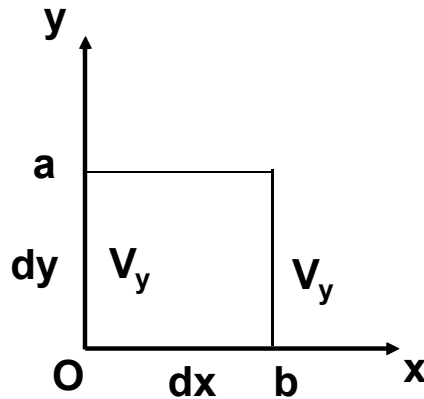
$$dL = dU_x \times dt = dy \cdot tg(d\alpha)$$

$$tg(d\alpha) \cong d\alpha \Rightarrow dU_x \cdot dt = dy d\alpha$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dU_x}{dy} \Rightarrow \tau \propto \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \tau \propto \frac{dU_x}{dy} \quad (1-26)$$

تغییر شکل زاویه‌ای

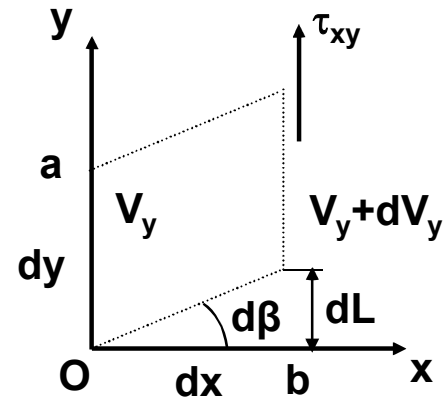
➤ اگر اختلاف سرعت در راستای x باشد:



وارد آمدن تنش برشی
در راستای y



شکل ۱-۷



تغییر شکل زاویه‌ای: $\frac{dV_y}{dx}$

تغییر شکل زاویه‌ای

➤ با توجه به تغییر شکل زاویه ای ایجاد شده بر اثر وارد آمدن تنش برشی می توان نوشت:

$$dL = dV_y \times dt = dx.tg(d\beta)$$

$$tg(d\beta) \cong d\beta \Rightarrow dV_y.dt = dx.d\beta$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{dV_y}{dx} \Rightarrow \tau \propto \frac{d\beta}{dt} \Rightarrow \tau \propto \frac{dV_y}{dx} \quad (1-27)$$

➤ در هر دو حالت (وجود تغییرات سرعت در راستای X و در راستای y) مشاهده می شود که تنش متناسب با تغییرات زاویه ای سرعت است و این تغییرات نسبت به هر دو راستای X و y متقارن است.

روابط تنش‌های نرمال و برشی

➤ با در نظر گرفتن ویسکوزیته سیال به عنوان ضریب تناسب در معادلات شماره ۱-۲۶ و ۱-۲۷ (تنها در مورد سیالهای نیوتنی)، در مورد تنش برشی می توان نوشت:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{dU_x}{dy} + \frac{dV_y}{dx} \right) \quad (1-28)$$

➤ در مورد تنش نرمال می توان نوشت:

$$\tau_{xx} = -\mu \left(2 \frac{dU_x}{dx} - \frac{2}{3} \left(\frac{dU_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} + \frac{dW_z}{dz} \right) \right) \quad (1-29)$$

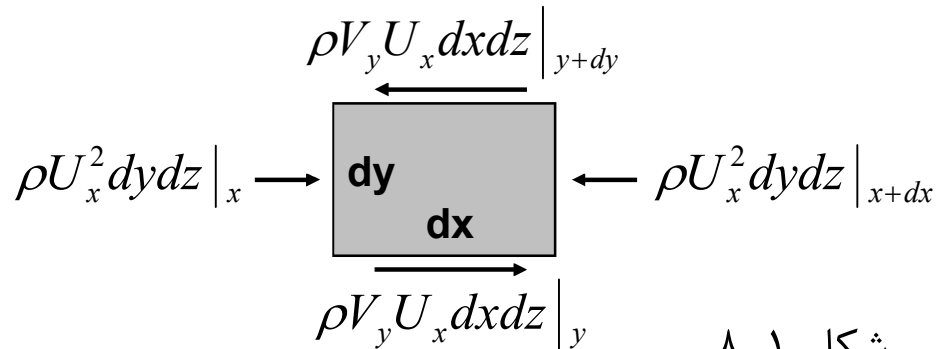
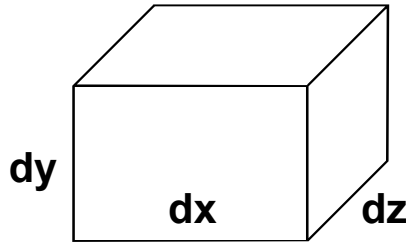
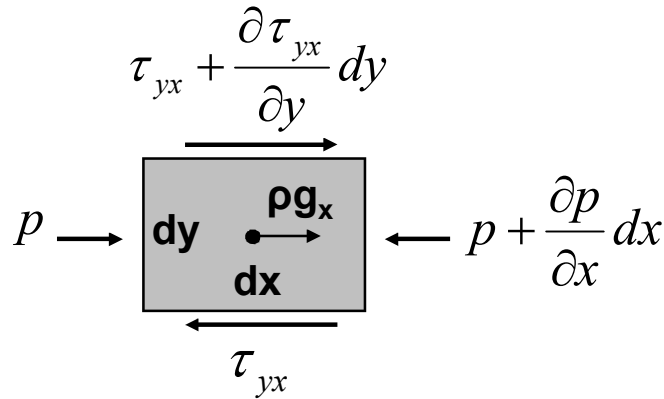
➤ ترم اول در جریان توسعه یافته (fully developed) صفر است. ترم دوم برای سیال تراکم ناپذیر صفر است. بنابراین معمولاً normal stress صفر می باشد.

خود آزمایی

➤ تنش نرمال در چه مواردی می تواند مورد توجه قرار نگیرد؟
سیال تراکم ناپذیر
جریان توسعه یافته
موارد الف و ب
در همه شرایط باید این تنش را در نظر گرفت.

معادله حرکت

➤ در مختصات کارتزین (XYZ) نیروها و اندازه حرکت های وارد شده به یک المان کوچک در راستای X به ترتیب زیر نوشته می شوند:



شکل ۸-۱

معادله حرکت

$$\rho U_x U_x dydz \Big|_x \quad \rho U_x U_x dydz \Big|_{x+dx}$$

$$\rho V_y U_x dx dz \Big|_y \quad \rho V_y U_x dx dz \Big|_{y+dy}$$

$$\rho W_z U_x dx dy \Big|_z \quad \rho W_z U_x dx dy \Big|_{z+dz}$$

$$\tau_{xx} dydz \Big|_x \quad \tau_{xx} + \left(\partial \tau_{xx} / \partial x \right) dx$$

$$\tau_{yx} dx dz \Big|_y \quad \tau_{yx} + \left(\partial \tau_{yx} / \partial y \right) dy$$

$$\tau_{zx} dx dy \Big|_z \quad \tau_{zx} + \left(\partial \tau_{zx} / \partial z \right) dz$$

$$p \quad p + \left(\partial p / \partial x \right) dx$$

$$\rho g_x$$

$$\text{Accumulation} : \partial(\rho U_x dx dy dz) / \partial t$$

معادله حرکت

➤ موازنه اندازه حرکت به صورت زیر نوشته می شود:

نرخ خروج اندازه حرکت - نرخ ورود اندازه حرکت = نرخ انباشتگی اندازه حرکت
جمع نیروهایی وارده شده بر سیستم +

$$\begin{aligned} \partial(\rho U_x dx dy dz) / \partial t = & \rho U_x U_x dy dz \Big|_x + \rho V_y U_x dx dz \Big|_y + \rho W_z U_x dx dy \Big|_z \\ & + \tau_{xx} dy dz \Big|_x + \tau_{yx} dx dz \Big|_y + \tau_{zx} dx dy \Big|_z - \rho U_x U_x dy dz \Big|_{x+dx} \\ & - \rho V_y U_x dx dz \Big|_{y+dy} - \rho W_z U_x dx dy \Big|_{z+dz} - (\tau_{xx} + (\partial \tau_{xx} / \partial x) dx) dy dz \Big|_{x+dx} \\ & - (\tau_{yx} + (\partial \tau_{yx} / \partial y) dy) dx dz \Big|_{y+dy} - (\tau_{zx} + (\partial \tau_{zx} / \partial z) dz) dx dy \Big|_{z+dz} \\ & + p dy dz - (p + (\partial p / \partial x) dx) dx dy dz + \rho g_x dx dy dz \end{aligned}$$

معادله حرکت

➤ معادله موازنه اندازه حرکت به صورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho U_x U_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y U_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho W_z U_x \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (1-30)$$

➤ اگر دانسیته سیال ثابت باشد ($\rho = cte$):

$$\rho \frac{\partial U_x}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial(U_x U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y U_x)}{\partial y} + \frac{\partial(W_z U_x)}{\partial z} \right) = \rho \frac{DU_x}{Dt} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (1-31)$$

معادله حرکت در جهت های Y و Z

➤ به همین شیوه می توان معادله حرکت را در جهت های Y و Z نیز نوشت:

$$\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho U_x V_y + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y V_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho W_z V_y \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (1-32)$$

$$\frac{\partial(\rho W_z)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho U_x W_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y W_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho W_z W_z \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (1-33)$$

معادله حرکت

➤ تشابه این معادلات با شکل ساده قانون دوم نیوتن به سادگی قابل فهم می باشد.

$$M \frac{DU}{Dt} = \sum F \quad (1-34)$$

➤ با استفاده از روابط مربوط به تنشهای نرمال و برشی برای سیالهای نیوتنی می توان شکل سرعتی معادله حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + W_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \\ = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (1-35) \end{aligned}$$

معادله حرکت

➤ همچنین با استفاده از مقادیر تنش می توان معادله حرکت در راستای y را نیز به صورت زیر نوشت:

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{dp}{dy} - \rho g + \mu \left(\frac{d^2 V_y}{dx^2} + \frac{d^2 V_y}{dy^2} + \frac{d^2 V_y}{dz^2} \right) + \frac{1}{3} \mu \frac{d}{dy} \left(\frac{dU_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} + \frac{dW_z}{dz} \right) \quad (1-36)$$

➤ ترم آخر سمت راست برای سیال تراکم ناپذیر صفر می باشد.

$$\Rightarrow \rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{dp}{dy} - \rho g + \mu \nabla^2 V_y \quad (1-37)$$

خود آزمایی

تعداد ترمهای معادله حرکت در جهت y عبارتند از:

۸

۱۲

۹

۱۳

معادله حرکت

➤ به صورت کلی می توان این معادلات (Navior – Stocks) را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v = -[\nabla \cdot \rho v v] - \nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \quad (1-38)$$

➤ که در این رابطه:

نرخ افزایش اندازه حرکت در واحد حجم:

$$[\nabla \cdot \rho v v]$$

نرخ ورود مومنتوم با جریان همرفت در واحد حجم:

$$[\nabla \cdot \tau]$$

نرخ ورود مومنتوم با جریان ویسکوز در واحد حجم:

$$\nabla p$$

نیروی فشاری وارد شده در واحد حجم:

$$\rho g$$

نیروی گرانشی وارد شده در واحد حجم:

معادله حرکت

➤ نمایش عمومی معادله حرکت با استفاده از مشتق گیری اساسی به صورت زیر در می آید:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla p + \rho G - \nabla \tau \quad (1-39)$$

➤ اگر سیال نیوتنی باشد، می توان نوشت:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla p + \rho G + \mu \nabla^2 U \quad (1-40)$$

➤ Euler معادله

➤ هرگاه از تأثیر ویسکوزیته صرف نظر شود (سیال ایده‌ال)، می توان نوشت:

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \quad (1-41)$$

معادله حرکت

➤ در حالت پایا معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

$$\rho \left(U_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + W_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \quad (1-42)$$

➤ برای سیال ایده‌ال ($\mu=0$) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial W_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial W_z}{\partial y}$$

➤ این روابط برای سیال غیرچرخشی (سیال ایده‌ال) صادق می‌باشند و در بخش ۳ اثبات می‌شوند.

معادله حرکت

$$\rho \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial y} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \quad (1-43)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho (U_x^2 + V_y^2 + W_z^2) + p + \rho g y = cte$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho U^2 + p + \rho g y = cte$$

$$\Rightarrow \frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + y = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + y_1 \quad (1-44)$$

این معادله رابطه Bernoulli می باشد. ➤

معادله حرکت در مختصات استوانه ای

➤ در راستای r (شکل تنش)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + \rho g_r \quad (1-45)$$

➤ در راستای r (شکل سرعتی)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \rho g_r \quad (1-46)$$

معادله حرکت در مختصات استوانه ای

➤ در راستای θ (شکل تنش)

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + \rho g_\theta \quad (1-47)$$

➤ در راستای θ (شکل سرعتی)

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho g_\theta \quad (1-48)$$

معادله حرکت در مختصات استوانه ای

➤ در راستای Z (شکل تنش)

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (1-49) \end{aligned}$$

➤ در راستای Z (شکل سرعتی)

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (1-50) \end{aligned}$$

معادله حرکت در مختصات کروی

➤ در راستای r (شکل تنش) (تنشی)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) \right. + \rho g_r$$

$$\left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right)$$

(1-51)

معادله حرکت در مختصات کروی

➤ در راستای r (شکل سرعتی)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right) + \rho g_r$$

(1-52)

معادله حرکت در مختصات کروی

➤ در راستای θ (شکل تنش)

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right)$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) \right. \\ \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right) + \rho g_\theta$$

(1-53)

معادله حرکت در مختصات کروی

➤ در راستای θ (شکل سرعتی)

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right)$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\ & - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \end{aligned} \right) + \rho g_\theta \quad (1-54)$$

معادله حرکت در مختصات کروی

➤ در راستای Φ (شکل تنش)

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta \right)$$

$$= - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right) + \rho g_\phi$$

(1-55)

معادله حرکت در مختصات کروی

➤ در راستای Φ (شکل سرعتی)

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta \right)$$

$$= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \\ & + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \end{aligned} \right) + \rho g_\phi \quad (1-56)$$

- به منظور حل مسایل مربوط به دینامیک سیالات لازم است معادلات پیوستگی و حرکت (Navier – Stocks) حل شوند.
- با حل این معادلات توزیع سرعت تعیین می شود.
- تشخیص جهت (جهات) اصلی حرکت (مطابق جهت جریان) و مولفه های اصلی (غیر صفر) سرعت بسیار اهمیت دارد.

تمرین ۱:

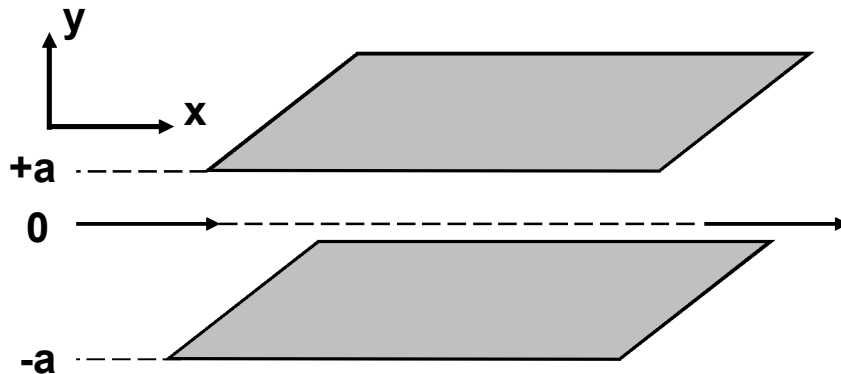
➤ توزیع سرعت سیالی را که میان دو صفحه افقی موازی حرکت می کند، تعیین نمایید.

➤ حل:

➤ فرضیات مسأله:

✓ جریان یک بعدی فرض می شود ($V_y = 0$).

✓ جریان توسعه یافته فرض می شود ($U_x \neq g(x)$).



شکل ۱-۹

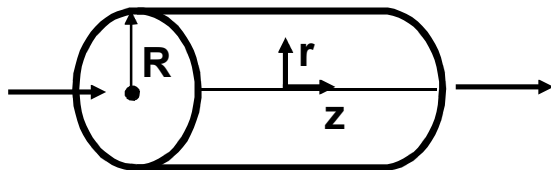
تمرین ۲:

➤ توزیع سرعت سیال در داخل یک لوله افقی را بررسی نمایید.

➤ حل:

➤ فرضیات مسأله:

✓ جریان یک بعدی در راستای Z و توسعه یافته فرض می شود.



شکل ۱-۱۰

- با نوشتن مولفه های نیرو و اندازه حرکت معادلات حرکت را بدست آوردیم.
- با نوشتن معادله حرکت در جهت مناسب و حذف ترم های کوچک (صفر) توزیع سرعت را بدست آوردیم.

خود آزمایی

➤ هر گاه ویسکوزیته سیال ناچیز باشد، می توان گفت: معادله حرکت به معادله اولر ساده می شود. ترمهای مربوط به تنش از معادله حرکت حذف می شوند. سیال ایده آل در نظر گرفته می شود. همه موارد فوق درست می باشند.

➤ معادله برنولی با فرض از معادله اولر به دست می آید.
سیال غیر چرخشی
سیال غیرنیوتنی
سیال حقیقی
سیال نیوتنی

خود آزمایی

➤ تعداد المانهای تنش در راستاهای گوناگون در یک دستگاه مختصات بردار می باشند.

۳

۶

۹

۱۲

➤ حل معادله حرکت منجر به می شود.

تعیین توزیع سرعت سیال

تعیین توزیع فشار

تعیین توزیع تنش

تعیین توابع توزیع سرعت، فشار و تنش سیال



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

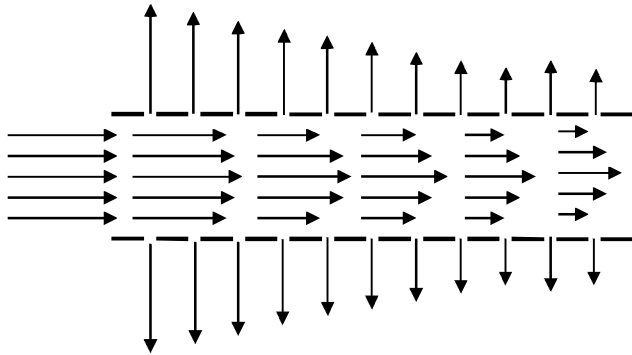
✓ راستای مناسب جهت به کار گیری معادلات حرکت در سیستم مختصات مناسب را تشخیص بدهد.

✓ معادلات حرکت را متناسب با فیزیک مسأله ساده سازی نماید.

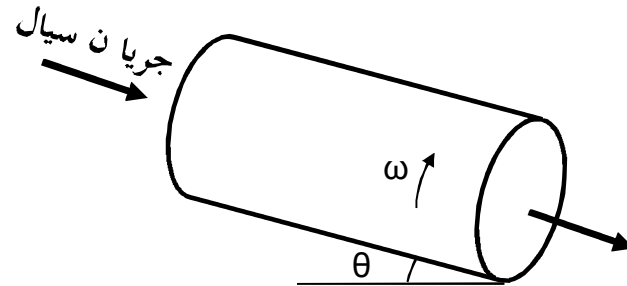
✓ توزیع سرعت، فشار و نیروها را به دست آورد.

کاربرد

➤ کاربرد این بخش در مدل کردن جریان سیال در سیستمهای مختصات گوناگون و به دست آوردن توزیع پارامترهای مهم سیالاتی (توزیع تنش، سرعت و فشار) در یک مورد مشخص می باشد.



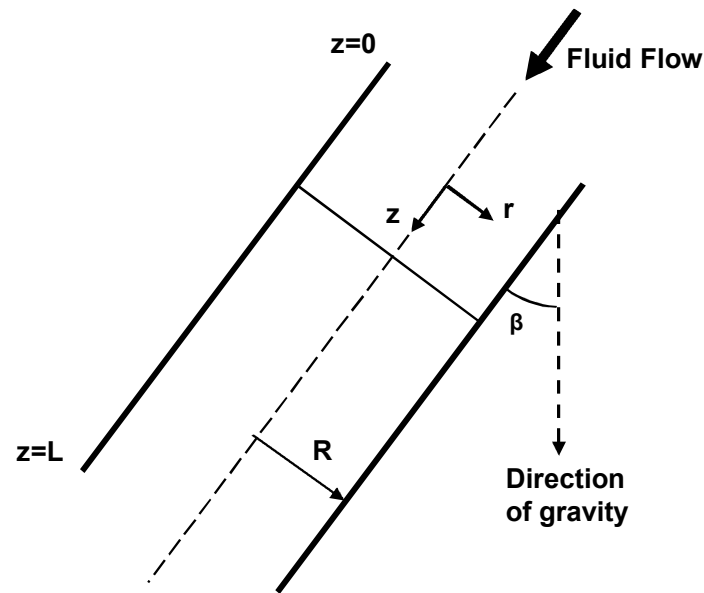
جریان از درون يك لوله متخلخل



جریان يك سیال مانند قیر مذاب

تمرین ۱:

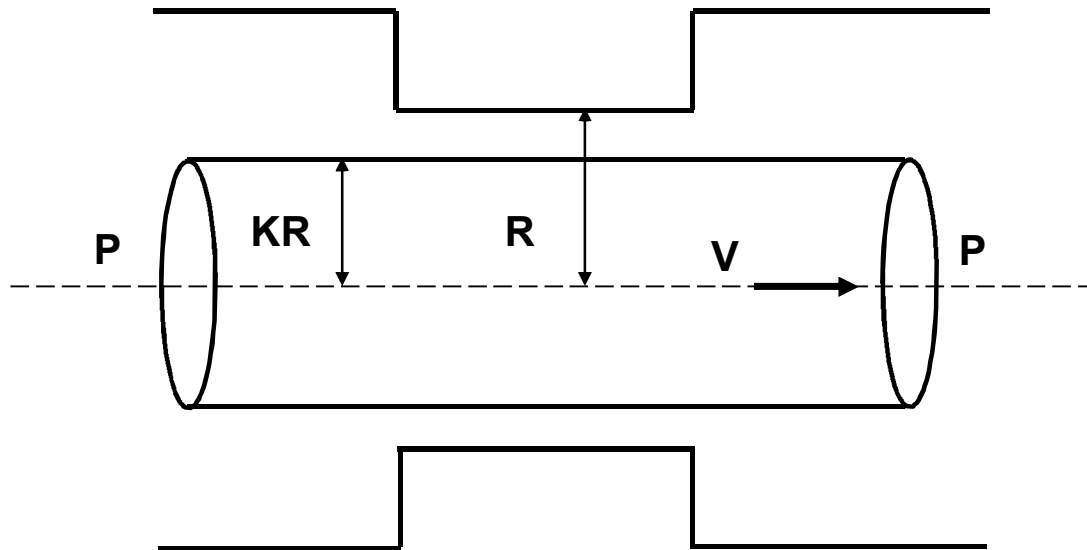
توزیع سرعت را در جریان آرام یک سیال تراکم ناپذیر نیوتنی در داخل لوله مطابق شکل که تحت تأثیر اختلاف فشار و جاذبه ثقلی می باشد، به دست آورید. همچنین سرعت‌های بیشینه و میانگین و نیز دبی جرمی جریان را محاسبه نمایید.



تمرین ۲:

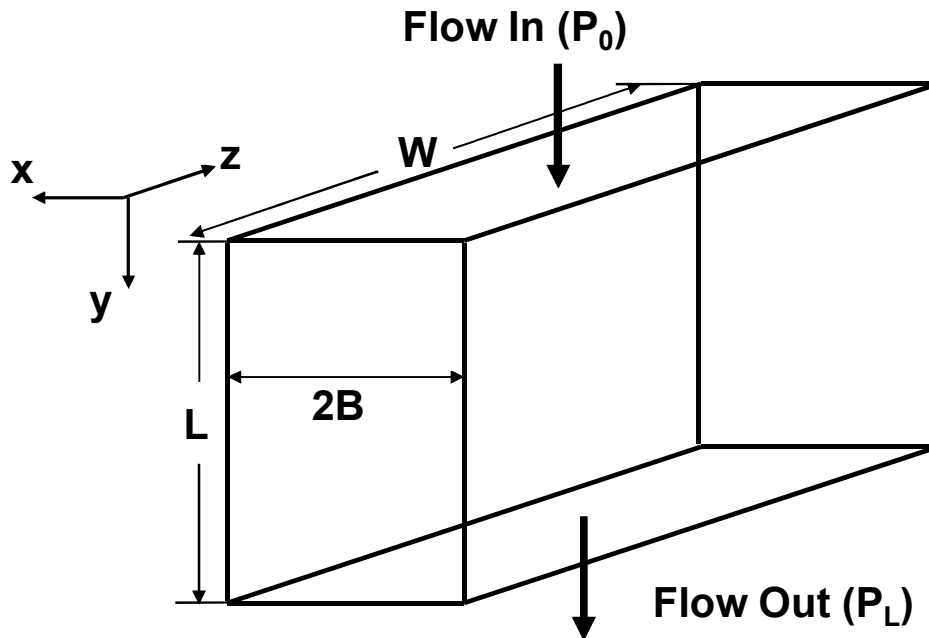
➤ دبی حجمی جریان آرام سیال تراکم ناپذیر در داخل فضای بین سیلندر و پیستونی که تحت تأثیر حرکت پیستون می باشد، را به دست آورید (پیستون مطابق شکل با سرعت V به سمت راست حرکت می کند).

➤ حل:



تمرین ۳:

دبی حجمی جریان را برای جریان آرام سیال تراکم ناپذیر در داخل فضای کانال مطابق شکل که تحت تاثیر اختلاف فشار و جاذبه ثقلی می باشد، به دست آورید. حل:



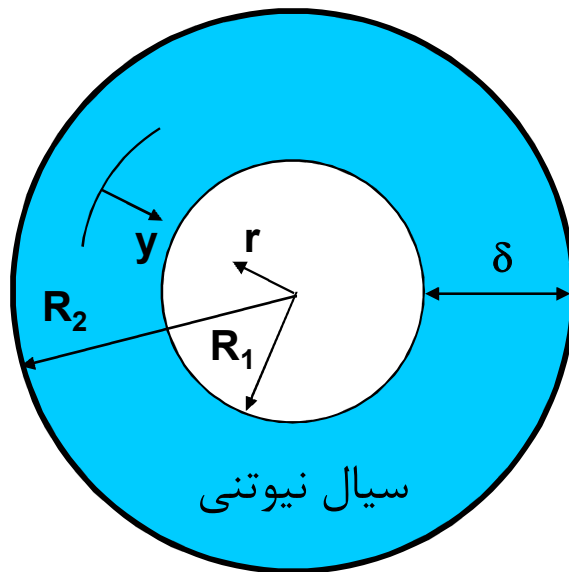
فرضیات مسأله:

- ✓ جریان یک بعدی است
- و x نسبت به y و z
- بسیار کوچک می باشد.
- ✓ از اثرات انتهایی
- صرف نظر می شود.

تمرین ۴:

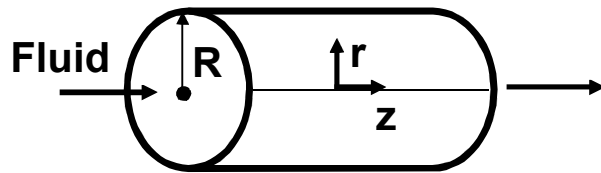
➤ توزیع سرعت را برای جریان آرام سیال تراکم ناپذیر نیوتنی در فضای بین دو لوله مطابق شکل که تحت تاثیر دوران لوله درونی می باشد به دست آورید. همچنین توان مورد نیاز را محاسبه نمایید.

➤ حل:



تمرین ۵:

➤ توزیع سرعت سیال را در لوله با جریان لغزشی (Slip Flow) بدست آورید.



➤ حل:

➤ با ساده کردن معادله حرکت در راستای Z می توان نوشت:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz})$$

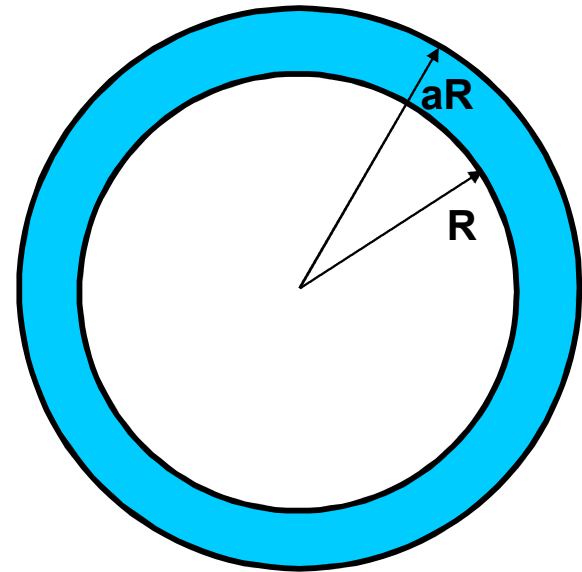
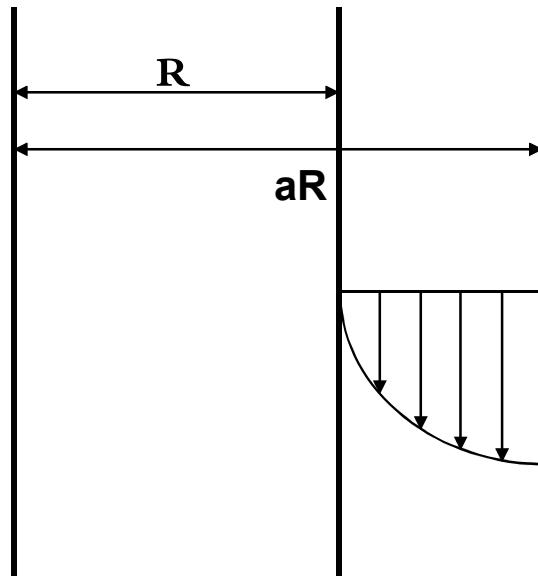
➤ جریان توسعه یافته فرض می شود، بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$$

تمرین ۶:

➤ توزیع سرعت را برای جریان آرام سیال تراکم ناپذیر سقوط کننده در بیرون لوله عمودی مطابق شکل که تحت تأثیر جاذبه ثقلی می باشد، به دست آورید.

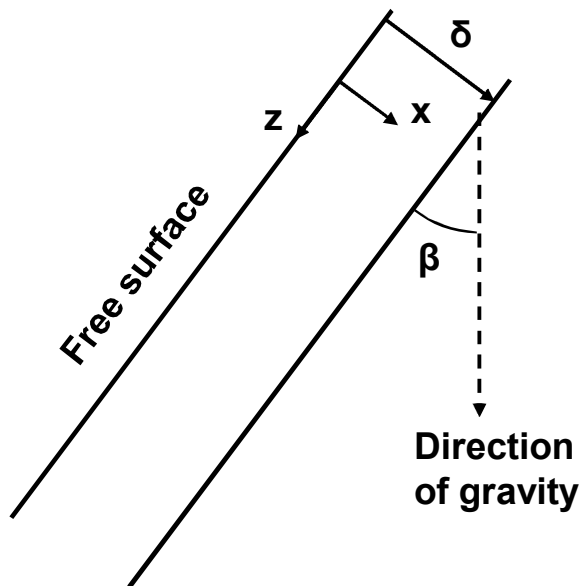
➤ حل:



تمرین ۷:

توزیع سرعت در حالت پایا، دبی جرمی سیال، نیروی وارد شده از طرف سیال و میانگین سرعت را برای جریان آرام سیال تراکم ناپذیر سقوط کننده مطابق شکل به دست آورید.

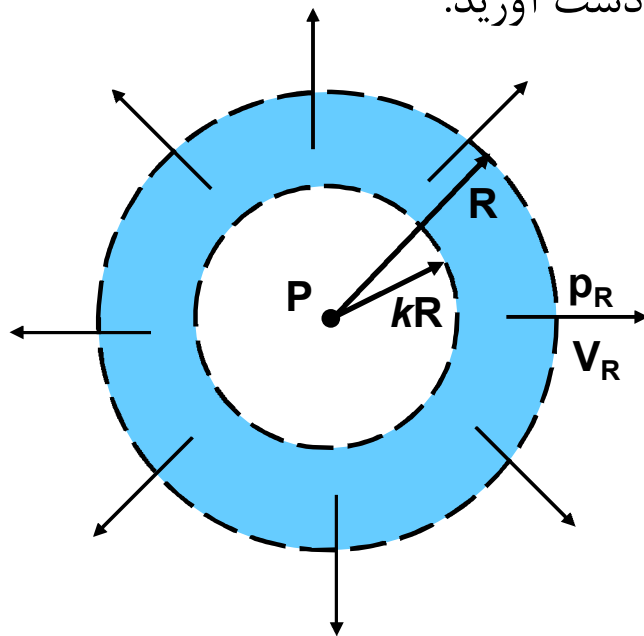
حل:



تمرین ۱:

➤ جریانی از سیال تراکم ناپذیر در حالت همدمما با دانسیته ρ در اثر اختلاف فشار بین دو استوانه هم محور متخلخل مطابق شکل وجود دارد. جریان سیال را با توجه به وجود سرعت در سطوح جامد و صرفنظر از طول استوانه بررسی و توزیع فشار و سرعت را در شعاع R به دست آورید.

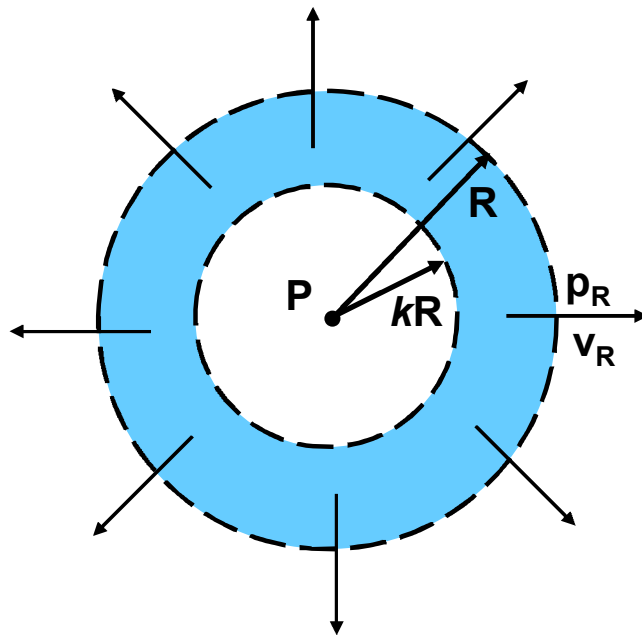
➤ حل:



تمرین ۹:

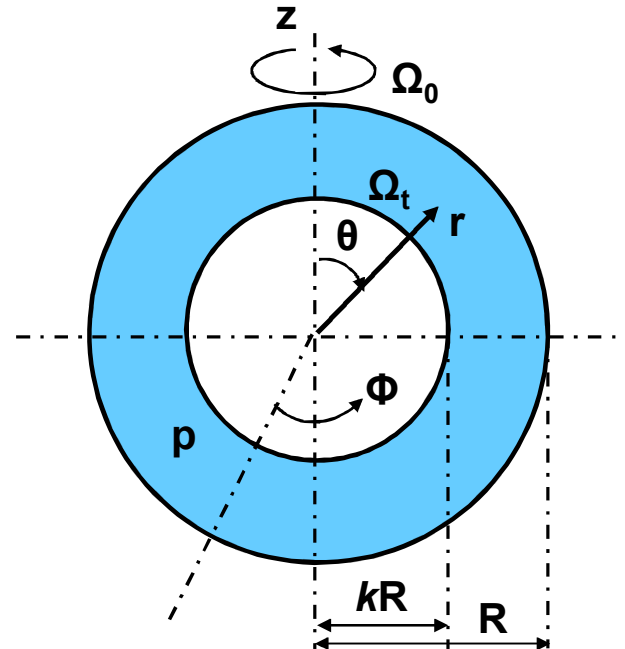
➤ جریانی از سیال تراکم ناپذیر در حالت همدمما با دانسیته ρ در اثر اختلاف فشار بین دو کره هم مرکز متخلخل مطابق شکل وجود دارد. جریان سیال را با توجه به وجود سرعت در سطوح جامد و جریان آرام بررسی نمایید و توزیع فشار و سرعت را به دست آورید.

➤ حل:



مسأله:

➤ جریانی از سیال تراکم ناپذیر در حالت همدمما و آرام بین دو کره هم مرکز با سطوح در حال چرخش مطابق شکل قرار دارد. توزیع سرعت سیال را در حالت پایا با فرض کوچک بودن مقادیر سرعت چرخش (جریان خزشی) بدست آورید.



خلاصه:

➤ با نوشتن معادله حرکت در جهت مناسب و حذف ترم های کوچک (تقریباً صفر) توزیع سرعت در مسائل مختلف تعیین گردید.

➤ لازم به یادآوری است در عمل بسیاری از مسائل بدین سادگی قابل حل نمی باشند و لازم است معادلات به شکل کامل تری حل شوند.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



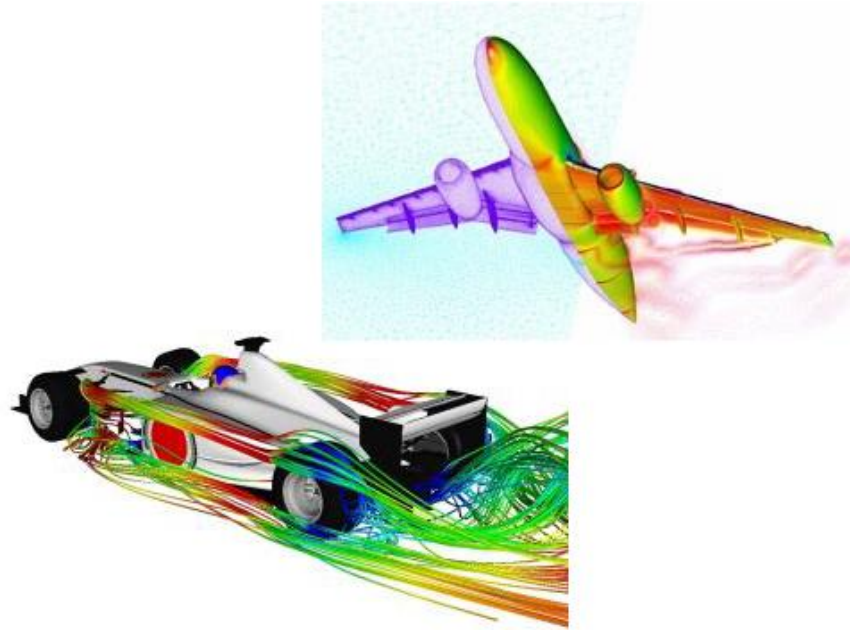
هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

- ✓ در موارد واقعی و کاربردی درک درستی از مسأله پیدا نماید.
- ✓ بتواند راستای درست را سیستم مختصات مناسب برای حل کردن مسأله تشخیص دهد.
- ✓ معادله های پیوستگی و حرکت را ساده سازی و حل نماید.

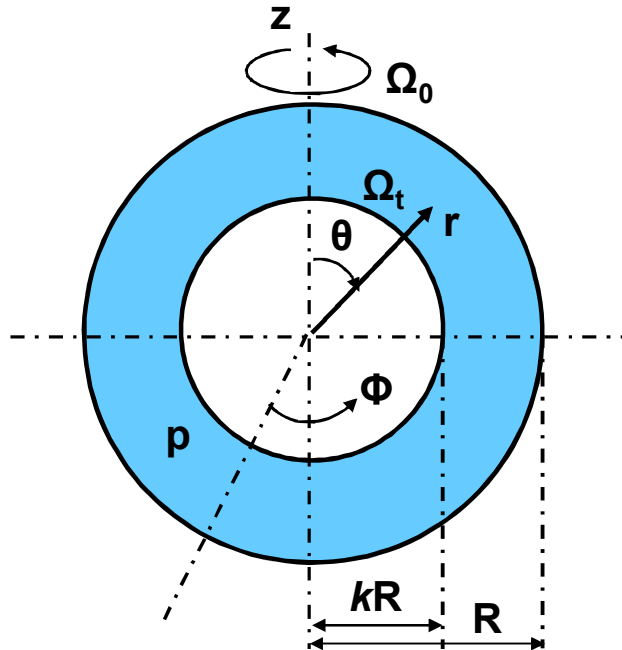
کاربرد بخش

➤ بسیاری از وسایل و تجهیزات اندازه گیری ویژگیهای سیال بر اساس روابط بنیادی کار می کنند. با درک مثالهای ارائه شده در این بخش می توان اساس کار این وسایل را بهتر درک نمود.



تمرین ۱۰:

➤ جریانی از سیال تراکم ناپذیر در حالت همدما و آرام بین دو کره هم مرکز با سطوح در حال چرخش مطابق شکل قرار دارد. توزیع سرعت سیال را در حالت پایا با فرض کوچک بودن مقادیر سرعت چرخش (جریان خزشی) به دست آورید.

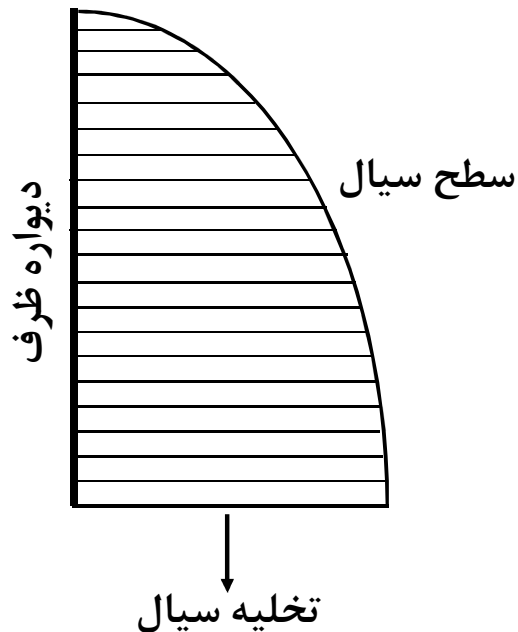


➤ حل:

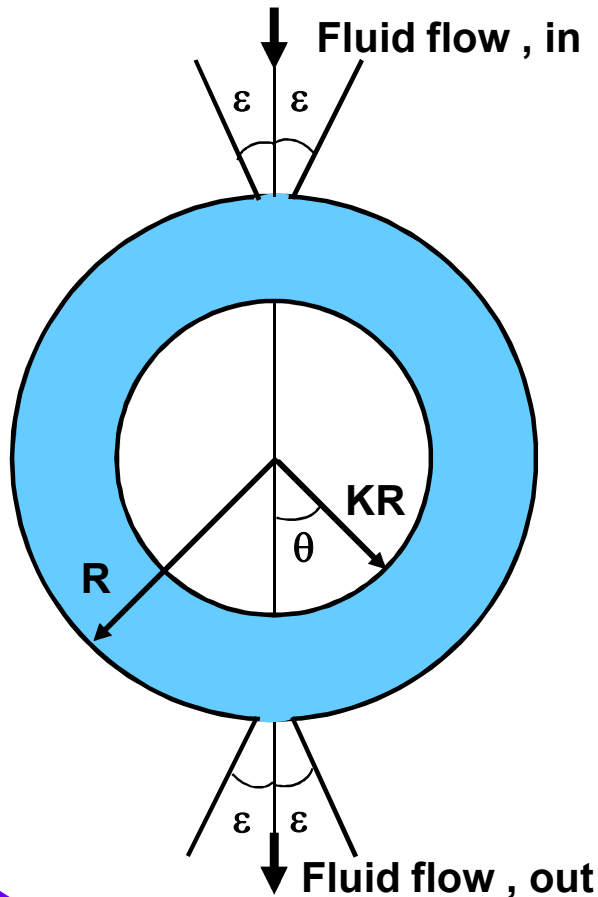
➤ با توجه به فیزیک مسأله می توان معادله های پیوستگی و حرکت را برای حالت پایای سیال تراکم ناپذیر به صورت زیر ساده نمود:

تمرین ۱۱:

➤ ظرف بسیار بزرگی را در نظر بگیرید. در یک لحظه کف ظرف به یکباره برداشته می شود. خالی شدن سیال از کف ظرف را مدل نمایید.



تمرین ۱۲:



➤ جریانی خزشی سیال تراکم ناپذیر (در اثر اختلاف فشار) بین دو کره هم مرکز مطابق شکل وجود دارد. دبی حجمی سیال را به دست آورید.

➤ حل:

➤ با به کار گیری معادله های پیوستگی و حرکت در مختصات کروی و ساده کردن آنها می توان مسأله را مدل نمود.

تمرین ۱۳:

➤ سیالی در داخل یک استوانه بر اثر چرخش دیسکی در بالای آن با سرعت زاویه ای ω به حرکت در می آید. توزیع سرعت جریان را در حالت پایا به دست آورید. سطح پایینی استوانه ساکن می باشد.

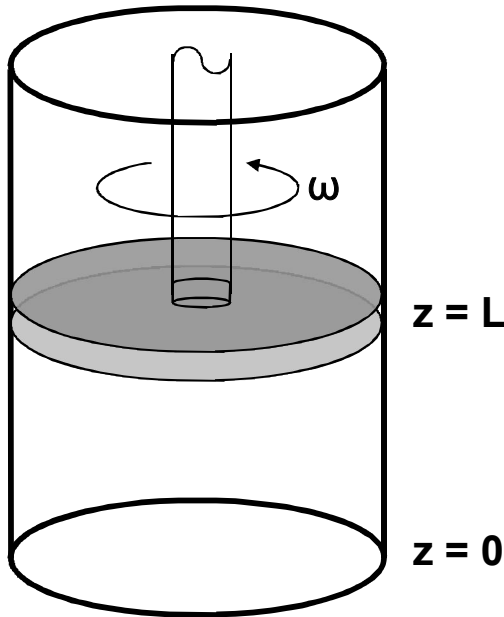
➤ حل:

✓ با توجه به فیزیک مسأله می توان

دریافت که جریان یک بعدی (در

راستای θ) می باشد و بدین ترتیب

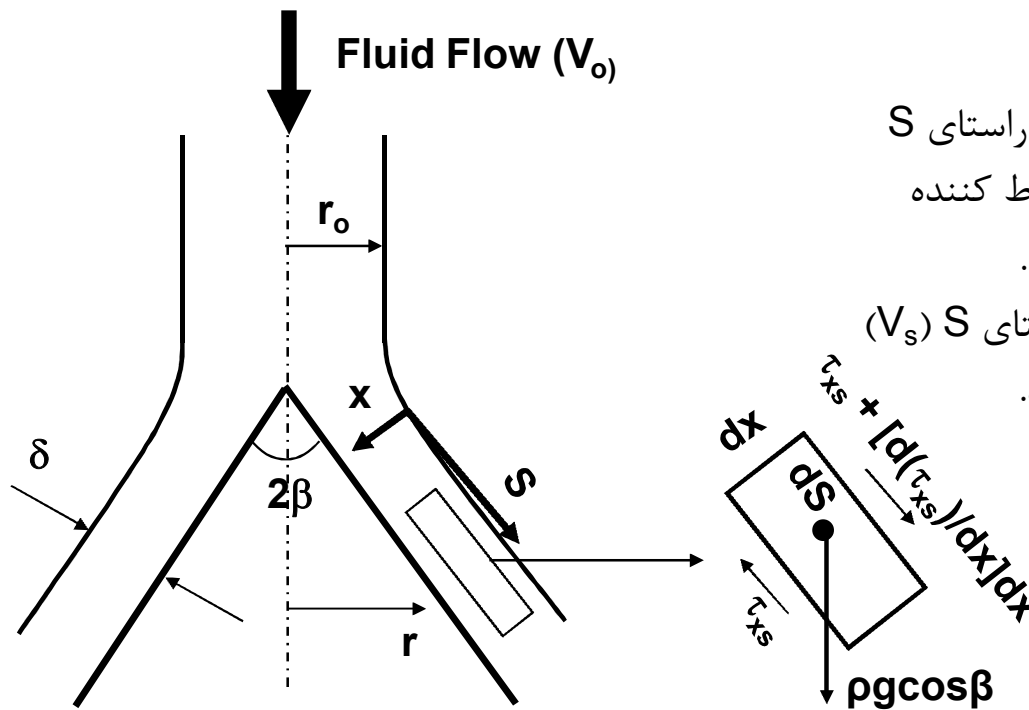
معادله ها ساده می شوند:



تمرین ۱۴:

➤ جتی از سیال بر روی یک مخروط (برابر شکل) جاری می شود. ضخامت لایه فیلم بر روی مخروط را تعیین نماید.

➤ حل:



✓ موازنه نیرو در راستای S

برای فیلم سقوط کننده نوشته می شود.

✓ سرعت در راستای S (V_s)

فرض می شود.

خلاصه:

- با نوشتن معادله حرکت در جهت مناسب و حذف ترمهای کوچک (تقریباً صفر) و یا المان گیری و موازنه نیروها توزیع سرعت را به دست آوردیم.
- لازم به ذکر است که در عمل بسیاری از مسایل بدین سادگی قابل حل نمی باشند و لازم است معادلات باز هم به شکل کامل تری حل شوند.
- بدین جهت لازم است روش هایی برای حل معادلات حرکت ارائه شود.
- با این حال در بسیاری از مسایل ناچار باید از نرم افزارهای حل معادلات ریاضی استفاده کرد.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

- پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
 - ✓ اعداد بدون بعد و مفهوم آنها را بشناسد.
 - ✓ با شیوه های بدون بعد نمودن معادله های اساسی آشنا شود.
 - ✓ افزایش مقیاس بر مبنای اعداد بدون بعد را انجام دهد.

➤ می توان با بدون بعد نمودن معادله های اساسی در بررسی جریان سیال اهمیت اندازه فیزیکی سیستمی که سیال در آن جاری است را از بین برد و تنها به نسبت میان ابعاد فیزیکی مسأله پرداخت. به بیان دیگر در اعداد بدون بعد اندازه سیستم مورد مطالعه اهمیت چندانی ندارد و تنها نسبت ابعاد مهم می باشد. بر اساس بدون بعد سازی است که می توان با مطالعه یک سیستم با اندازه کوچک (آزمایشگاهی) نتایج به دست آمده را به سیستمهای بزرگتر (واقعی) تعمیم داد (افزایش مقیاس).

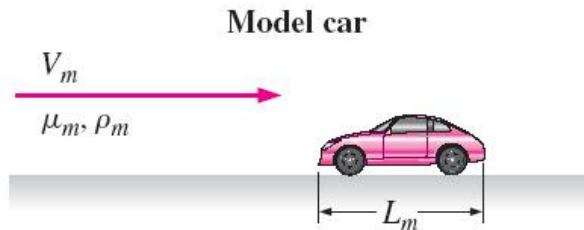
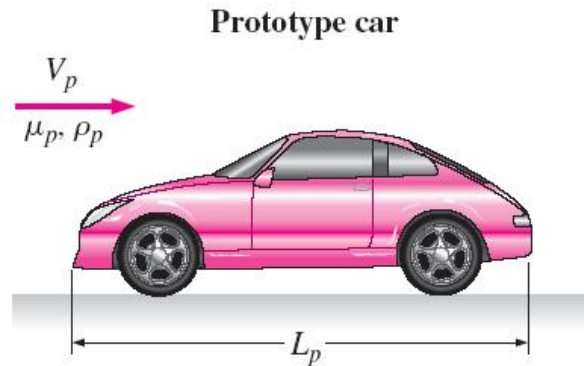
کاربرد

➤ به عنوان نمونه می توان به شباهت رژیم جریان در اطراف یک قایق کوچک (Model) و یک قایق بزرگ (Prototype) و نیز نیروهای وارد شده به هر دو اشاره نمود.



کاربرد

➤ همچنین می توان به شباهت رژیم جریان در اطراف مدل نمونه خودرو کوچک (Model) و یک قایق بزرگ (Prototype) و نیز نیروهای وارد شده به هر دو اشاره نمود.



آنالیز ابعادی یا افزایش مقیاس

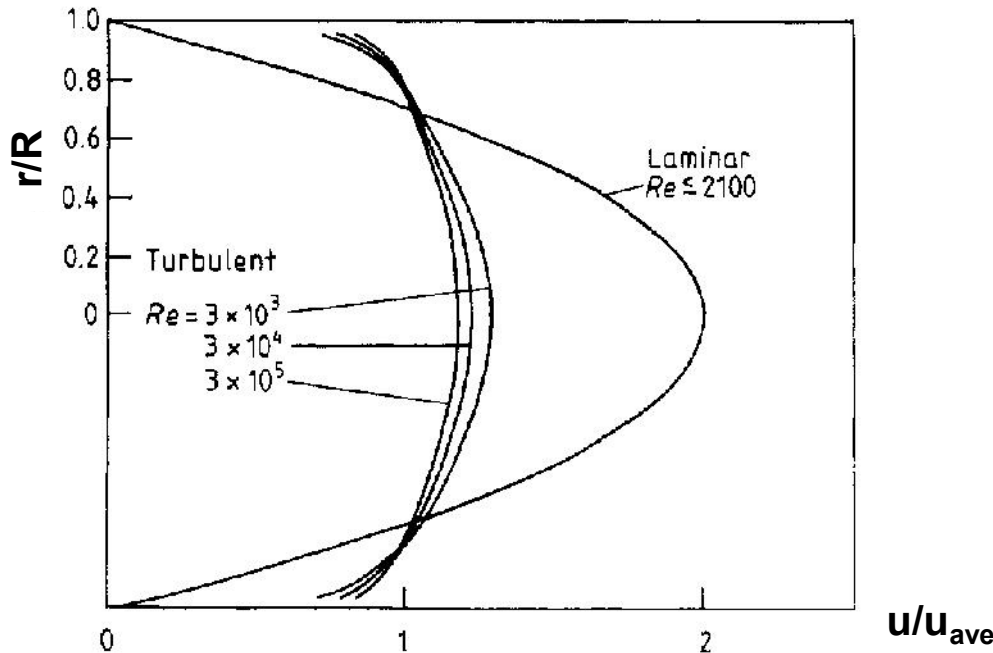
Scale-Up or Dimensional Analysis

- معمولاً در صنعت پیش از ساختن نمونه اصلی (Prototype) نمونه کوچکی (Model) ساخته می شود و آزمایشهای اولیه بر روی آن انجام می گیرد.
- هرگاه **تشابه هندسی** بین این دو نمونه برقرار باشد و معادلات حرکت به صورت بدون بعد نوشته شوند، در صورت **برابری اعداد بدون بعد** در دو معادله، معادلات فوق یکسان و به یک جواب منتهی می شوند.
- در نتیجه از جوابهای مربوط به Model می توان برای Prototype نیز استفاده کرد.
- به عبارت دیگر، توزیع سرعت، دما و فشار برای آنها یکسان خواهد بود.

آنالیز ابعادی یا افزایش مقیاس

Scale-Up or Dimensional Analysis

➤ به عنوان مثال برای جریان در یک لوله افقی که در آن طول مشخصه قطر لوله و سرعت مشخصه سرعت میانگین (U_{ave}) می باشد، با بدون بعد کردن فاصله از مرکز لوله (r/R)؛ توزیع سرعت (U/U_{ave}) مستقل از قطر لوله می شود.



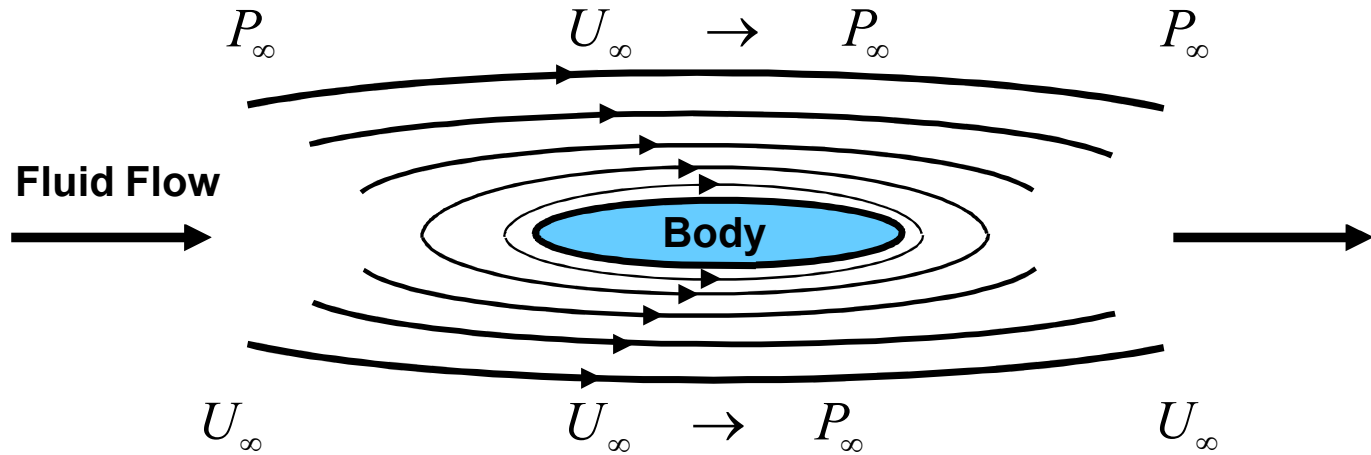
بدون بعد سازی معادلات

➤ معادلات Navier-Stokes را برای سیستم دو بعدی و در راستای X به صورت ذیل می توان نوشت:

$$\rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right)$$

➤ در حرکت نسبی سیال و جسمی به طول مشخصه L (که بسته به سیستم می تواند درازا، پهنا، بلندی، قطر و ... باشد) می توان کمیتهای سیستم را که از جنس درازا باشند بدون بعد نمود. همچنین از مقادیر مشخص سرعت و فشار و ... می توان برای بدون بعد سازی سایر کمیتهای فیزیکی استفاده کرد.

بدون بعد سازی معادلات



➤ همه کمیت‌های موجود می‌توانند به صورت بدون بعد نوشته شوند:

$$U'_x = \frac{U_x}{U_\infty}, \quad V'_y = \frac{V_y}{U_\infty}, \quad P' = \frac{P}{P_\infty}$$

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad t' = \frac{t}{\tau}$$

بدون بعد سازی معادلات

➤ در این روابط P_∞ و U_∞ به ترتیب فشار سیال در نقاط بسیار دور از جسم و سرعت نسبی جسم و سیال می باشند. همچنین τ زمان مشخصه سیستم می باشد.

➤ با ضرب نمودن معادله بالا در عبارت " $L/\rho U_\infty^2$ " می توان نوشت:

$$\frac{L}{\tau U_\infty} \frac{\partial U'_x}{\partial t'} + U'_x \frac{\partial U'_x}{\partial x'} + V'_y \frac{\partial U'_x}{\partial y'} =$$
$$-\frac{p_\infty}{\rho U_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{Lg}{U_\infty^2} g'_x + \frac{\mu}{\rho L U_\infty} \left(\frac{\partial^2 U'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U'_x}{\partial y'^2} \right)$$

اعداد بدون بعد

➤ ضرایب به دست آمده در این شکل از معادله، *اعداد بدون بعد* می باشند و هر یک نسبت دو نیروی خاص را بیان می کنند.

$$\frac{\tau U_{\infty}}{L} \quad \text{Strouhal Number} \quad N_S$$

$$\frac{P_{\infty}}{\rho U_{\infty}^2} \quad \text{Euler Number} \quad N_E$$

$$\frac{U_{\infty}^2}{gL} \quad \text{Froude Number} \quad N_F$$

$$\frac{\rho L U_{\infty}}{\mu} \quad \text{Reynold Number} \quad N_R$$

اعداد بدون بعد

- هر یک از این اعداد بدون بعد به شکلی در تفسیر جریان سیال نقش ایفا می‌کنند.
- بعضی از این اعداد گاهی اوقات به شکلهای دیگر استفاده می‌شوند، اما از آنجایی که مقایسه آنها برای دو سیستم مورد نظر است، این تفاوت شکلی تأثیری در محاسبات ندارد.
- مثلاً:

$$Fr = \frac{U_{\infty}}{\sqrt{gL}} \quad Eu = \sqrt{\frac{1/2 \rho U_{\infty}^2}{p_{\infty}}}$$

تمرین ۱:

➤ یک مدل هواپیما در داخل تونل هوا مورد آزمایش قرار گرفته است.

$$U_m = U_p = 100 \text{ mph} \quad \frac{L_p}{L_m} = 20$$

$$T_m = T_p = 60^\circ F \quad \& \quad p_p = 14.7 \text{ psia}$$



➤ با توجه به فشار Prototype
(اتمسفِر)، فشار Model (p_m)
را محاسبه نمایید.

تمرین ۲:

➤ اگر در تمرین ۱ به جای هوا در داخل تونل از گاز Freon-12 در دمای 100°F استفاده شود، در آن صورت فشار نمونه (p_m) را محاسبه نمایید.

➤ حل:

$$\mu_m = 2.57 \times 10^{-7} \quad \mu_p = 3.75 \times 10^{-7} \frac{\text{lb} \cdot \text{s}}{\text{ft}^2}$$

$$R_m = 12.8 \text{ and } R_p = 53.3 \text{ psia} \cdot \text{ft}^3 / \text{lbm} \cdot ^\circ\text{R}$$

➤ در این حالت برای برقراری تشابه و به کار گیری اصول افزایش مقیاس، به برابری دو عدد بدون بعد نیاز داریم.

➤ نکته:

✓ در تمرین ۱ اعداد اولر یکسان می باشند و برابری آنها کمکی به حل مسأله نمی کند.

- بدون بعد سازی در حل مسائل مهندسی از اهمیت زیادی برخوردار است.
- اعداد بدون بعد نیز در مهندسی و در افزایش مقیاس از اهمیت زیادی برخوردار می باشند.
- در صورت تشابه هندسی و برابری اعداد بدون بعد نتایج معادلات حرکت برای **Model** و **Prototype** یکی می باشند.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ دانشجو پس از این بخش باید بتواند:

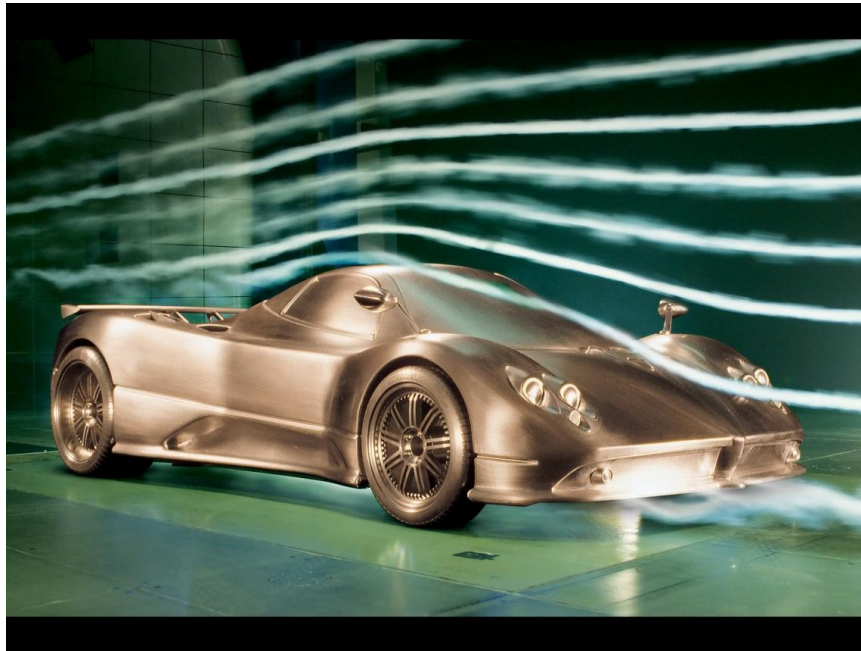
✓ نیروهای وارد شده به جسم سختی را که در مسیر جریان سیالی قرار دارد، بشناسد.

✓ تأثیر متقابل جسم سخت و سیال ناشی از حرکت نسبی جسم و سیال را تشخیص دهد.

✓ نیروی های دراگ و لیفت و تأثیر هر یک را بر روی اجسام بشناسد.

کاربرد

➤ کاربرد این بخش در بررسی و آنالیز اجسام سختی که در یک سیال در حال حرکت هستند، مثلاً حرکت یک اتومبیل، هواپیما، کشتی، قایق، راکت، گلوله و ... می باشد.



حرکت سیال بر روی اجسام

➤ آزمایشهای تجربی نشان داده است که در حرکت سیال از روی اجسام نیروهای فشار و ویسکوزیته تعیین کننده می باشند و نیروی جاذبه تاثیر کمتری بر روی حرکت سیال دارد. به همین علت اعداد رینولدز و اولر در مواردی که سیال بطور کامل اطراف جسم را احاطه کرده باشد (حرکت هواپیما، اتومبیل و راکت) حائز اهمیت می باشند.

$$N_R = \frac{Inertia}{Viscous} \quad N_E = \frac{Pressure}{Inertia}$$

➤ در حالیکه عدد فروید معمولاً در مواردی که سطح آزاد سیال محدود نمی باشد (کانالهای باز، همزن ها و حرکت قایق ها و کشتی ها) تعیین کننده است.

$$N_F = \frac{Inertia}{Gravity}$$

نیروی دراگ

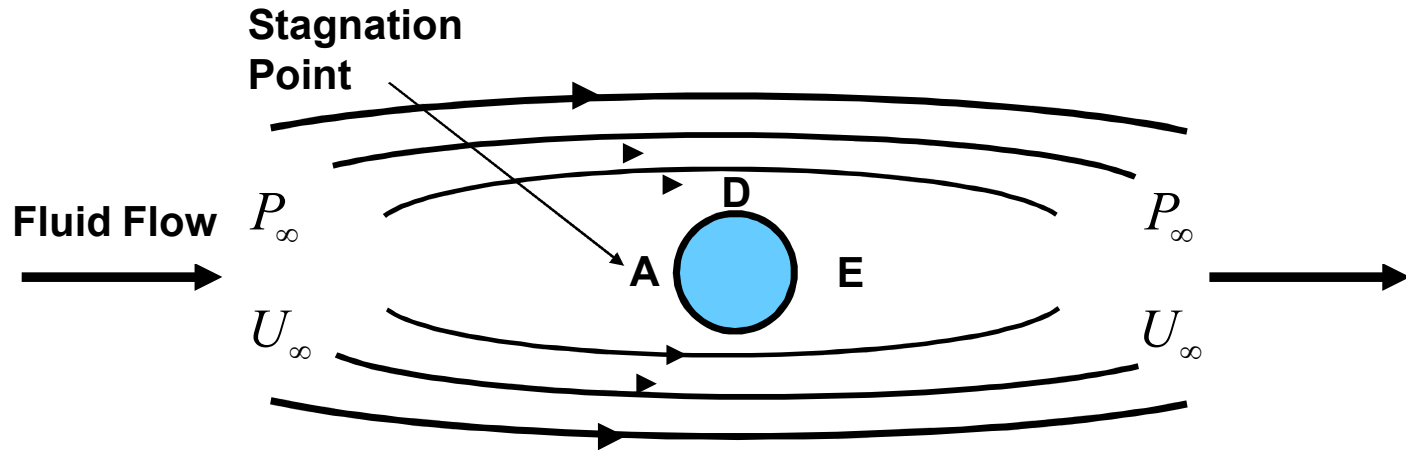
➤ نیروی وارد شده از طرف سیال واقعی به جسم در راستای حرکت نسبی جسم و سیال را نیروی دراگ می‌نامند.

$$F_{Drag} = F_{D Friction} + F_{D Pressure}$$

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho U_\infty^2 A$$

نیروی دراگ

➤ حرکت سیال بر روی یک استوانه را در نظر می گیریم:



➤ از آنجایی که سرعت در نقطه A صفر است، فشار به بیشینه میزان خود می رسد. در این حالت با حرکت سیال در امتداد جسم (به سمت بالا یا پائین) انرژی فشاری به انرژی جنبشی تبدیل می شود.

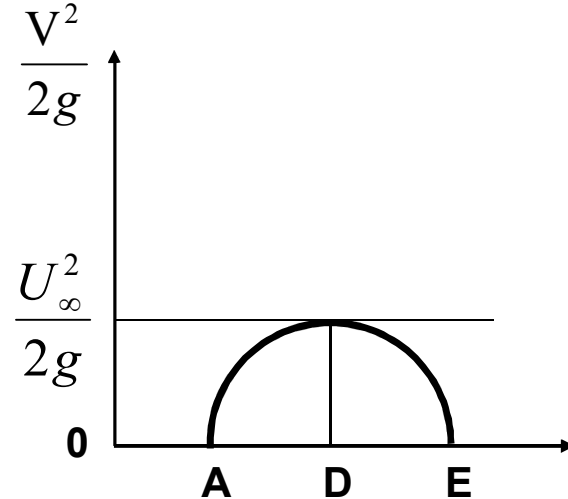
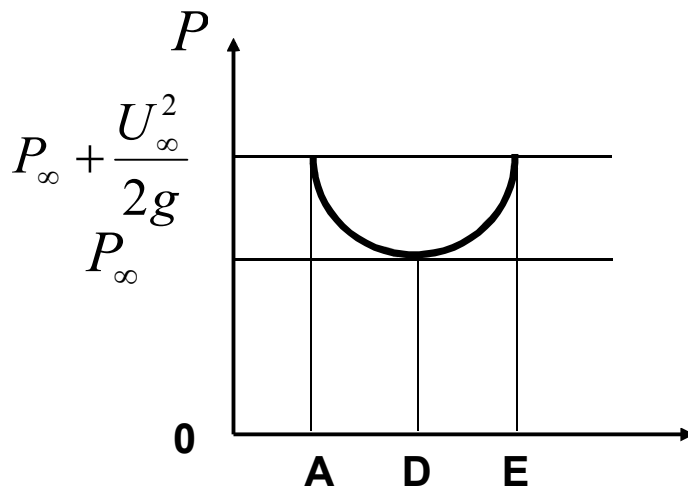
نیروی دراگ

- در نقطه D فشار کمینه و سرعت بیشینه می شود. در این حالت سیال در پشت جسم شروع به حرکت می کند و در امتداد عقبی جسم جریان می یابد. هر چه سیال به نقطه E نزدیکتر شود سرعت کمتر و فشار بیشتر می شود.
- در نقطه E دوباره سرعت صفر و فشار بیشینه می شود.

➤ نکته :

✓ مطالب فوق برای سیال ایده ال ($\mu=0$, Inviscid) صادق می باشد.

توزیع انرژی های فشاری و جنبشی



➤ در حالت سیال ایده‌آل (غیرچرخشی) اتلاف انرژی وجود ندارد. بعبارت دیگر تمام انرژی فشاری در نقطه A به انرژی جنبشی در نقطه D تبدیل می‌شود. بنابراین در نقطه فوق سرعت U_∞ می‌باشد.

توزیع انرژی های فشاری و جنبشی

➤ به همین ترتیب تمام انرژی جنبشی در نقطه D به انرژی فشاری در نقطه E تبدیل می شود و سرعت در نقطه فوق صفر می باشد. در این حالت توزیع فشار و سرعت در دو طرف جسم قرینه است (خطوط جریان قرینه می باشند). به علت نبود نیروی تنشی ($\mu=0$) در این حالت تنها نیروی عمل کننده نیروی فشاری می باشد که آن هم به صورت متقارن بر جسم وارد می شود.

➤ نتیجه:

✓ در این حالت نیروی دراگ وجود ندارد. به عبارت دیگر برای سیال غیرویسکوز (غیر لزج) نیروی دراگ صفر می باشد. اما در عمل چنین پدیده ای رخ نمی دهد ($\mu \neq 0$).

نیروی لیفت

➤ هرگاه جسمی درون یک سیال واقعی قرار گیرد، در صورت وجود حرکت نسبی بین جسم و سیال، از طرف سیال نیروی دراگ بر جسم در خلاف جهت حرکت نسبی وارد می‌شود. در این صورت توزیع فشار و سرعت در دو طرف جسم قرینه نمی‌باشد.

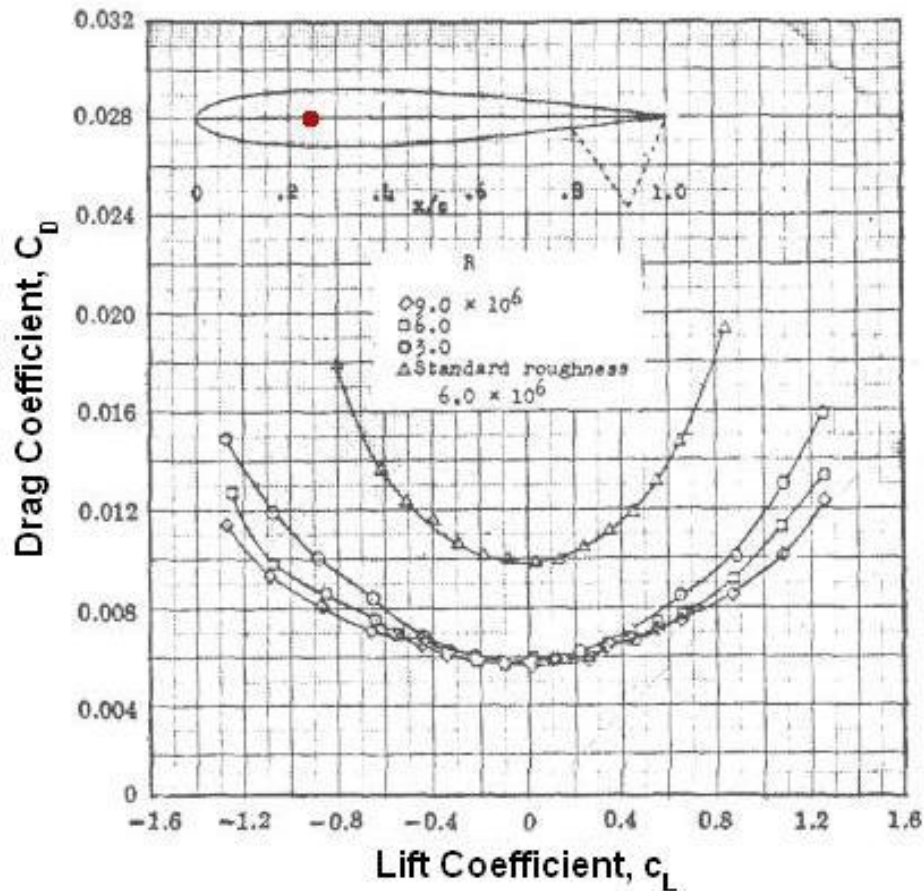
➤ نیروی وارد شده بر جسم در جهت عمود بر راستای حرکت نسبی جسم و سیال را **نیروی لیفت** می‌نامند.

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho U_\infty^2 A$$

➤ معمولاً C_L به صورت تابعی از C_D و در منحنیهای lift & drag coefficients ارائه می‌شود.

➤ در کانالهای باز و یا زمانی که سرعت نسبی در حدود سرعت صوت باشد، ضرایب مربوطه تابعی از اعداد N_F (عدد فرود) و یا N_M (عدد ماخ) نیز می‌باشند.

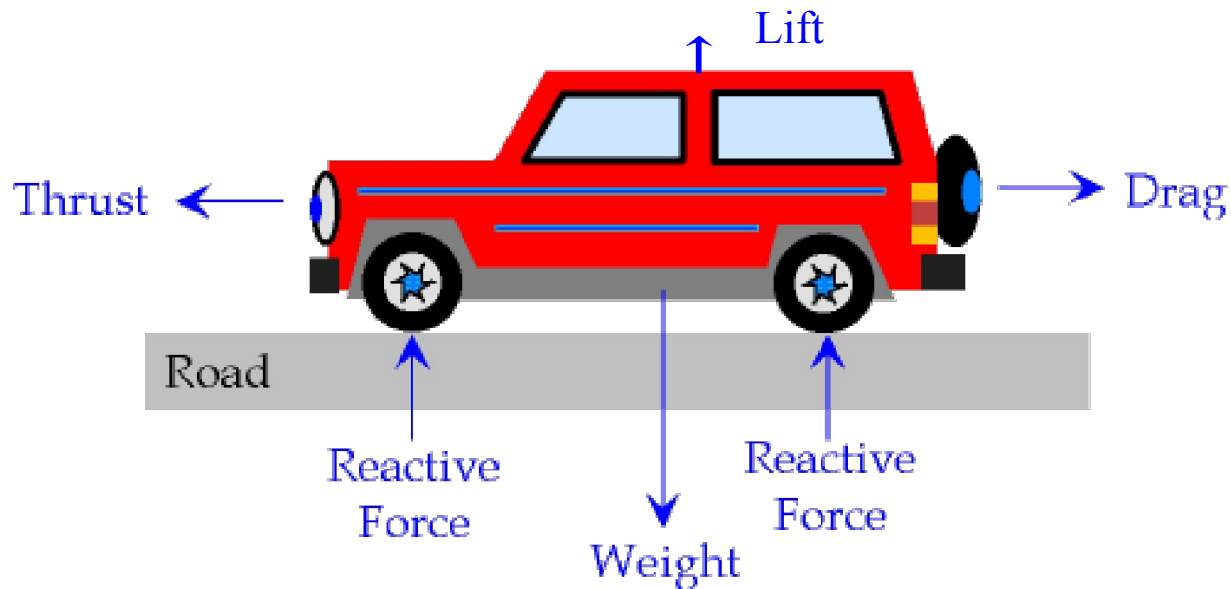
نیروی لیفت



- در طراحی اجسام متحرک توجه به مقادیر نیروهای دراگ و لیفت از اهمیت زیادی برخوردار است.
- نسبت های این نیروها برای **Model** و **Prototype** با استفاده از نسبت تشابه و برابری اعداد بدون قابل محاسبه می باشند.

خودآزمایی

➤ با در نظر گرفتن یک خودروی در حال حرکت، همه نیروهایی را که به آن وارد می شوند و تأثیرشان را بر حرکت خودرو نمایش دهید.





با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷

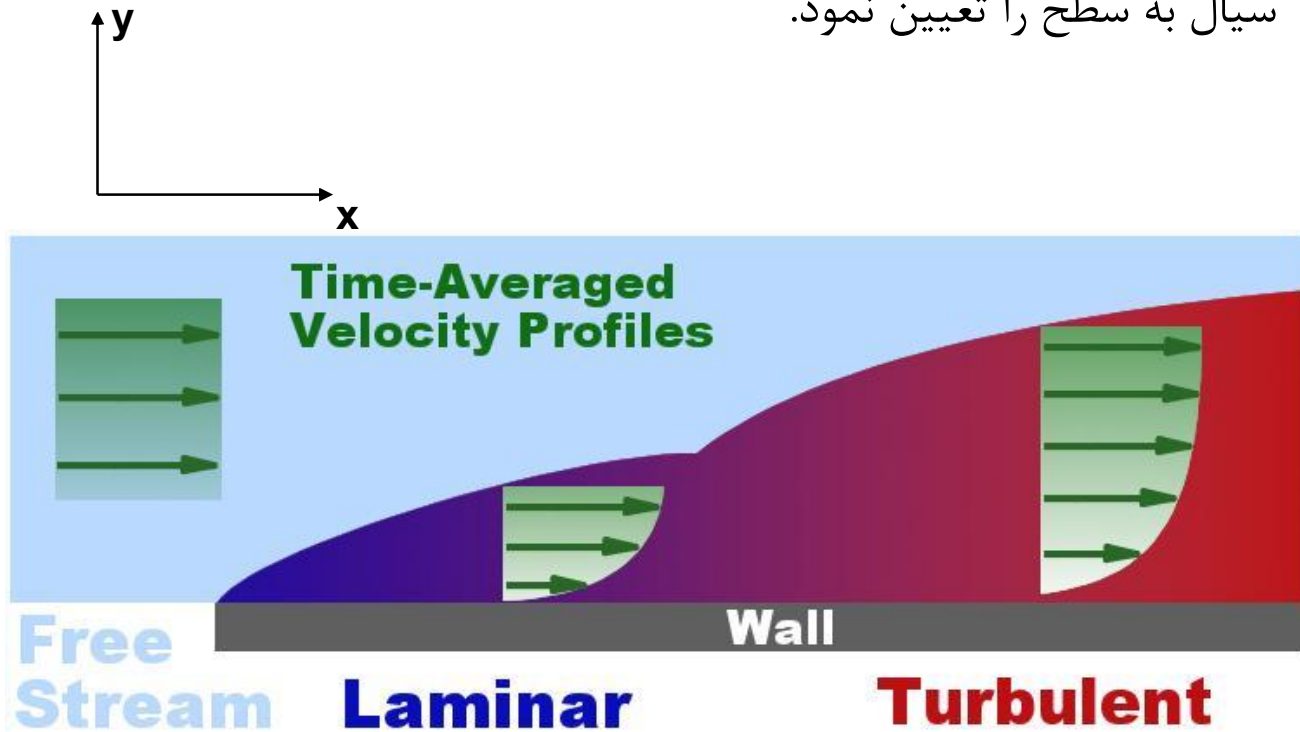


هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
✓ مفهوم لایه مرزی را تشریح نماید.

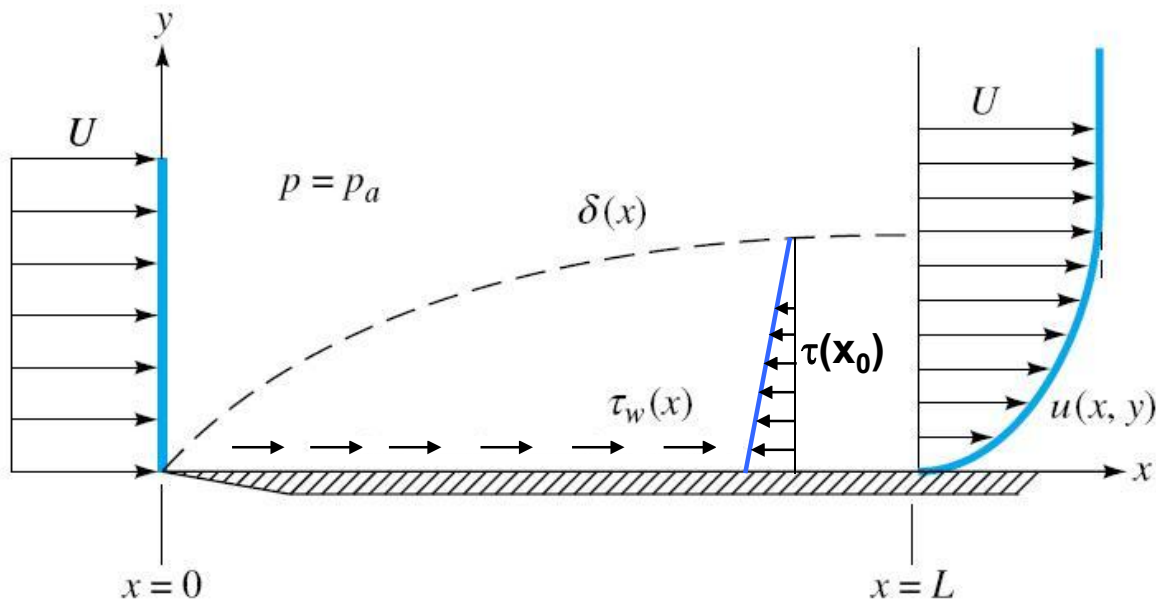
کاربرد

➤ با شناخت از لایه مرزی، می توان توزیع سرعت، تنش و نیروی وارده از طرف سیال به سطح را تعیین نمود.

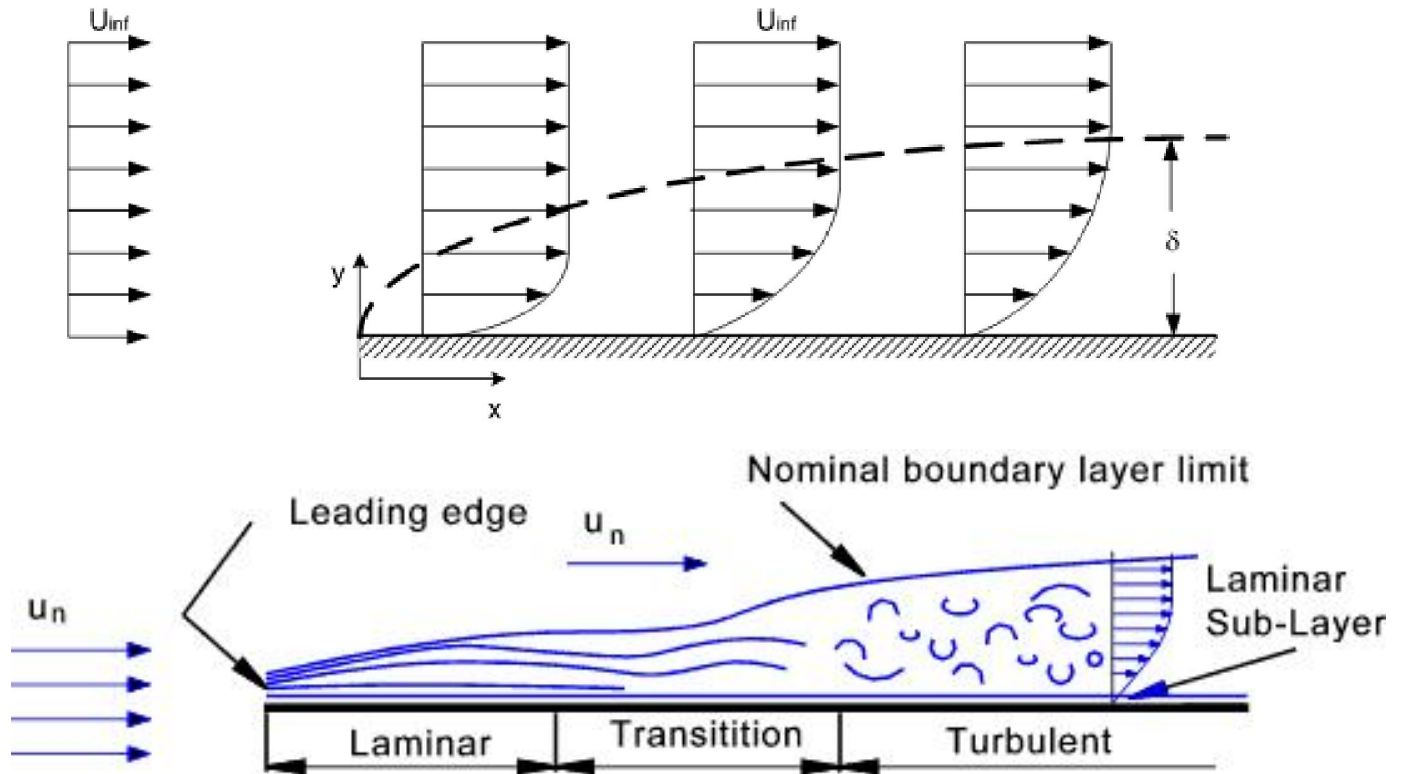


لایه مرزی (Boundary Layer)

➤ همانطوریکه که در بخشهای پیش نیز گفته شد، در اثر مقاومت سیال (ویسکوزیته) در ناحیه ای نزدیک جسم سخت در داخل سیال، که با نام **لایه مرزی** شناخته می شود، توزیع سرعت به وجود می آید.



لایه مرزی (Boundary Layer)



لایه مرزی (Boundary Layer)

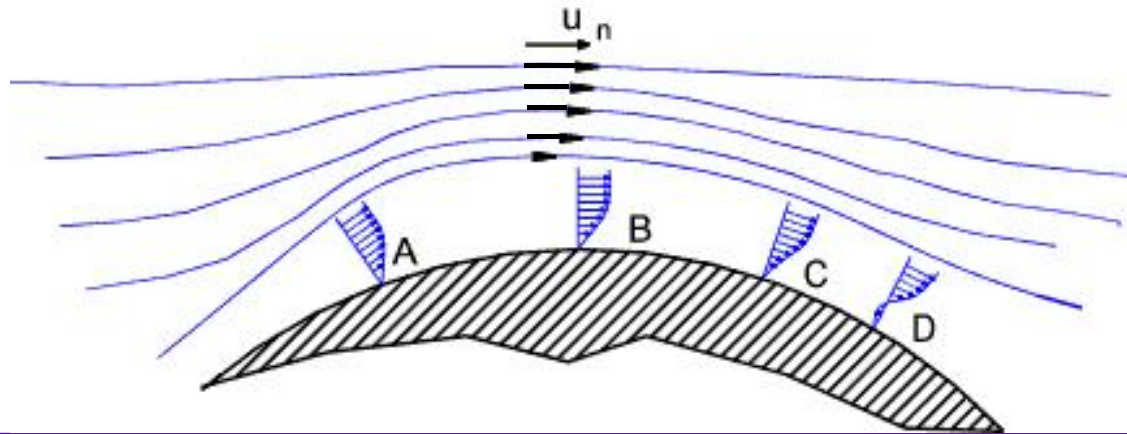
➤ در لایه مرزی تأثیر نیروی تنش قابل ملاحظه است و توزیع سرعت مشاهده شده نیز به همین علت می باشد. اما در خارج از این لایه نیروی تنش تأثیر قابل توجهی بر جریان سیال ندارد و لذا میزان سرعت در این ناحیه معادل میزان سرعت قبل از شکل گیری لایه مرزی می باشد.

➤ نکات اساسی:

- ✓ ضخامت لایه مرزی در امتداد صفحه افزایش می یابد.
- ✓ در امتداد صفحه، لایه مرزی از حالت آرام به حالت آشفته انتقال می یابد.
- ✓ سرعت در امتداد صفحه تابع X و Y می باشد.
- ✓ سیستم دو بعدی می باشد.

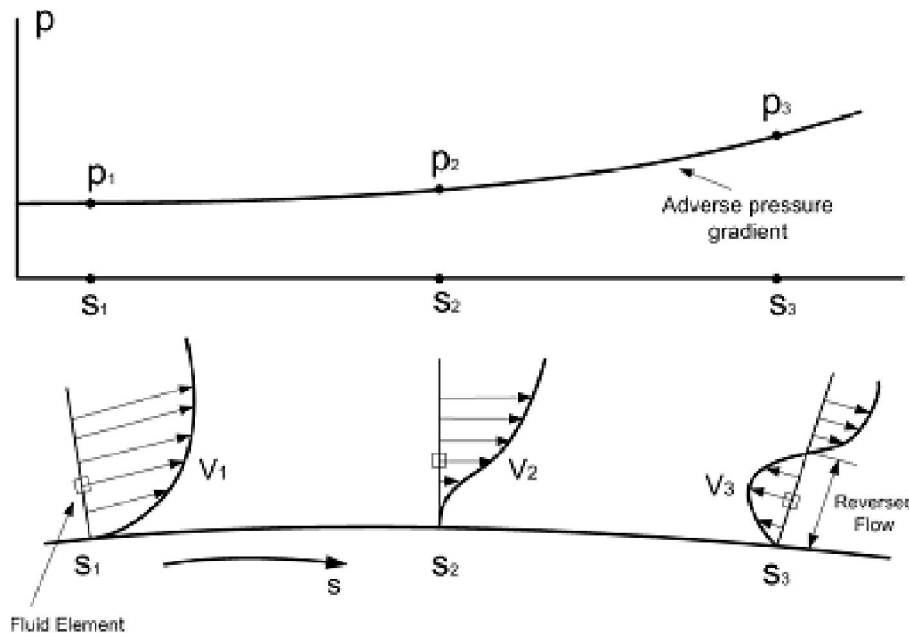
لایه مرزی (Boundary Layer)

- حرکت سیال بر روی جسم سخت غیر مسطح از نقطه A تقریباً بدون اصطکاک است اما در ادامه مسیر لایه مرزی شکل می گیرد.
- به علت وجود نیروی تنش (اصطکاک) بخشی از انرژی سیال در طول مسیرهای $A-B$ و $B-C$ تحلیل می رود. در نتیجه انرژی سیال برای رسیدن به نقطه D کافی نمی باشد و به همین علت سیال در نقطه‌ای در طول مسیر حرکت $A-D$ ، نقطه C ، از جسم جدا می شود. این نقطه را نقطه جدایی (Separation Point) می نامند.

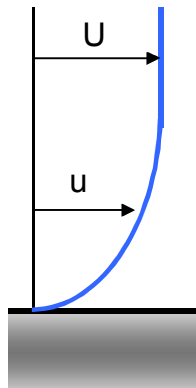


لایه مرزی (Boundary Layer)

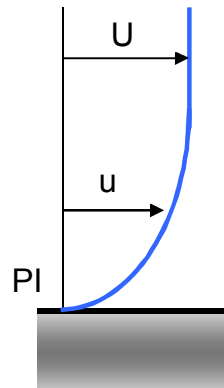
➤ همانطوریکه مشاهده می شود کاهش انرژی جنبشی سیال در جهت حرکت باعث نیروی تنشی و افزایش میزان فشار در جهت مخالف حرکت به علت انحنای سطح (که از بیرون لایه مرزی وارد می شود) موجب می شود که بعد از نقطه جدایی (S_2) جهت جریان تغییر نماید (S_3).



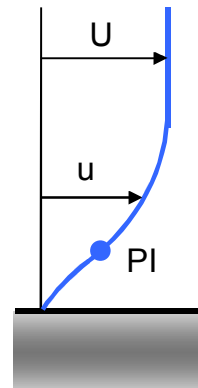
لایه مرزی (Boundary Layer)



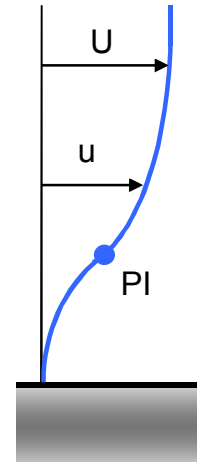
گرادیان مطلوب
 $dU/dx > 0$
 $dp/dx < 0$
 نقطه جدایی وجود ندارد و نقطه عطف درون دیواره قرار دارد.



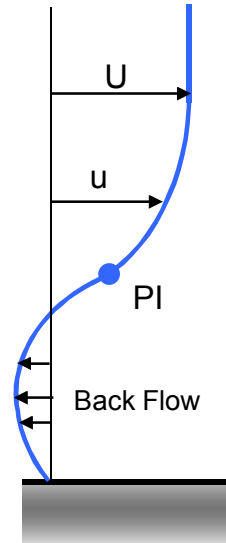
گرادیان صفر
 $dU/dx = 0$
 $dp/dx = 0$
 نقطه جدایی وجود ندارد و نقطه عطف روی دیواره قرار دارد.



گرادیان معکوس ضعیف
 $dU/dx < 0$
 $dp/dx > 0$
 نقطه جدایی وجود ندارد و نقطه عطف در جریان قرار دارد.



گرادیان معکوس بحرانی
 شیب صفر در دیواره آغاز جدایی

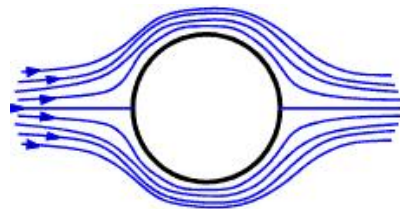


گرادیان معکوس اضافی
 جریان برگشتی در کنار دیواره رژیم جدا شده جریان

PI: Point of Inflection

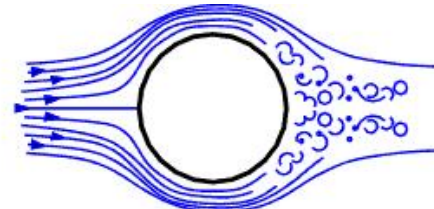
لایه مرزی (Boundary Layer)

- در این دو شکل تفاوت سیال ایده ال و سیال واقعی نمایش داده شده است.
- در شکل اول به علت نداشتن اصطکاک (ناچیز بودن تنش) خطوط جریان متقارن می باشند.
- در شکل دوم به علت وجود اصطکاک (قابل توجه بودن تنش) خطوط جریان نامتقارن می باشند.



Perfect Fluid

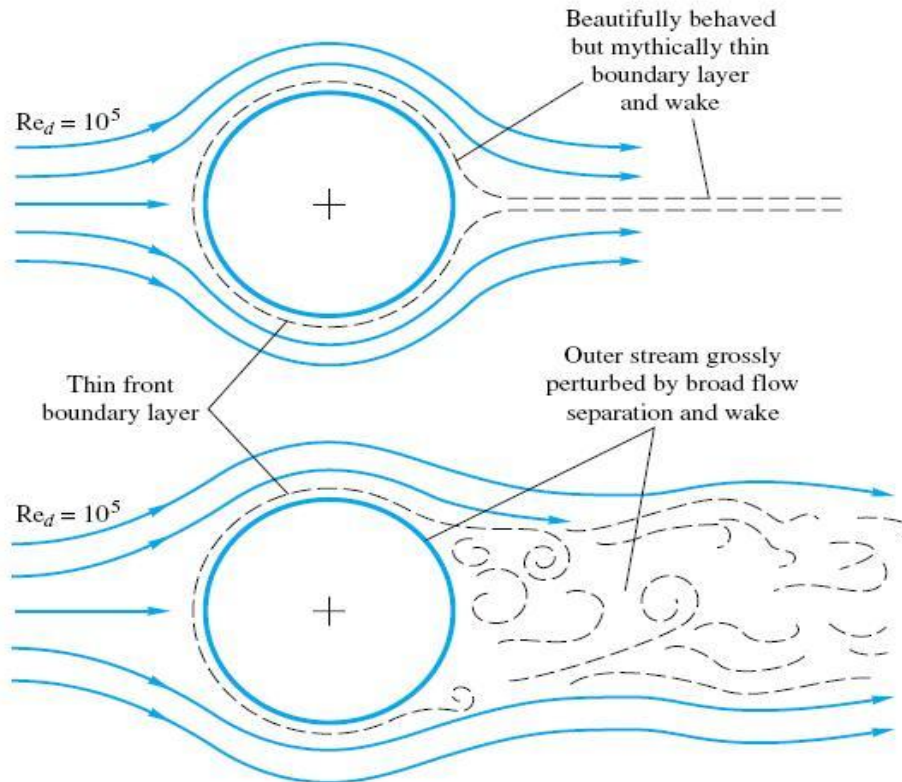
$$\mu = 0$$



Real fluid

$$\mu > 0$$

لایه مرزی (Boundary Layer)



خلاصه:

➤ همانطوریکه گفته شد در اثر مقاومت سیال (ویسکوزیته) در ناحیه ای نزدیک جسم سخت در داخل سیال توزیع سرعت بوجود می آید. ناحیه ای که در آن توزیع سرعت وجود دارد لایه مرزی گفته می شود.

خودآزمایی

پرسش ➤

✓ علت جدا شدن سیال از سطح جامدی که بر روی آن جاری است، چیست؟



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷

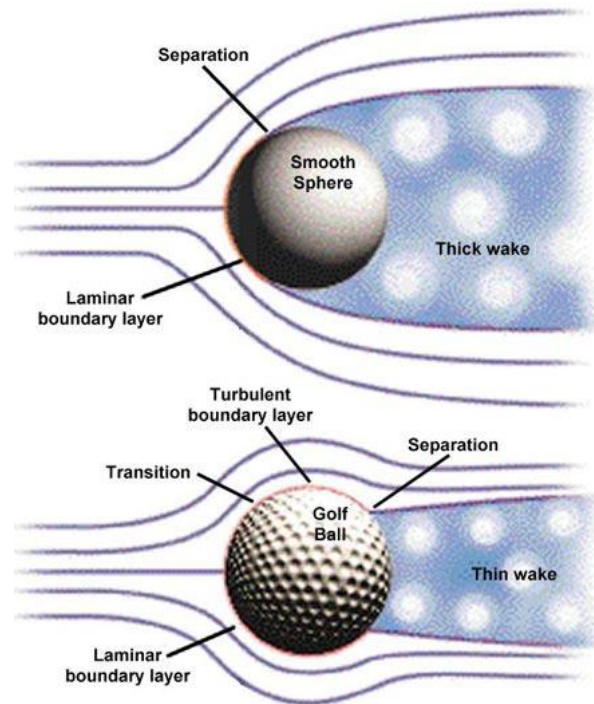


هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند
✓ برهم کنش نیروهای وارد شده از طرف سیال بر جسمی که اطراف آن
جاری است را تشخیص دهد.

کاربرد

➤ با بررسی نیروهای وارد شده، می توان نقش آنها را در برآورد انرژی مورد نیاز برای حرکت جسم در سیال تعیین نمود. این نیروها در طراحی اجسام متحرک کاربرد دارند.

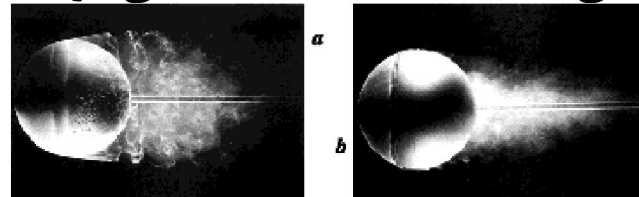
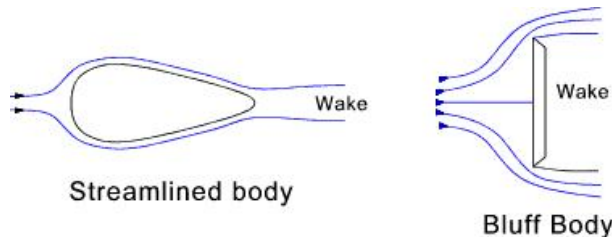


نیروی دراگ

- به علت وجود نیروهای تنشی، تقارن توزیع های فشار و سرعت در اطراف جسم بر هم می خورند که در نتیجه آن بر جسم نیرویی در راستای حرکت نسبی جسم و سیال وارد می شود. بخشی از این نیرو که بعلت نامتقارن بودن توزیع فشار بر جسم وارد می شود **pressure drag** نامیده می شود.
- از سوی دیگر به علت وجود نیروی تنش (توزیع سرعت) بخش دیگری از این نیرو بر جسم وارد می شود که **friction drag** نامیده می شود.

$$\text{Drag} = \text{friction drag} + \text{pressure drag}$$

- راستای این نیرو به گونه ایست که با حرکت نسبی جسم و سیال مقابله می کند. در این حالت در ناحیه عقبی جسم چرخه هایی از سیال به وجود می آیند که **Wake** نامیده می شوند.



نیروی دراگ

➤ همانطوریکه اشاره شد در بررسی حرکت نسبی جسم و سیال اعداد N_R و N_E اهمیت دارند.

$$N_E = \frac{P}{\rho U^2}, P = \frac{F_D}{A}$$

➤ در این روابط، A مساحت تصویر شده در راستای عمود بر جریان است که برای استوانه و کره عبارت است از:

$$\text{Cylinder} : A = L \times D$$

$$\text{Sphere} : A = \frac{\pi}{4} D^2$$

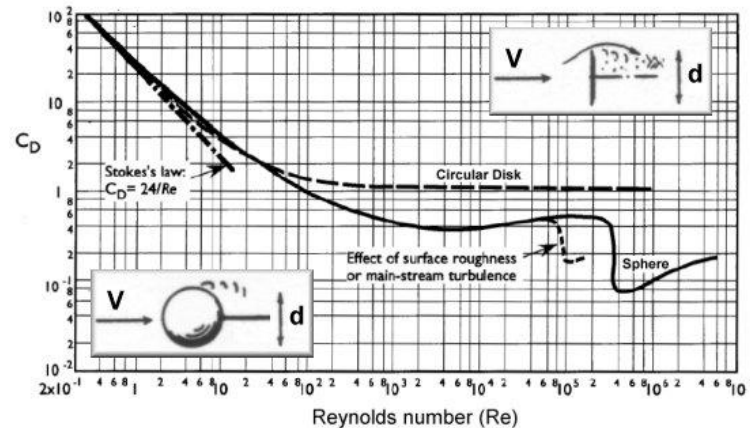
$$N_E = \frac{F_D}{\rho U^2 A} = \frac{1}{2} C_D$$

نیروی دراگ

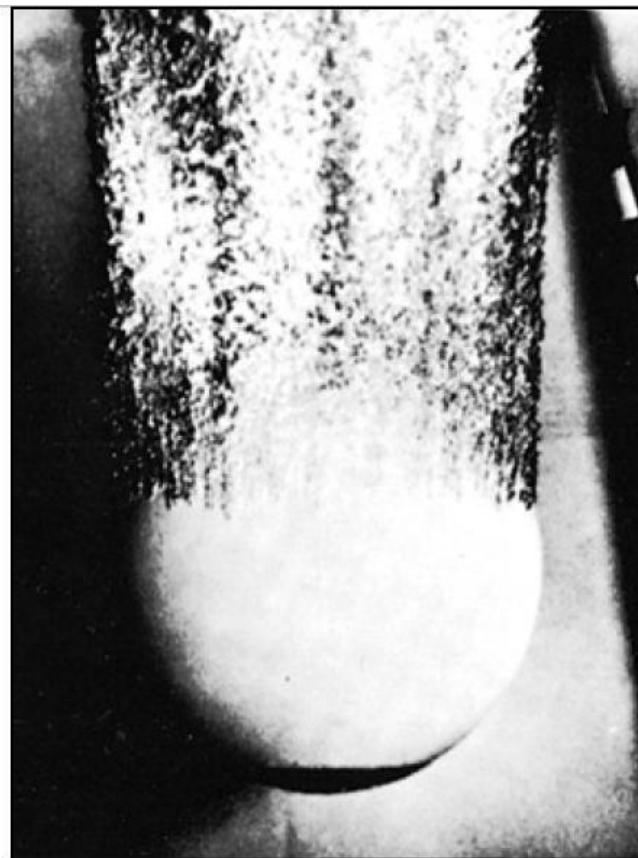
C_D : Drag Coefficient

$$C_D = f(N_R)$$

➤ در این شکل تغییرات C_D بر حسب N_R به صورت تجربی برای یک کره رسم شده است. روند تغییرات C_D بر حسب N_R برای یک استوانه نیز به همین شکل می‌باشد و تنها تفاوت در این است که مقدار C_D برای استوانه تقریباً نصف مقدار آن برای کره می‌باشد.



نیروی دراگ



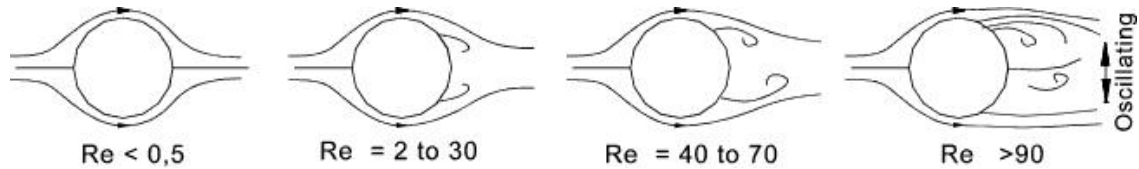
خودآزمایی

➤ پرسش:

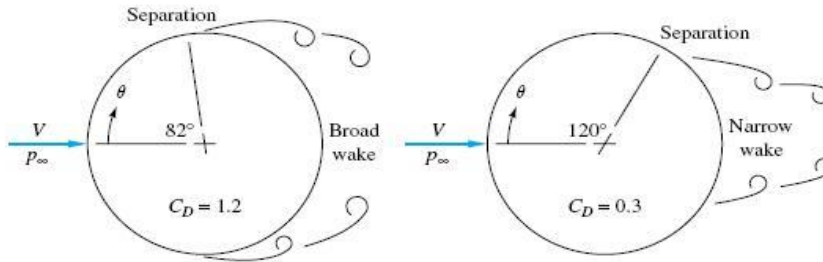
➤ علت کاهش ناگهانی C_D چیست؟

تغییرات نیروی دراگ با N_R

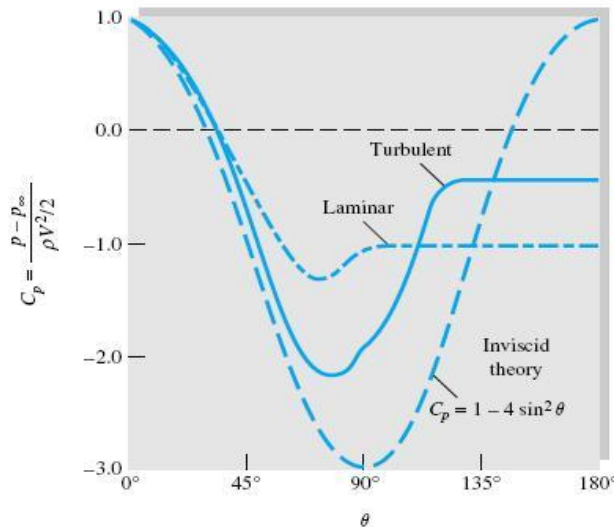
تغییرات نیروی دراگ و میزان Wake تشکیل شده در پشت جسم با عدد رینولدز ارتباط دارد.



تغییرات نیروی دراگ با N_R

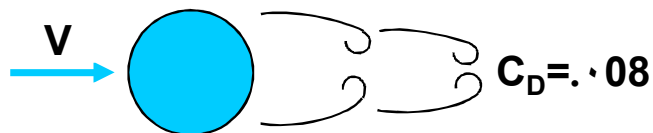
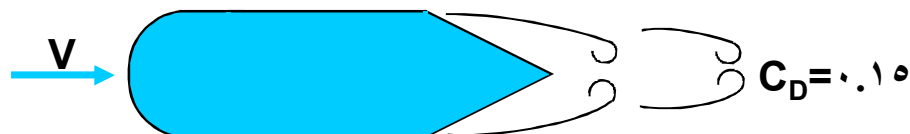
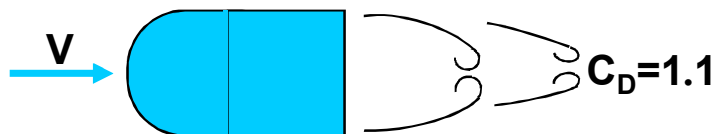
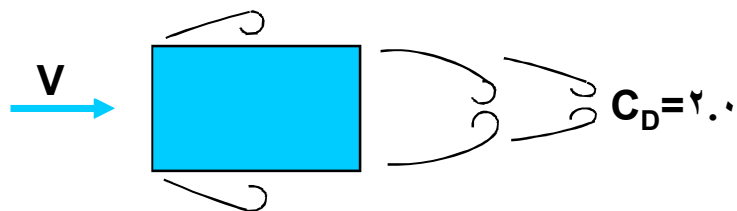


➤ در این شکل تأثیر انتقال از حالت آرام به حالت آشفته مشاهده می شود:



تغییرات نیروی دراگ با شکل هندسی اجسام

اجسام با شکل های مختلف، ضرایب دراگ متفاوت دارند.



خلاصه:

➤ با شکل گیری لایه مرزی در اطراف جسمی که در یک سیال حرکت می کند، دو نیرو به جسم وارد می شود، یکی در جهت حرکت نسبی (نیروی Drag) و دیگری عمود بر آن (نیروی Lift) وارد شود.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷

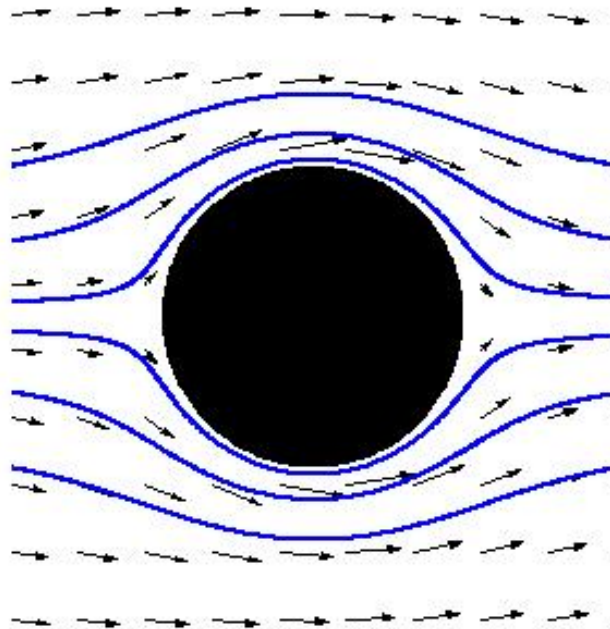


هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند

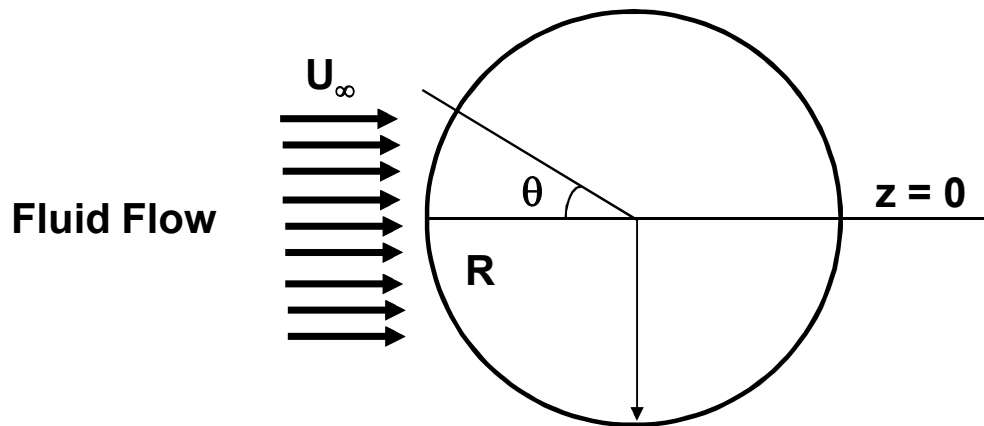
✓ نیروهای وارد شده بر یک جسم که سیالی با جریان خزشی در اطراف آن حرکت می کند را تشخیص دهد و میزان آنها را تعیین نماید.

➤ در محاسبات جدایش فازی قطرات یک فاز از فاز دیگر (جدا کننده های دو و سه فازی در صنعت نفت) و تعیین ویسکوزیته سیال می توان از معادلات مربوط به جریان خزشی بهره گرفت.



جریان خزشی (Creeping Flow)

➤ قانون استاکس (Stokes Law) حرکت خزشی سیال بر روی کره ها ($N_R < 0.1$) را بیان می کند.



➤ توابع فشار و تنش بر روی کره به صورت زیر نوشته می شوند:

$$P = P_0 - \rho g z + \frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \quad \tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \sin \theta$$

جریان خزشی (Creeping Flow)

➤ عبارت $(P_0 - \rho g z)$ در دو سمت کره در حالتی که جریان نسبی افقی باشد، برابر می باشد.

➤ در سطح کره ($r=R$) می توان نوشت:
عمود بر سطح کره

$$P = -\frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{R} \cos \theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{R} \sin \theta$$

مماس بر راستای کره

$$dA = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

➤ برای المان سطح کره:

$$F_D = F_p + F_F$$

$$F_p = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[- \left(+ \frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{R} \cos \theta \right) \cos \theta \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

مثال

➤ آب با جریان از پایین به بالا برابر شکل و داده های زیر از روی کره ای می گذرد. تغییر فشار آب را رسم نمایید.

$$P = -\frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \cos \theta$$

۲۵

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \sin \theta$$

۰.۰۰۰۸۹۱

۹۹۷.۱۳

$$dA = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

۰.۰۰۱

۰.۰۰۱

$$F_D = F_p$$

۹.۸۰۶۶۵

$$F_p = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[-\frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \cos \theta \right] \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

۱.۰۱۳۲۵

مثال

water

(Temperature (°C) ۲۰

(Viscosity (Pa.s) ۰.۰۰۰۸۹۱

(Density (kg/m³) ۹۹۷.۱۳

(U_∞ (m/s) ۱

(R (m) ۰.۰۰۱

(g (m/s²) ۹.۸۰۶۶۵

(p (Pa) ۰.۱۳۲۵

Re ۱.۲۸۵۲۷

$$P = -\frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \cos \theta$$

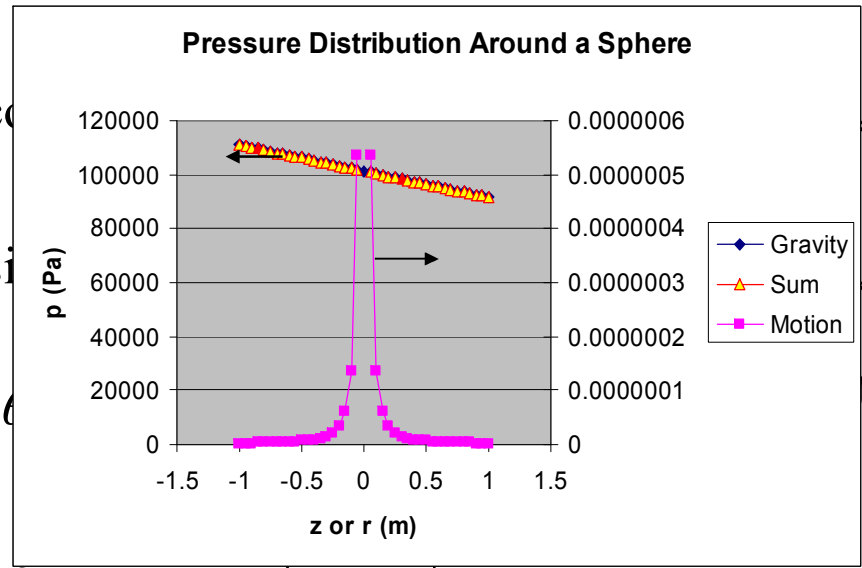
$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \sin \theta$$

$$dA = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$F_D = F_p + F_F$$

$$F_p = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[- \left(+ \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \cos \theta \right) \cos \theta \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

➤ آب با جریان از پایین به بالا برابر شکل و داده های زیر از روی کره ای می گذرد. تغییر فشار آب را رسم نمایید.



➤ در سطح

عم

مم

➤ برای الما

جریان خزشی (Creeping Flow)

➤ نکته:

- ✓ علت علامت منفی اختلاف راستای بردار سطح و بردار فشار می باشد.
- ✓ علت استفاده از $\cos \theta$ به دست آوردن تصویر نیرو در راستای Z می باشد.

$$F_p = -2\pi\mu RU_\infty$$

$$F_F = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\left(\frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{R} \sin \theta \right) \sin \theta \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$F_F = 4\pi\mu RU_\infty$$

$$\Rightarrow F_D = 6\pi\mu RU_\infty = 3\pi\mu DU_\infty$$

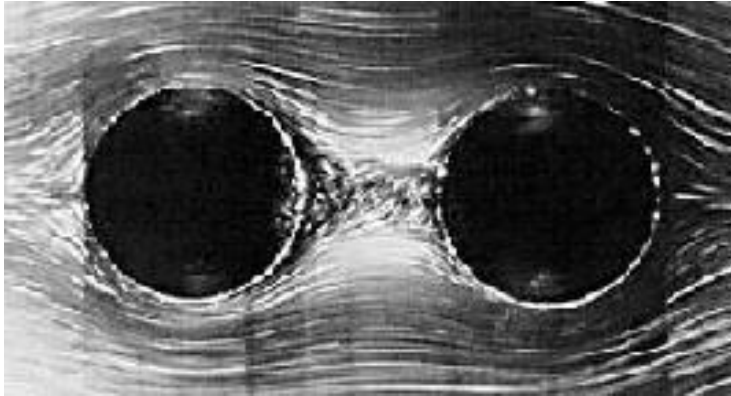
$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho U_\infty^2 \times \pi R^2 \Rightarrow C_D = \frac{24}{N_R}, \text{ in which } N_R = \frac{\rho U_\infty D}{\mu}$$

جریان خزشی (Creeping Flow)

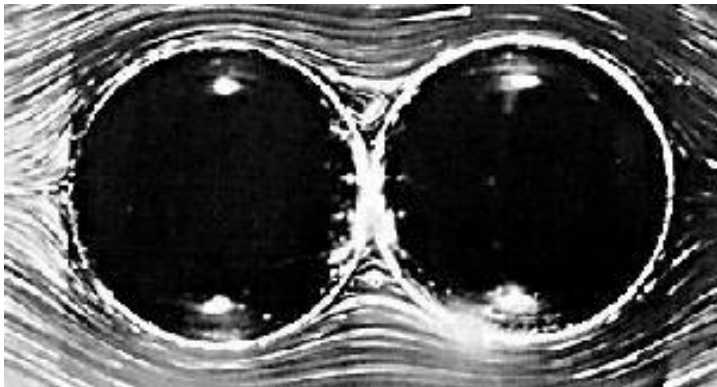
پرسش: ➤

✓ دلیل شرط $N_R < 1/0$ در جریان خزشی چیست؟

جریان خزشی (Creeping Flow)



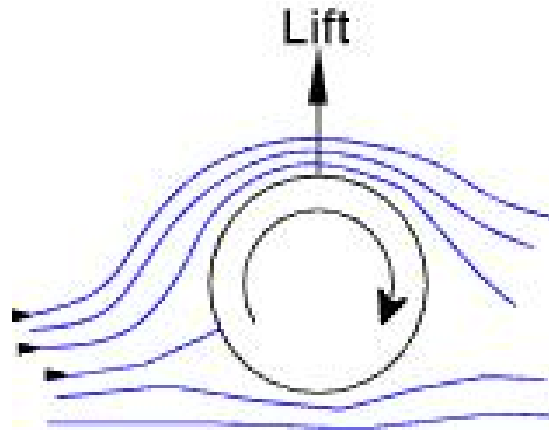
$N_R = 0.013$
Creeping Flow



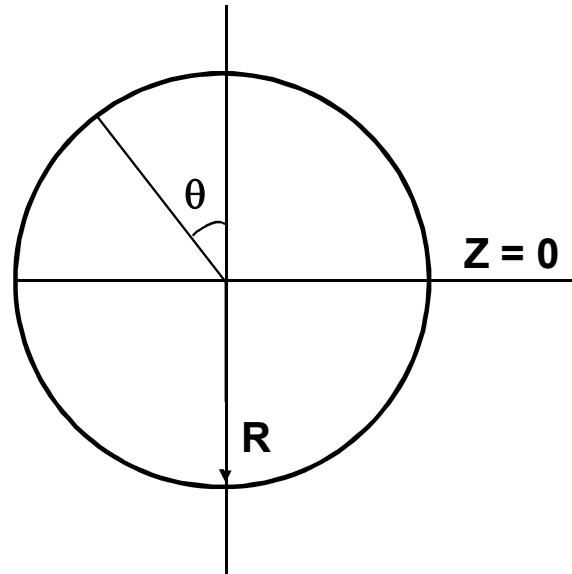
$N_R = 0.013$
Creeping Flow

نیروی لیفت

➤ به علت نامتقارن بودن توزیع های فشار و سرعت در اطراف جسم و اعمال فشار بیشتر از سمت پایین بر جسم نیرویی در راستای عمود بر حرکت نسبی جسم و سیال وارد می شود. این نیرو در جهتی است که با پایین آمدن جسم مقابله می کند.



نیروی لیفت



$$P = P_0 - \rho g z$$

$$P = P_0 - \rho g R \cos \theta, \text{ where : Gravity force : } \rho g R \cos \theta$$

$$F_L = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (P_0 - \rho g R \cos \theta) \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

نیروی لیفت

$$F_L = P_o \pi R^2 + \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g$$

➤ نکته:

✓ همانطوری که ملاحظه می کنید در حالتی که جسم وسیال دارای حرکت نسبی نباشند، نیروی Lift همان نیروی Buoyant است.

➤ تکلیف:

✓ نیروی لیفت را در شرایط جریان محاسبه نمایید.

خلاصه:

➤ در بسیاری از محاسبات تئوری مانند جدایش فازی در جداکننده های دو و یا سه فازی و نیز تعیین ویسکوزیته سیال نیاز به فرض جریان خزشی می باشد. در این بخش با معادلات مربوط به جریان خزشی آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
✓ با ساده سازی معادلات نیرو و انرژی، مسائل را ساده سازی و حل نماید.

کاربرد

➤ کاربرد این بخش در تعیین نیروها و تنشهای وارد شده به اجسام متحرک در درون سیال می باشد. به منظور طراحی مکانیکی بخشهای مختلفی از یک سیستم مهندسی که در برگیرنده سیال است (مانند ظرفها و کانالهای جریان) یا در مواردی که سیال سیستم مورد نظر را در بر گرفته است (مانند هواپیمایی که در هوا و یا کشتی و زیر دریایی که در آب حرکت می کند و یا برجهای بلند) نیاز به تعیین تنشها و نیروهای متقابل سیال و جسم می باشد که با اصولی که در این بخش با آنها آشنا می شویم، می توان این محاسبات را انجام داد.

کاربرد



کاربرد



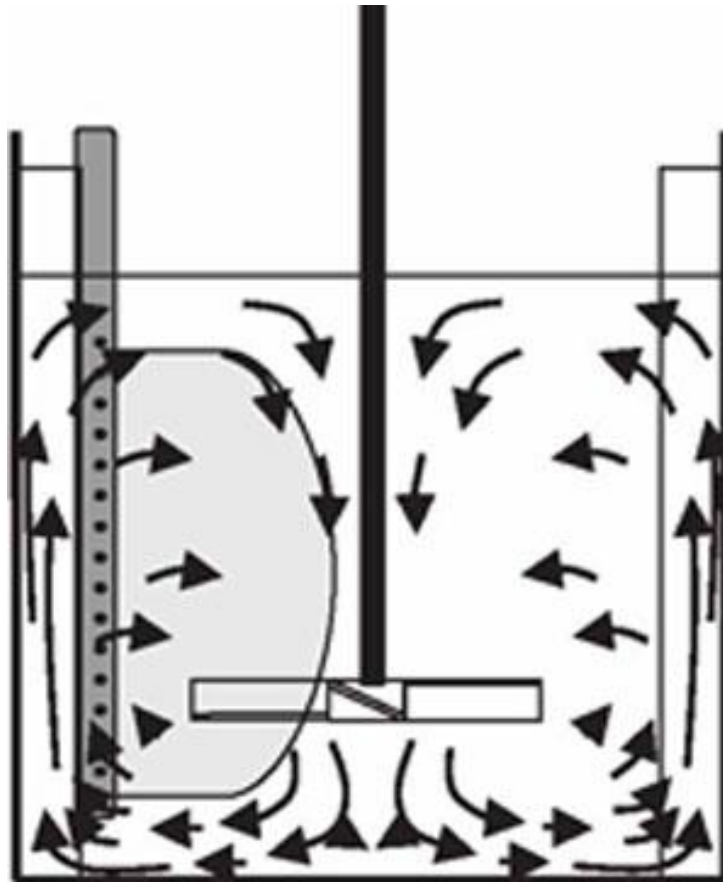
کاربرد



کاربرد



کاربرد



تمرین ۱:

➤ با به کار گیری اصول مکانیک سیالات ویسکوزیته سیالی را که گلوله در درون آن با سرعت ثابت حد سقوط می کند، تعیین نمایید.

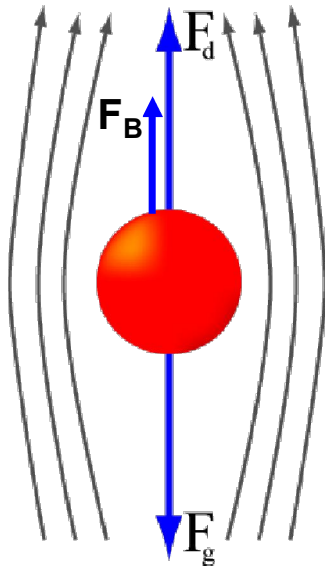
➤ حل:

➤ فرض می شود که گلوله با سرعت

ثابت حد (V_t terminal velocity)

به سمت پایین حرکت کند. در سرعت

ثابت موازنه نیروها به صورت زیر در می آید:



$$\text{Weight} = \text{Buoyant} + \text{Drag}$$

تمرین ۲:

➤ هواپیمایی به منظور توقف سریع در حرکت بر روی سطح افقی، از سیستم چتری که به پشت آن نصب شده است، استفاده می کند. با توجه به شرایط داده شده، مدت زمانی را که طول می کشد تا هواپیما از سرعت ۱۰۰ به ۵۰ m/s برسد، محاسبه نمایید.

$$C_{D1} = 0.5$$

$$\text{Air } \rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

$$C_{D2} = 2.25$$

$$V_0 = 100 \text{ m/s}$$

$$M_1 = 6000 \text{ kg}$$

$$V = 50 \text{ m/s}$$

$$A_2 = 40 \text{ m}^2$$

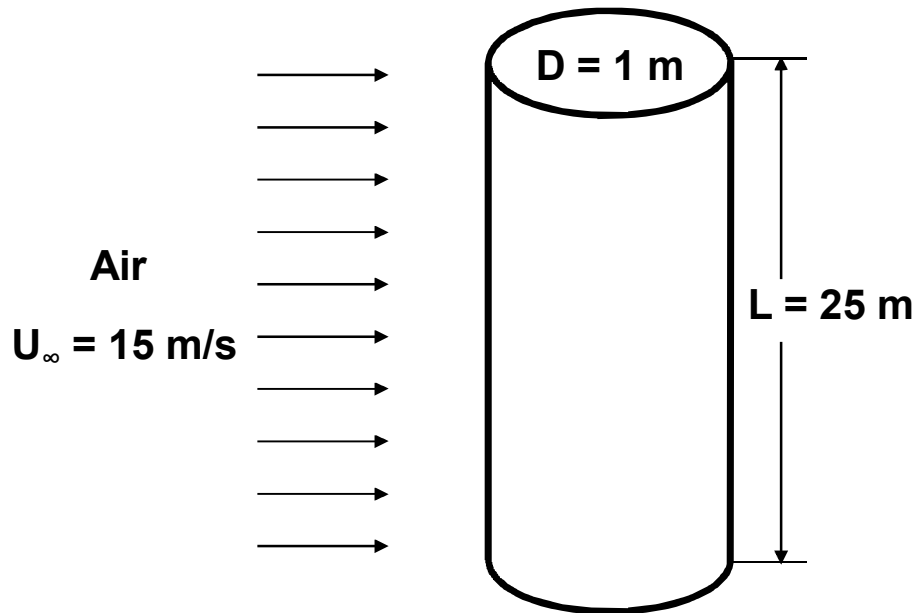
$$A_1 = 20 \text{ m}^2$$

مسأله

➤ محاسبه کنید هرگاه هواپیما از چتر استفاده نکند، مدت زمان توقف چقدر خواهد بود؟

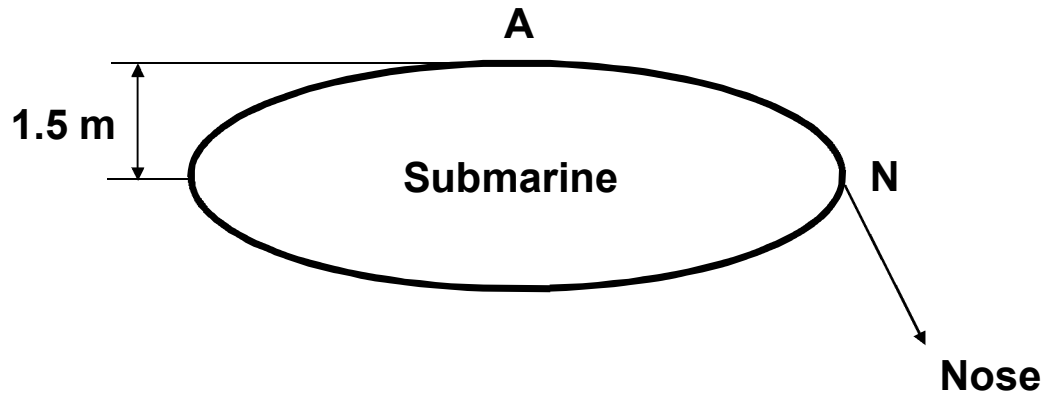
تمرین ۳:

➤ برجی به شکل استوانه با ارتفاع 25 m و شعاع 1 m در معرض بادی با سرعت 15 m/s قرار می گیرد. میزان گشتاور مقاوم برج را محاسبه نمایید.



تمرین ۴:

➤ اختلاف فشار کل و اختلاف فشار دینامیکی بین نقاط A و N روی یک زیردریایی را محاسبه نمایید.



$$U_{\infty} = 10 \text{ m/s} \ \& \ V_A = 15 \text{ m/s}$$
$$V_N = 0$$

تمرین ۵:

➤ می خواهیم با توجه به اطلاعات داده شده سرعت بهینه حرکت یک هواپیمای جت را محاسبه نماییم.

➤ نکته:

➤ در موتورهای جت نیروی جلو برنده (thrust) متناسب با احتراق سوخت می باشد. بنابراین در یک thrust معین بهترین شرایط در بیشینه سرعت می باشد. در شرایط steady و horizontal می توان نوشت:

$$\text{Drag} = \text{Thrust} \ \& \ \text{Weight} = \text{Lift}$$

هنگامی که عدد ماخ کوچک باشد ($N_M < 0.6$)، اثر تراکم پذیری ناچیز می باشد و می توان از این رابطه زیر و یا نمودارهای مربوطه استفاده کرد.

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A r}$$

Ar : AspectRatio

مسأله

➤ تمرین شماره ۵ را از راه مشتق گیری از F_D / V حل نمایید.

خلاصه:

➤ با نوشتن موازنه نیروهای وارد شده بر اجسام و همچنین موازنه انرژی می توان مقادیر نیرو، سرعت و ... را محاسبه نمود.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ با مفاهیم دینامیکی سیال نهفته در ترمهای ریاضی معادله حرکت آشنا شود.

✓ با شناخت ترمهای مهم و غیرمهم معادله حرکت در راستای مناسب با توجه به هندسه مسائل دو و سه بعدی، این معادله را ساده سازی و حل نماید.

کاربرد

➤ تعیین نیروهای وارد شده بر اجسام از طریق حل معادلات حرکت



کاربرد



معادلات حرکت (Navior – Stokes)

➤ به منظور بررسی دقیقتر حرکت سیال بر روی سطوح مختلف و حل معادلات حرکت لازم است مفاهیم

خط جریان (Stream Line)

تابع جریان (Stream Function)

پتانسیل سرعت (Velocity Potential)

معرفی شوند (حرکت سیال دو بعدی فرض می شود).

➤ شایان ذکر است به کار گیری چنین پارامترهایی حل معادلات حرکت را آسانتر می کند.

یادآوری: ضرب برداری (Cross product)

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

➤ حاصل برداری است عمود بر صفحه دو بردار اولیه

$$i \times i = 0 \quad j \times j = 0 \quad k \times k = 0$$

$$i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$$

$$i \times k = -j \quad j \times i = -k \quad k \times j = -i$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$+ (a_y b_z - a_z b_y) i - (a_x b_z - a_z b_x) j + (a_x b_y - a_y b_x) k$$

خط جریان (Stream Line)

خط فرضی را که در هر لحظه بر بردار سرعت در نقطه مورد نظر مماس می باشد خط جریان می گویند. لازم به یادآوری است که Euler حرکت سیال را در راستای خط جریان بررسی کرده است.

$$\vec{U} \times d\vec{r} = 0$$

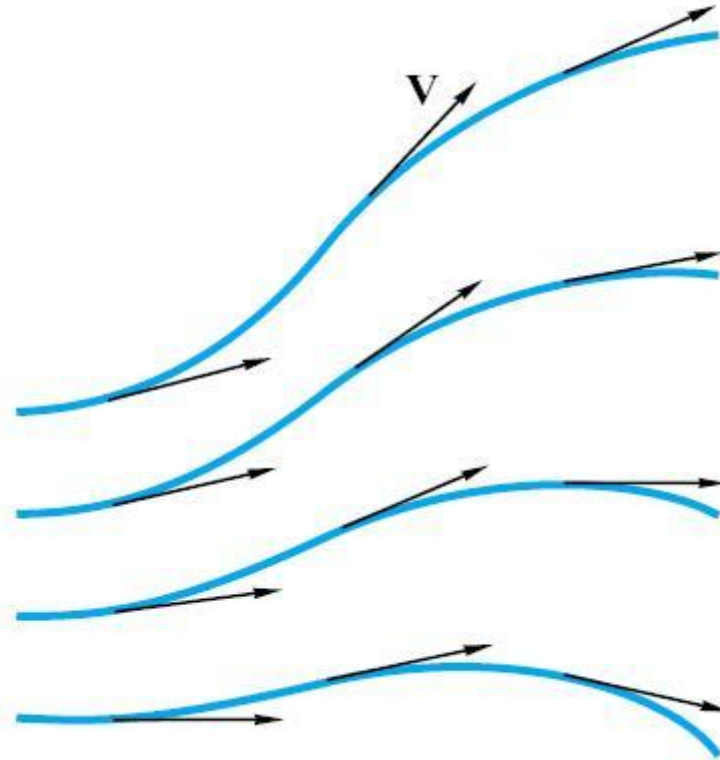
$$\Rightarrow \left(U_x \vec{i} + V_y \vec{j} \right) \times \left(dx \vec{i} + dy \vec{j} \right) = 0$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\Rightarrow (U_x dy - V_y dx) \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{U_x}{dx} = \frac{V_y}{dy} \quad \text{معادله خط جریان}$$

خط جریان (Stream Line)



تابع جریان (Stream Function)

با استفاده از تابع جریان معادله پیوستگی از بین می‌رود و معادله حرکت ساده‌تر حل می‌شود. به عبارت دیگر تابع جریان به شکلی تعریف می‌شود که در معادله پیوستگی صادق باشد.

$$\psi = \psi(x, y) \quad U_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\psi = \psi(x, y) \Rightarrow d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

تابع جریان (Stream Function)

➤ هرگاه:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$$

➤ در آن صورت می توان گفت که $d\Psi$ یک دیفرانسیل کامل می باشد و این شرط همان رابطه پیوستگی است. برای خط جریان می توان نوشت:

$$U_x dy - V_y dx = 0$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0 \Rightarrow d\psi = 0 \Rightarrow \psi = cte$$

➤ نتیجه: در طول خط جریان مقدار تابع جریان ثابت است.

تمرین ۱:

➤ برای سیالی با سرعت داده شده، تابع جریان را محاسبه نمایید.

$$U = -ay \vec{i} + ax \vec{j}$$

تابع جریان برای سیستم استوانه ای

برای سیستم استوانه‌ای تابع جریان به شکل زیر تعریف می‌شود: ➤

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r V_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(V_\theta \right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} = 0$$

معادله پیوستگی

شرط برقراری دیفرانسیل کامل

پتانسیل سرعت (Velocity Potential)

استفاده از پتانسیل سرعت برای شرط جریان غیر چرخشی (irrotational flow) به کار می‌رود. بعداً نشان داده می‌شود که جریان غیر چرخشی همان جریان ایده‌ال است.

$$\varphi = \varphi(x, y) \quad U_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad V_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

علامت منفی اختیاری است.

یادآوری:

➤ حاصل ضرب برداری (Cross) میان ∇ و بردار سرعت (U) را $\text{Curl } U$ می نامند.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\nabla \times \vec{U} = \text{Curl } \vec{U}$$

$$\nabla \times \vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & V_y & W_z \end{vmatrix} = + \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

یادآوری:

➤ هرگاه باشد:

$$\text{Curl } \vec{U} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W_z}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial W_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial y}$$

➤ این روابط همانطوریکه قبلاً اشاره شد مربوط به سیال ایده‌ال (جریان غیر چرخشی) می‌باشند و متعاقباً اثبات می‌شوند.

تمرین ۲:

➤ $\nabla \times \nabla \phi$ را محاسبه نمایید:

شرط برقراری جریان غیر چرخشی

نکته: ➤

✓ جهت برقراری شرط جریان غیر چرخشی لازم است $\nabla\phi$ معادل بردار سرعت فرض شود.

$$-\nabla\phi = \vec{U} \Rightarrow -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right) = U_x\vec{i} + V_y\vec{j} + W_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow U_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad W_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

➤ در سیستم استوانه‌ای روابط به شکل ذیل استفاده می‌شوند:

$$U_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

خلاصه:

- با مفاهیم خط جریان و تابع جریان و پتانسیل سرعت آشنا شدیم.
- با استفاده از این مفاهیم معادله حرکت آسان تر حل می شود.
- با به کار گیری تابع جریان در معادله حرکت (ضمن بی نیاز شدن از حل معادله پیوستگی) امکان حل معادله حرکت فراهم می گردد.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

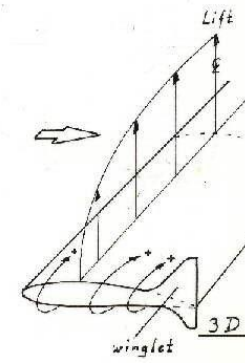
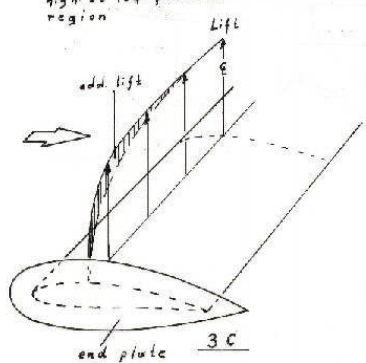
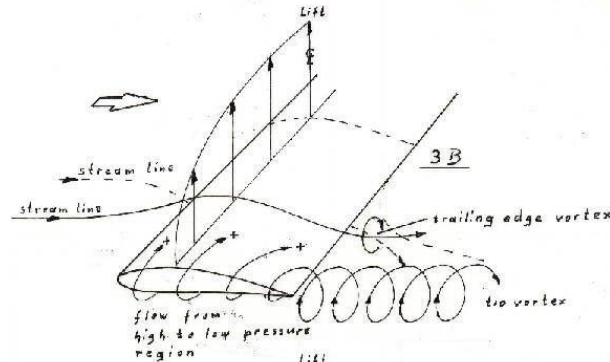
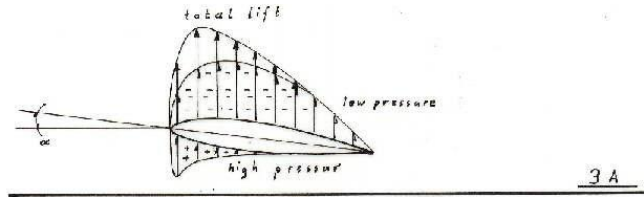
➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ مفهوم چرخش سیال را بشناسد.

✓ تأثیر آنرا در حل دینامیکی حرکت اجسام غوطه ور در سیال تشخیص دهد.

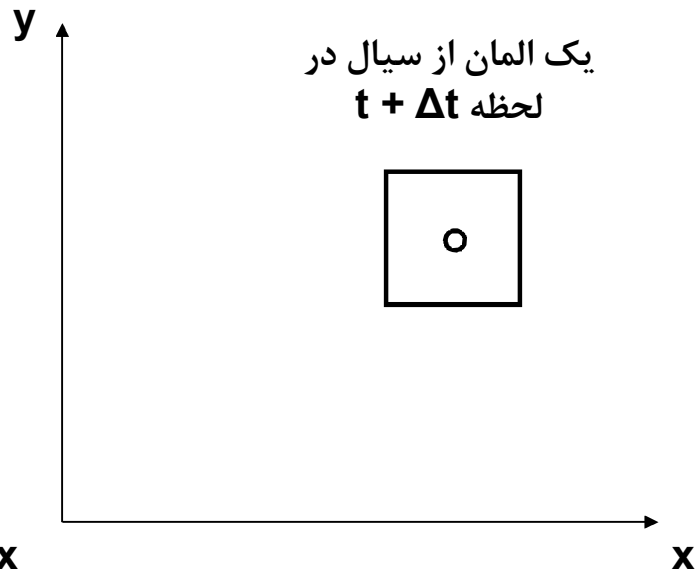
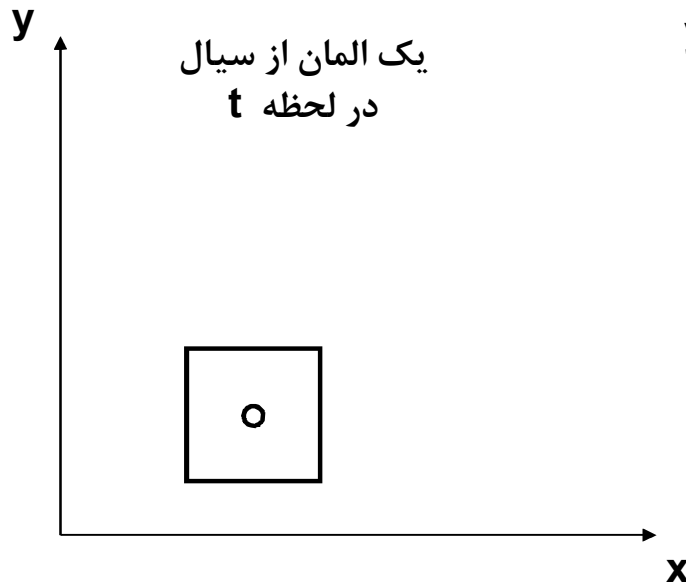
➤ هنگامی که سیال از روی سطح جامدی می گذرد، فرض بر آن است که با نزدیک شدن سیال به سطح جامد از سرعت مماسی سیال کاسته می شود تا اینکه در سطح سرعت به صفر می رسد. اما هنگامی که جسمی (مانند بال هواپیما) در اتمسفر حرکت می کند، در اطراف آن توده هایی از سیال (Vortex) با حرکت گردابه ای در پشت آن جریان می یابند که در تعیین نیروهای لیفت و دراگ تأثیر گذار هستند. بنابراین جهت تعیین نیروهای وارد شده بر سیال دانستن مفهوم چرخش سیال و معادلات آن ضروری می باشد.

کاربرد



بررسی جریان غیر چرخشی (Irrotational Flow)

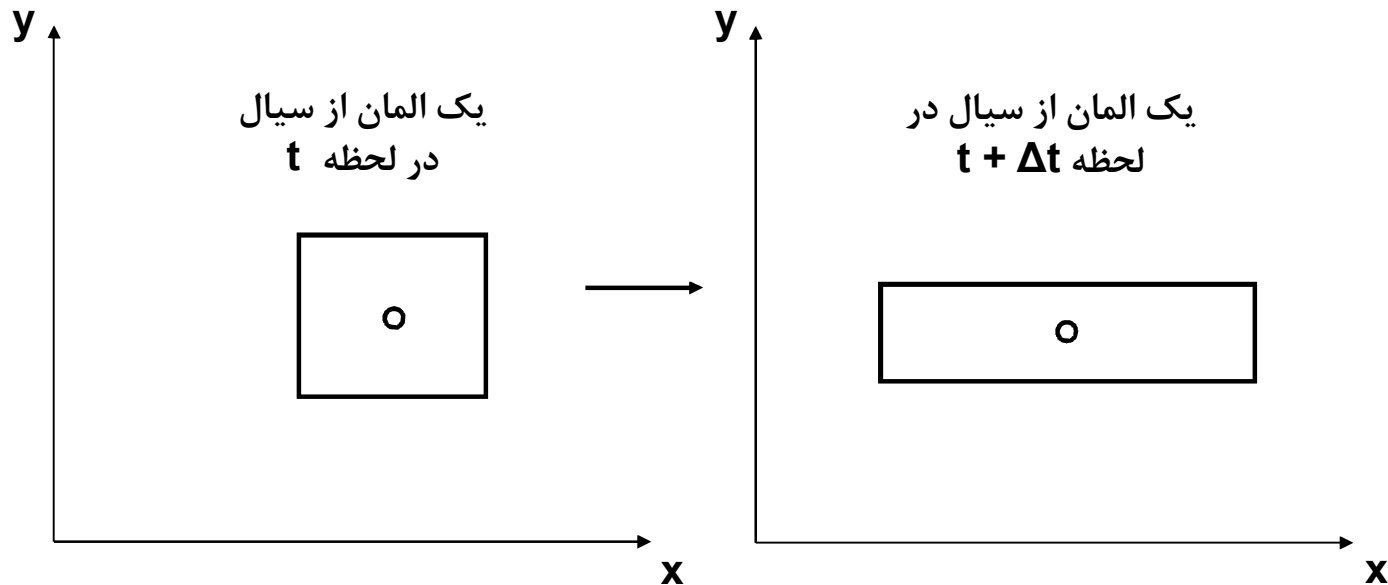
➤ حرکت سیال می تواند به شکل های گوناگونی انجام پذیرد.
۱. انتقال (Transition)



بررسی جریان غیر چرخشی (Irrotational Flow)

۲. تغییر شکل (Deformation)

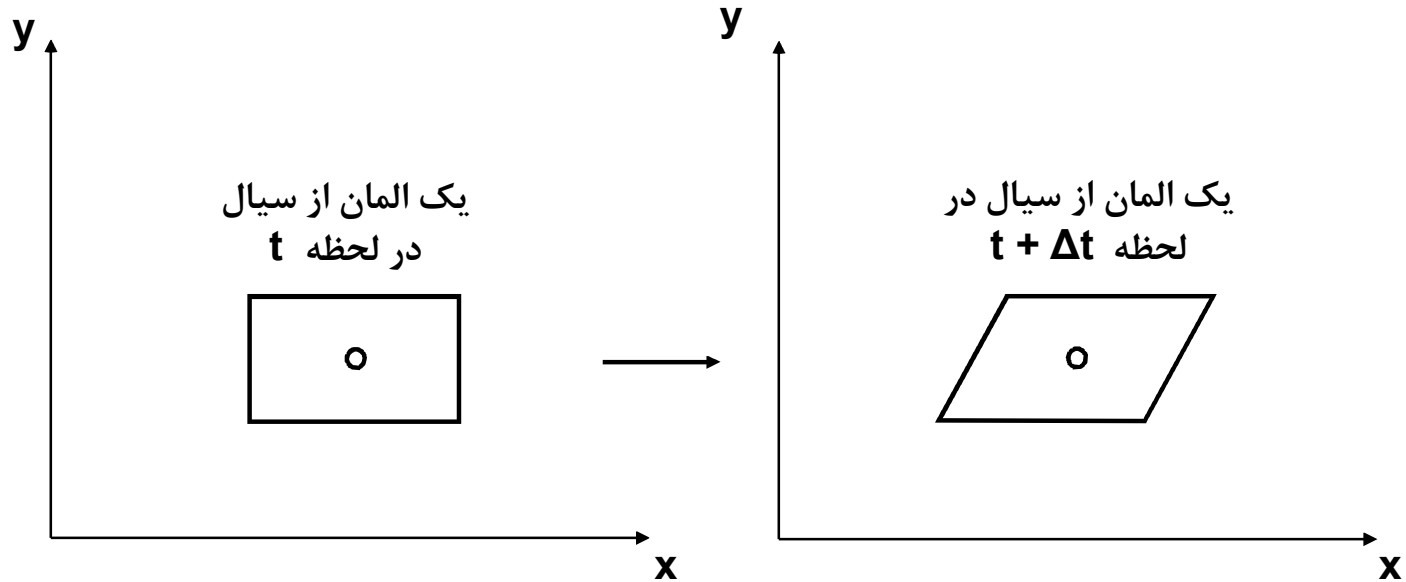
الف) خطی (Linear)



بررسی جریان غیر چرخشی (Irrotational Flow)

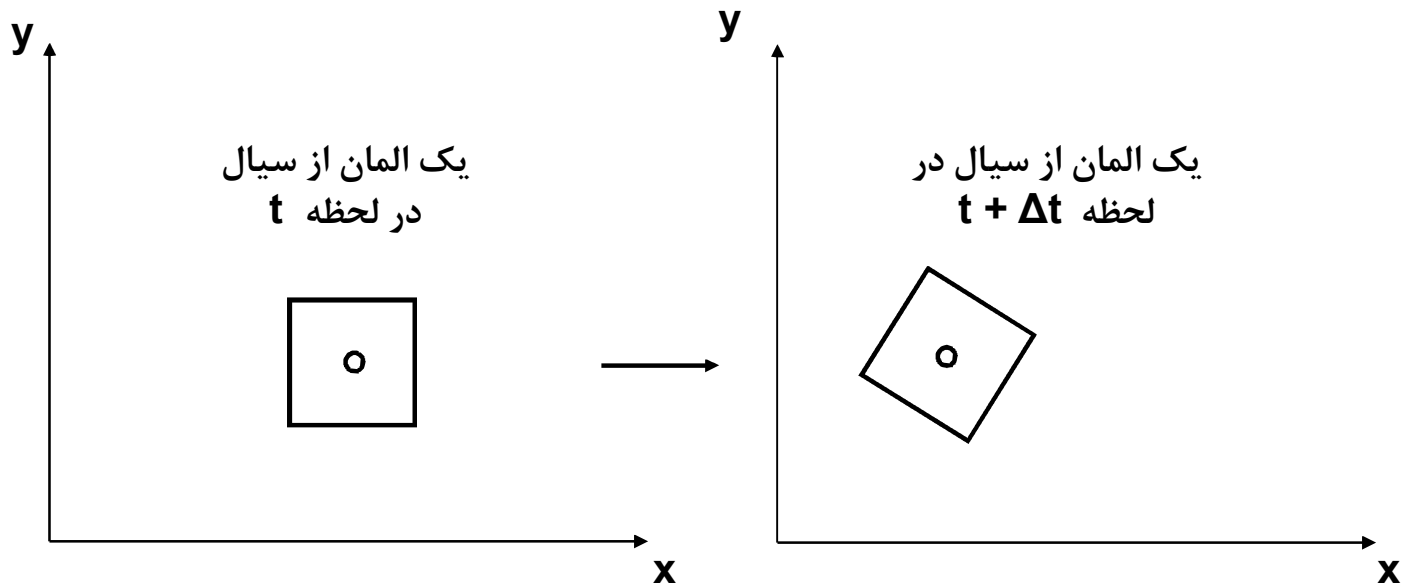
۲. تغییر شکل (Deformation)

ب) زاویه‌ای (Angular)



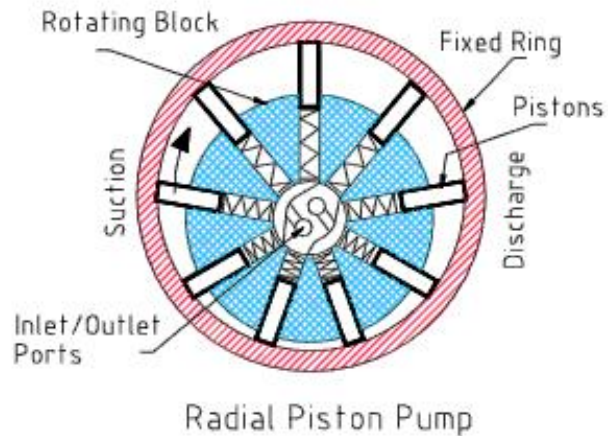
بررسی جریان غیر چرخشی (Irrotational Flow)

۳. چرخش (Rotation)



➤ نکته: چرخش تنها در اثر اعمال تنش رخ می دهد.

بررسی چرخش سیال



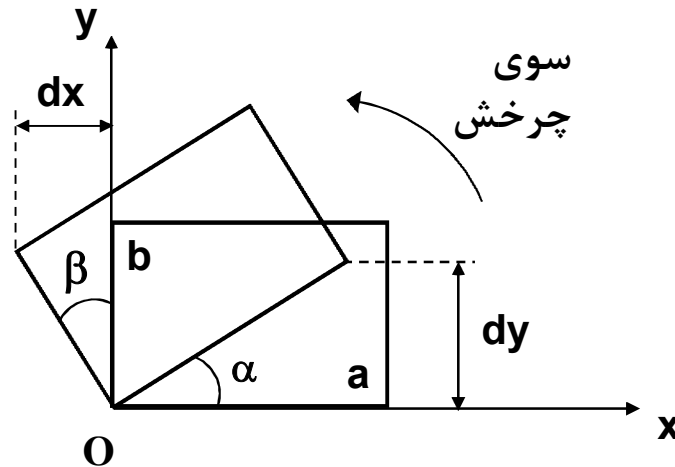
بررسی چرخش سیال

➤ چرخش ($\vec{\omega}$) کمیت برداری است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

➤ و عبارت است از سرعت زاویه‌ای میانگین دو خط عمود بر یکدیگر در یک جزء سیال.

➤ به منظور آسانی تحلیل، چرخش سیال در صفحه xy در نظر گرفته می شود:



بررسی چرخش سیال

➤ در صورتیکه سرعت در نقاط a و b با سرعت در نقطه o متفاوت باشد، المان شروع به چرخش می کند.

➤ در مورد چرخش در راستای oa می توان نوشت:

مولفه سرعت در راستای y در نقطه o : V_{yo}

مولفه سرعت در راستای y در نقطه a : V_{ya}

$$\text{Taylor Series : } V_{ya} = V_{yo} + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \dots$$

➤ در نتیجه سرعت نسبی نقطه a نسبت به نقطه o برابر است با:

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} dx$$

بررسی چرخش سیال

➤ در نتیجه اختلاف فاصله برابر است با:

$$dy = \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \times dt$$

➤ سرعت زاویه ای خط oa برابر است با:

$$\omega_{oa} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\alpha}{dt}$$

$$d\alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \frac{dy}{dx}$$

$$\omega_{oa} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dy/dx}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(\partial V_y / \partial x) dx dt}{dx dt}$$

$$\Rightarrow \omega_{oa} = \frac{\partial V_y}{\partial x}$$

بررسی چرخش سیال

➤ در مورد چرخش راستای ob می توان نوشت:

مولفه سرعت در راستای X در نقطه O : U_{x0}

مولفه سرعت در راستای X در نقطه b : U_{xb}

$$\text{Taylor Series : } U_{xb} = U_{x0} + \frac{\partial U_x}{\partial y} dy + \dots$$

➤ در نتیجه سرعت نسبی نقطه b نسبت به نقطه O برابر است با:

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} dy$$

➤ در نتیجه اختلاف فاصله برابر است با:

$$dx = \frac{\partial U_x}{\partial y} dy \times dt$$

بررسی چرخش سیال

سرعت زاویه ای خط ob برابر است با: ➤

$$\omega_{ob} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\beta}{dt}$$

$$d\beta \approx \text{tg } d\beta \approx -\frac{dX}{dy}$$

$$\omega_{ob} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{-\frac{dX}{dy}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{-(\partial U_x / \partial y) dy dt}{dy dt} \Rightarrow \omega_{ob} = -\frac{\partial U_x}{\partial y}$$

دوران در صفحه xy (حول محور Z) برابر است با سرعت زاویه‌ای متوسط دو راستای عمود بر هم (ob, oa) : ➤

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right)$$

بررسی چرخش سیال

در نتیجه کل بردار $\vec{\omega}$ برابر است با: ➤

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{U}) = \frac{1}{2} \text{Curl } \vec{U}$$

همچنین می توان نوشت: ➤

$$\text{Vorticity} = 2\vec{\omega} = \text{Curl } \vec{U}$$

بررسی چرخش سیال

در سیستم استوانه‌ای رابطه به شکل زیر استفاده می‌شود: ➤

$$\begin{aligned} \text{Vorticity} = \text{Curl } \vec{U} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{i}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{i}_\theta \\ & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rU_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{i}_z \end{aligned}$$

خودآزمایی

پرسش: ➤

✓ جریان غیر چرخشی چیست و پتانسیل سرعت کدام است؟

- سیال تحت تأثیر نیروهای گرانش (Gravity) و فشار (Pressure) نمی تواند دوران (چرخش) کند. لازمه چرخش وجود تنش برشی (Shear Stress) می باشد.
- فرض جریان غیر چرخشی برای ناحیه ای از سیال که در آن می توان از نیروی مقاومت (تأثیر ویسکوزیته) چشم پوشید، به کار می رود. مثلاً در خارج از لایه مرزی در جریان حرکت سیال بر روی یک جسم جامد و یا در شرایطی که سیال ایده آل باشد ($\mu=0$) جریان غیرچرخشی فرض می شود.

تمرین ۱:

➤ برای توزیع سرعت زیر سرعت پتانسیل را به دست آورید.

$$\vec{U} = (x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$$

معادله لاپلاس

- $\nabla^2\phi = 0$ در معادله جریان غیر چرخشی صادق می باشد.
- معادلات فوق برای جریان دو بعدی استفاده می شوند.
- با حل معادلات فوق تابع جریان و پتانسیل سرعت و در نتیجه تابع توزیع سرعت به دست می آید.
- با استفاده از آن و همچنین با استفاده از معادله حرکت تابع توزیع فشار قابل محاسبه می باشد.
- یکی از روشهای حل معادلات فوق روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables) می باشد.

خودآزمایی

➤ پرسش:

➤ کدام یک از موارد زیر درست است؟

$\nabla^2\phi = 0$ در معادله جریان غیر چرخشی صادق می باشد.

با حل معادلات تابع جریان و پتانسیل سرعت، تابع توزیع سرعت به دست می آید.

با استفاده توزیع سرعت و نیز معادله حرکت تابع توزیع فشار قابل محاسبه می باشد.

همه موارد درست می باشند.

خود آزمایی

➤ پرسش:

➤ رابطه میان تابع جریان و پتانسیل سرعت را تعیین نماید.

➤ با مفهوم چرخش سیال آشنا شدیم و دریافتیم چرخش تنها در اثر اعمال تنش رخ می دهد. همچنین دریافتیم پتانسیل سرعت رابطه ای است که در معادله شرط جریان غیر چرخشی صدق می کند. با روابط تابع جریان و پتانسیل سرعت نیز آشنا شدیم.

➤ با حل معادله لاپلاس تابع توزیع سرعت به دست می آید.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

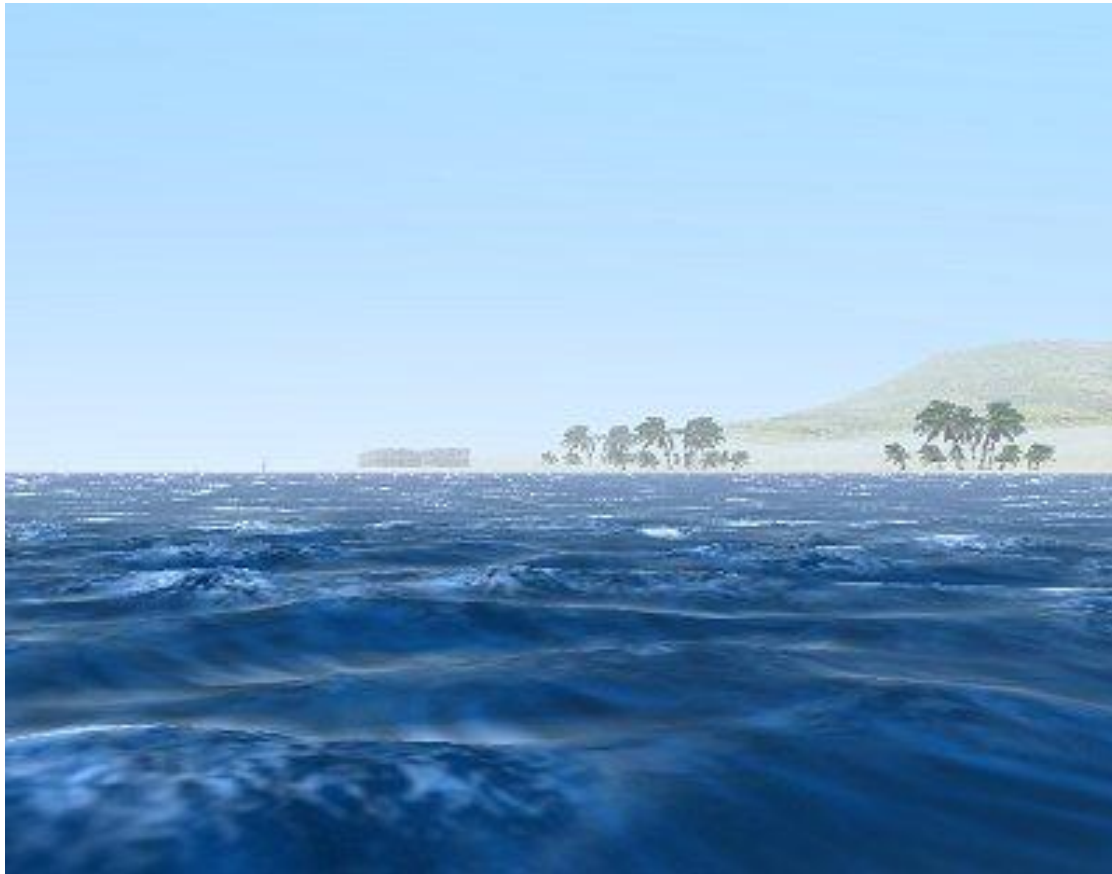
تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند
✓ چگونگی تشکیل لایه مرزی بر روی سطوح تخت را بشناسد.

➤ با داشتن درک درستی از لایه مرزی سیال هنگامی که در مجاورت سطح جامد قرار می گیرد، می توان بر هم کنش نیروهای سیال بر جسم جامد و برعکس را تعیین نمود. چگونگی تغییر لایه مرزی با رژیم جریان و نیز شکل هندسی جسم و در نتیجه چگونگی تغییر نیروهای وارده شده به جسم از پارامترهای کلیدی در طراحی اجسام متحرک غوطه ور (مانند راکت، هواپیما، کشتی و خودرو) در یک سیال می باشند. در این بخش سطوح تخت بررسی می شوند.

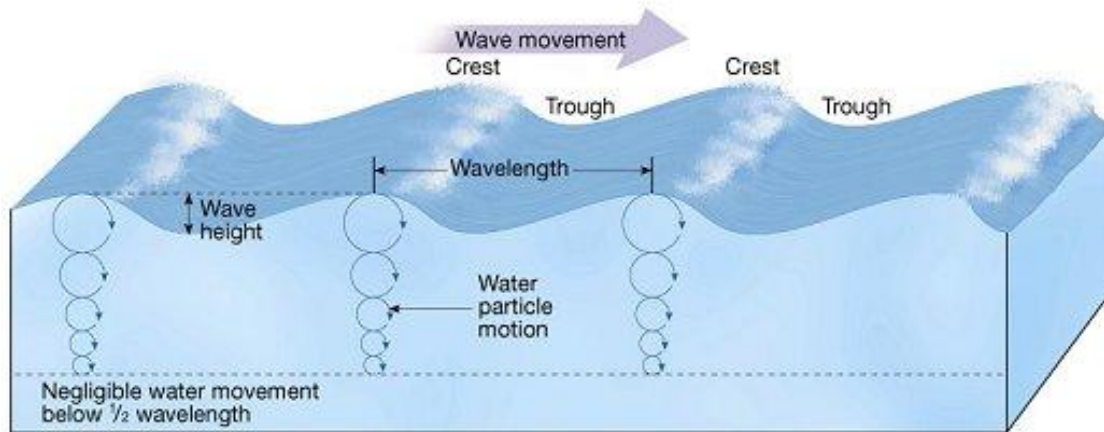


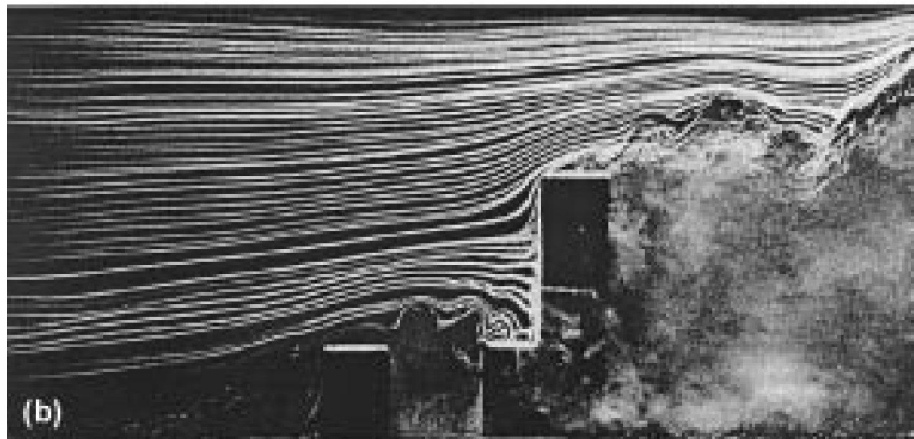
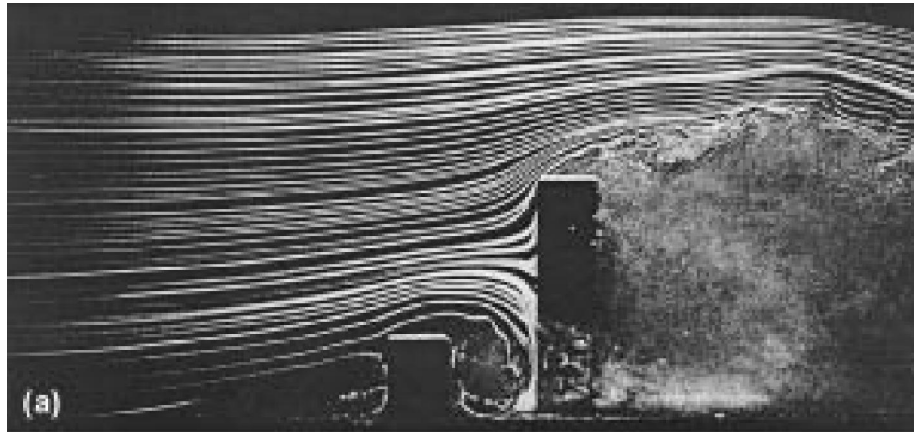
کاربرد



کاربرد





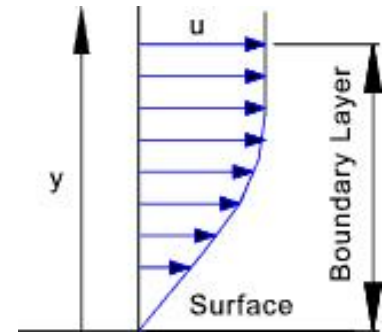
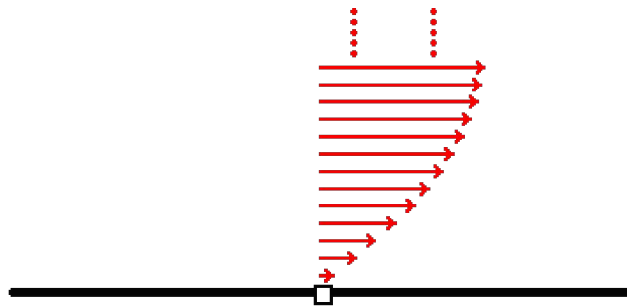
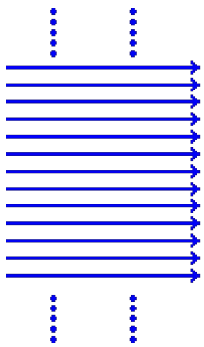


بررسی حرکت سیال بر روی سطوح تخت

۱. حرکت سیال بر روی یک صفحه تخت (Flat) موازی با جریان سیال

«Friction Drag»

در این حالت خطوط جریان به ندرت تحت تاثیر جسم سخت واقع می‌شوند و معمولاً موازی سطح می‌باشند.

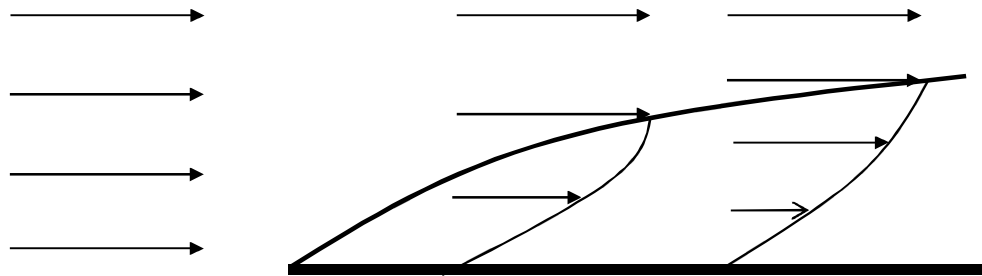


بررسی حرکت سیال بر روی سطوح تخت

➤ فشار یکنواخت خارج از لایه مرزی تأثیری بر روی جریان داخل لایه مرزی ندارد و در نتیجه تغییر فشار قابل توجهی در داخل لایه مرزی مشاهده نمی شود.

➤ نتیجه:

✓ نیروی دراگ (Drag) تنها ناشی از وجود اصطکاک (Friction) می باشد.



$$F_D = \int \tau_w dA \quad C_D = \frac{F_D}{(1/2)\rho U_\infty^2 A} = f(N_R)$$

A در این روابط
سطح صفحه می باشد.

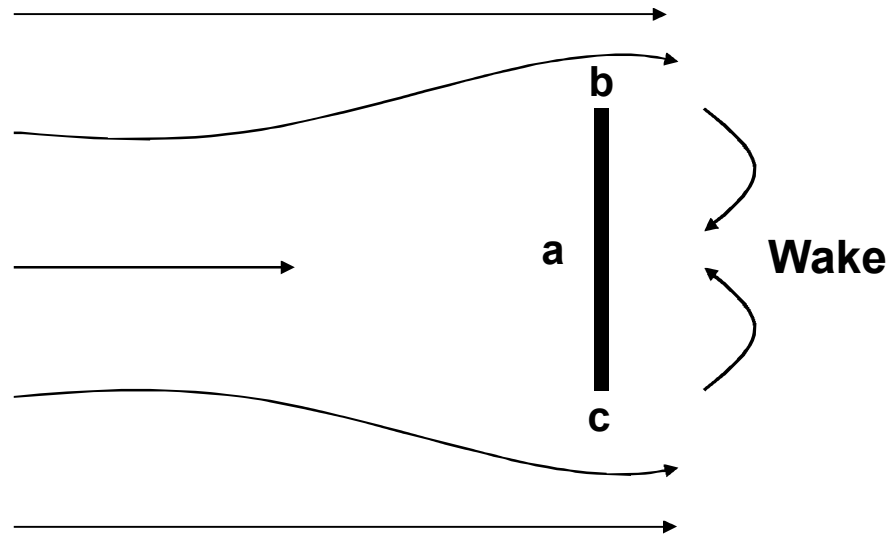
بررسی حرکت سیال بر روی سطوح تخت

۲. حرکت سیال بر روی یک صفحه تخت (Flat) عمود بر جریان سیال

«Pressure Drag»

برخلاف حالت قبل در این حالت تنها نیروی وارد شده بر سطح نیروی فشار می‌باشد. به عبارت دیگر نیروی Drag حاصله تنها به علت وجود گرادیان فشار به وجود می‌آید. نیروی حاصل از اصطکاک یا تنش برشی (Friction, Shear Stress) که بر صفحه اعمال می‌شود در جهت عمود بر حرکت سیال است و تأثیری بر روی نیروی Drag وارد بر صفحه ندارد.

بررسی حرکت سیال بر روی سطوح تخت



نقطه **a** نقطه ایستایی (Stagnation) می باشد. در نقطه **a** که فشار بیشینه می باشد، سیال شتاب می گیرد و فشار کاهش می یابد و سیال به سمت نقاط **c** و **b** حرکت می کند. در طول مسیر جدایی (Separation) وجود ندارد.

بررسی حرکت سیال بر روی سطوح تخت

- در این حالت گرادیان فشار در لایه مرزی به اندازه ای زیاد است (چه در حالت جریان آرام و چه در حالت جریان آشفته) که موجب به وجود آمدن Wake در پشت صفحه می شود.
- به همین علت جدایی به نوع جریان بستگی ندارد و در نتیجه C_D به شکل و ابعاد صفحه بستگی دارد و تابع N_R نیست ($N_R > 1000$).

$$F_D = \int P dA \Rightarrow C_D \neq f(N_R) = \frac{F_D}{(1/2)\rho U_\infty^2 A}$$

- A در این روابط سطح صفحه می باشد.

- با حرکت سیال بر روی سطوح مختلف مسطح آشنا شدیم و دریافتیم تأثیر سیال بر اجسام به شکل سطح آنها بستگی دارد.
- در مورد سطوح موازی خطوط جریان تغییری نمی کنند و نیروی وارده ناشی از تنش می باشد در حالیکه در مورد سطوح عمود خطوط جریان به شدت تغییر می کنند و نیروی وارده ناشی از فشار می باشد.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

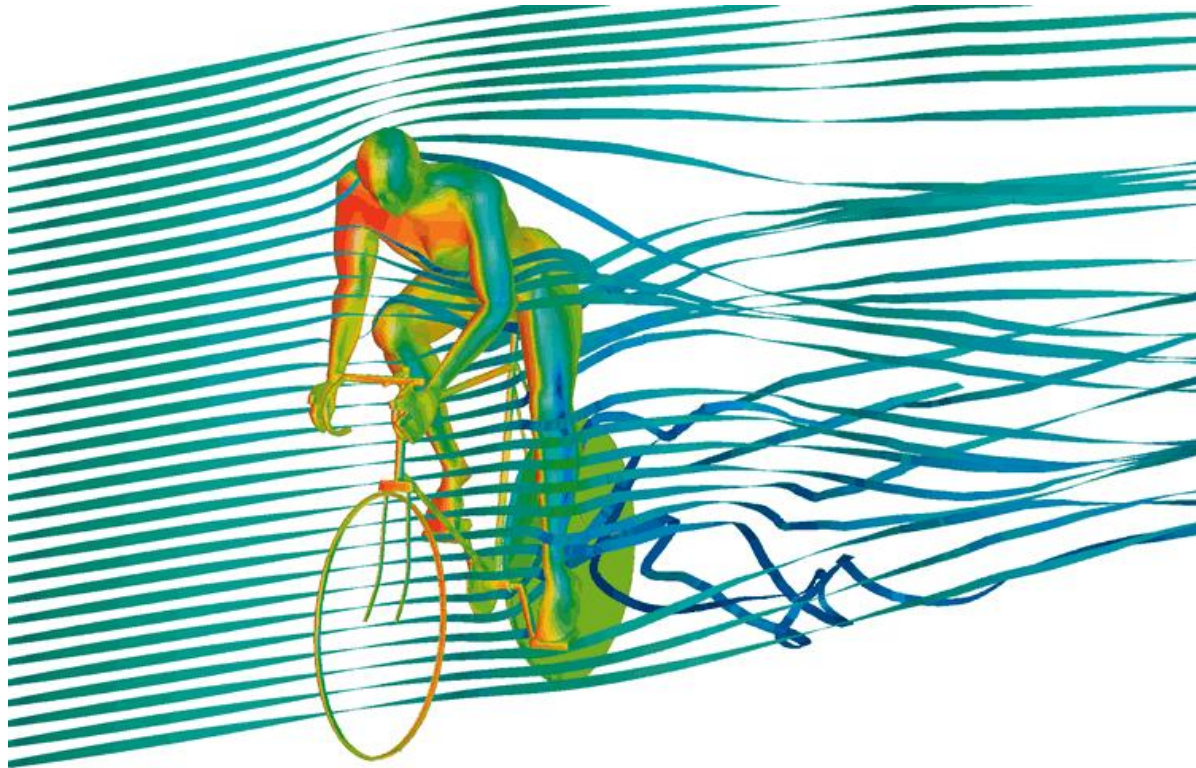
➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
✓ چگونگی تشکیل لایه مرزی بر روی سطوح غیرمسطح را بشناسد.

کاربرد

➤ با داشتن درک درستی از لایه مرزی سیال هنگامی که در مجاورت سطح جامد قرار می گیرد، می توان بر هم کنش نیروهای سیال بر جسم جامد و برعکس را تعیین نمود. چگونگی تغییر لایه مرزی با رژیم جریان و نیز شکل هندسی جسم و در نتیجه چگونگی تغییر نیروهای وارده شده به جسم از پارامترهای کلیدی در طراحی اجسام متحرک غوطه ور (مانند راکت، هواپیما، کشتی و خودرو) در یک سیال می باشند. در این بخش سطوح غیرمسطح بررسی می شوند.

کاربرد



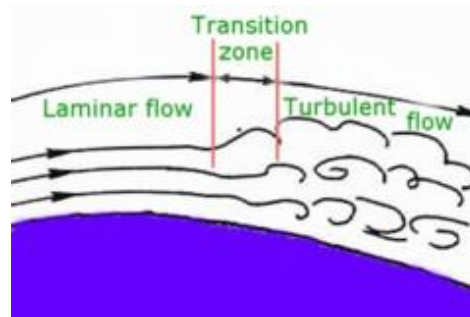


بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

۳. حرکت سیال بر روی سطح غیر مسطح (Curved)

«Friction & Pressure Drag»

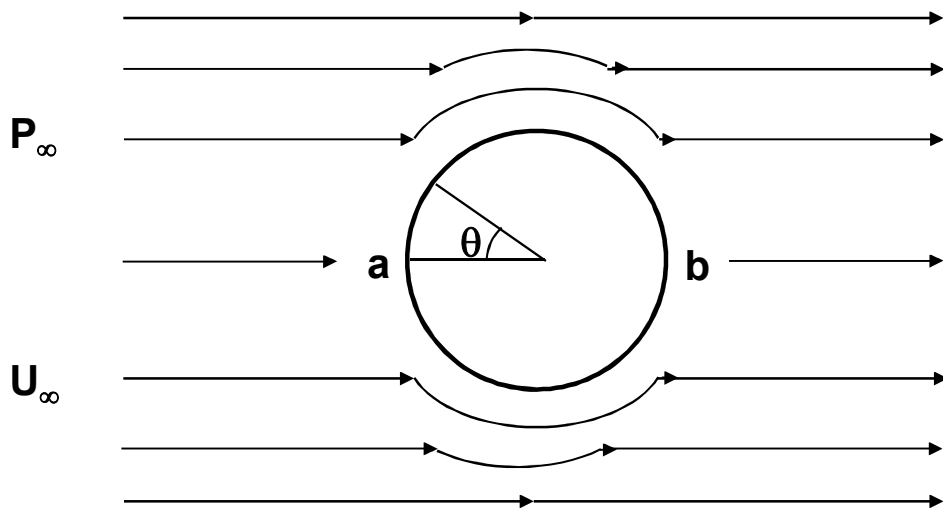
تفاوت بین جریان بر روی یک صفحه مسطح و یک صفحه غیر مسطح به تغییرات فشاری که به علت انحنای در سطح به وجود می‌آید مربوط می‌شود.



بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

➤ در حرکت سیال غیر ویسکوز (جریان ایده آل) خطوط جریان در دو طرف کره (و یا استوانه) قرینه می‌باشند. در این حالت لایه مرزی که موجب جابجایی این خطوط می‌شود، تشکیل نمی‌شود.

➤ در این حالت نقاط a و b نقاط ایستایی (Stagnation) می‌باشند و سرعت سیال در این نقاط صفر می‌باشد.



بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

➤ نکته:

✓ در حالیکه برای جریان ایده آل توزیع فشار متقارن است، توزیع فشار در عمل و برای سیال واقعی متقارن نمی باشد.

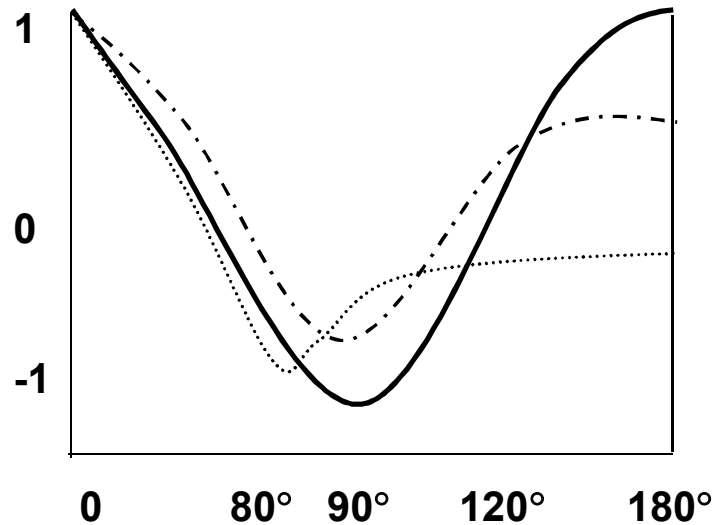
➤ اگر منحنی تغییرات فشار بر روی سطح کره به صورت تجربی ترسیم شود، در جریانهای آرام و آشفته منحنیهای خط چین به دست می آیند.

➤ نتایج تجربی در جریان آشفته تطابق بیشتری با جریان ایده آل دارد.

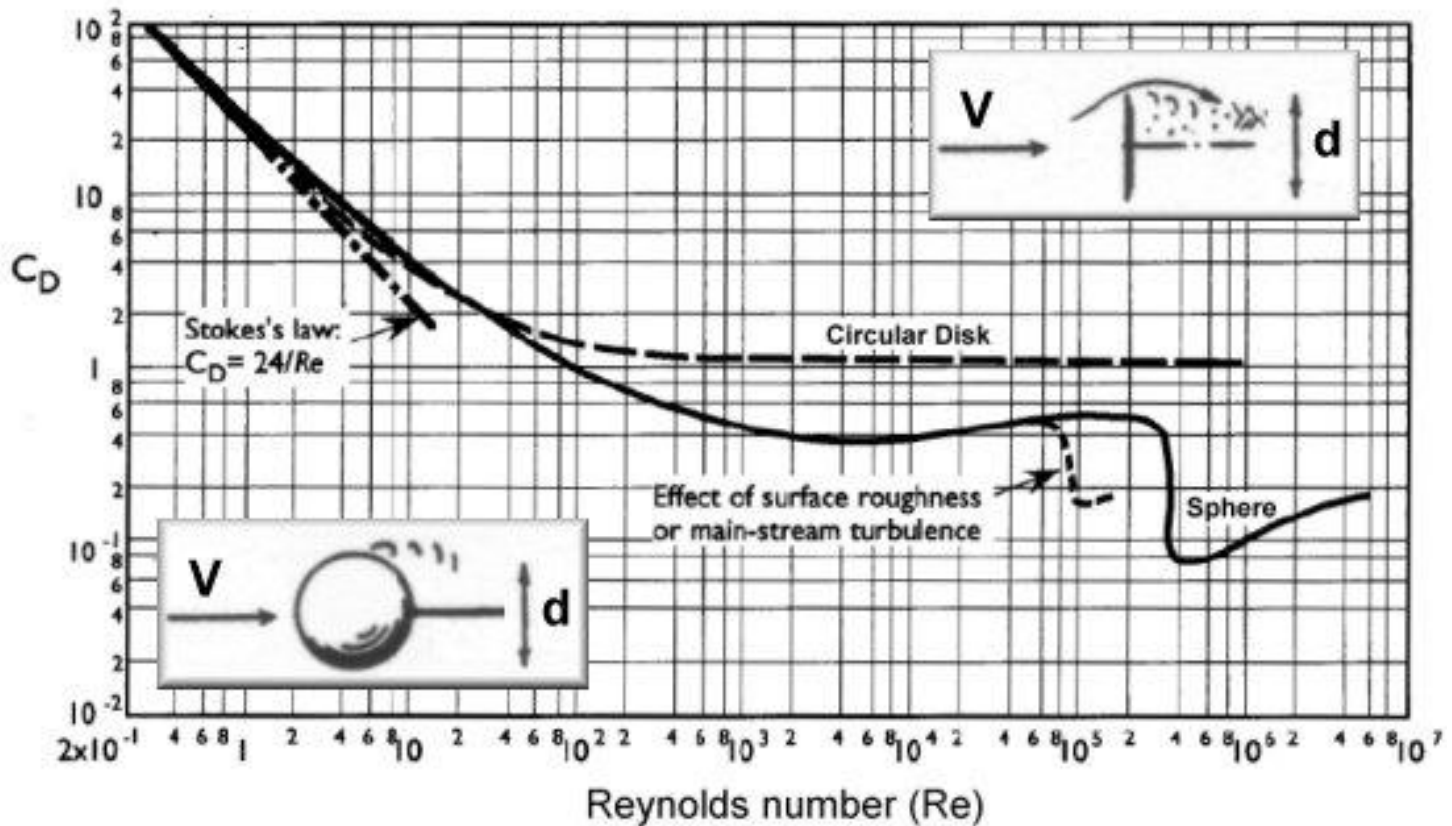
بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

(فشار بدون بعد) $\frac{P - P_\infty}{(1/2)\rho U_\infty^2}$

P فشار روی سطح کره



بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح



خود آزمایی

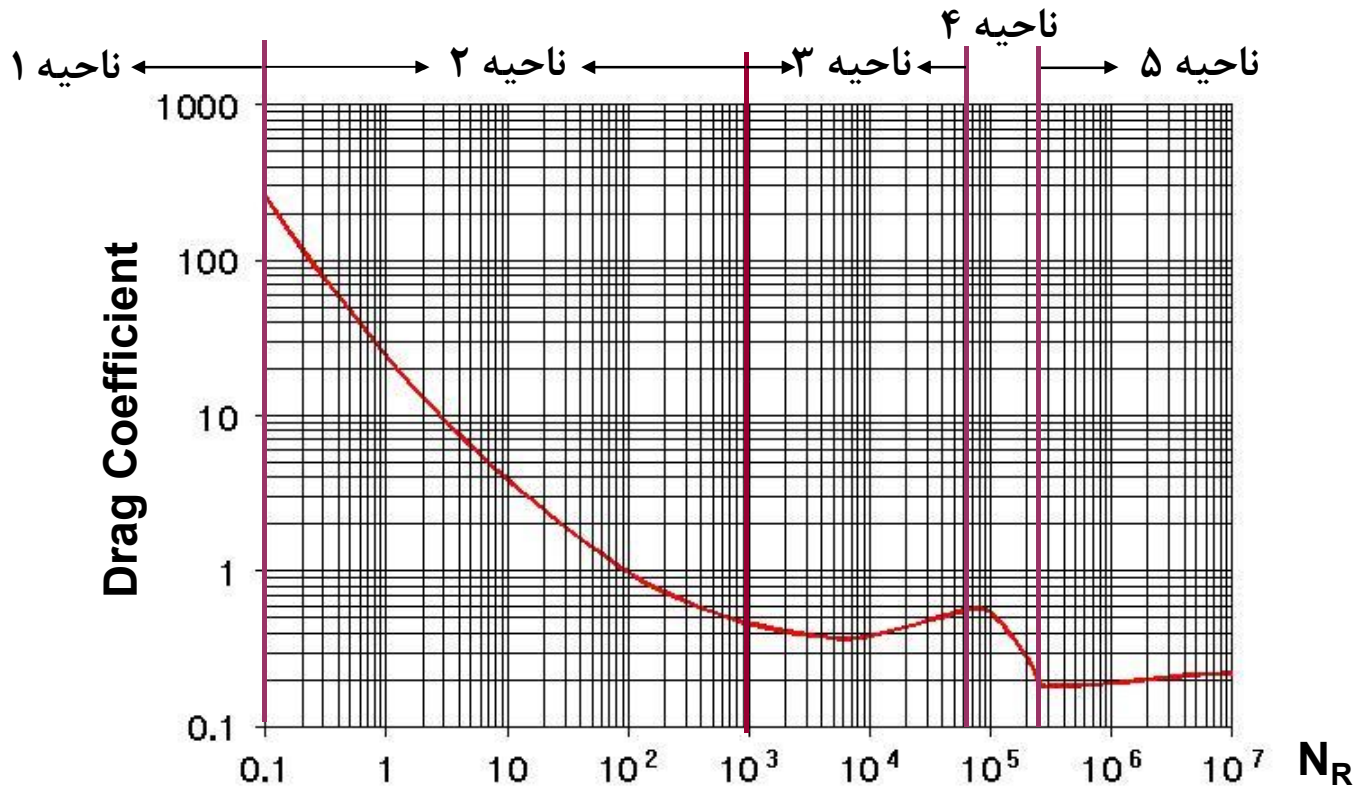
پرسش:



✓ برای اینکه ضریب دراگ کره ای که با سرعتی متناسب با عدد رینولدز $6/0$ در سیالی حرکت می کند، 10 برابر کاهش یابد، عدد رینولدز باید چند برابر شود؟ سرعت سیال چه تغییری می کند؟

بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

می‌توان منحنی C_D را به ۵ ناحیه بر حسب N_R تقسیم کرد:



بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

➤ در ناحیه ۱ که در آن $N_R < 0.1$ می باشد، جریان سیال جریان خزشی (Creeping Flow) است.

$$C_D = \frac{24}{N_R}$$

➤ در این حالت کل Drag به صورت Friction می باشد.

➤ با افزایش N_R نقش Pressure بیشتر می شود و مقدار C_D کاهش می یابد.

➤ در ناحیه ۲ که در آن $1 < N_R < 10^3$ می باشد:

$$C_D \approx \frac{18.5}{N_R^{0.6}}$$

بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

➤ در ناحیه ۳ که در آن $10^3 < N_R < 2 \cdot 10^5$ می باشد، جریان آرام (Laminar boundary layer) و مقدار C_D تقریباً ثابت است:

$$C_D \approx 0.4-0.6$$

➤ جدایی (Separation Point) در زاویه‌ای معادل 80° اتفاق می افتد. میزان Wake در پشت کره و بنابراین اختلاف فشار عقب و جلوی کره نیز قابل توجه می باشد و در نتیجه Pressure Drag قابل ملاحظه می باشد.

بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

➤ در ناحیه ۴ که در آن $2 \cdot 10^5 < N_R < 4 \cdot 10^5$ می باشد، جریان انتقالی (Transition) است.

➤ این ناحیه مربوط به انتقال از جریان آرام به جریان آشفته می باشد. در این حالت جدایی کمی با تأخیر اتفاق می افتد و به زاویه ای بزرگتر از 90° منتقل می شود. در این حالت میزان Wake کاهش می یابد لذا گرادیان فشار بر روی کره نیز کم می شود و میزان C_D به طور قابل ملاحظه ای کاهش می یابد. زیرا نقطه جدایی از زاویه ای کوچکتر از 90° به زاویه ای بزرگتر از 90° جابجا می شود.

بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

➤ در ناحیه ۵ که در آن $N_R > 4 \times 10^5$ می باشد و جریان آشفته (Turbulent boundary layer) می باشد.

➤ در این حالت به علت بیشتر بودن اندازه حرکت (Momentum) سیال لایه مرزی در مقابل اختلاف فشار مقاومت بیشتری از خود نشان می دهد و لذا نقطه جدایی بیشتر به تأخیر می افتد و در زاویه ای معادل 120° رخ می دهد در نتیجه میزان Wake کاهش می یابد لذا میزان C_D نیز بسیار کمتر از مقدار مربوط به جریان آرام می باشد زیرا گرادیان فشار کاهش می یابد.

➤ نکته:

➤ در حوالی N_R بحرانی ($2-4 \times 10^5$) میزان C_D برای جریان آشفته پنج برابر کوچکتر از مقدار آن برای جریان آرام می باشد.

بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

➤ نکته:

✓ تغییرات C_D بر حسب N_R برای جریان سیال بر روی استوانه تقریباً مانند تغییرات C_D بر حسب N_R برای جریان سیال بر روی کره می باشد. فقط مقدار C_D برای کره در هر مقدار N_R تقریباً دو برابر استوانه می باشد.

- در بیشتر موارد که سطوح دارای انحنا می باشند، تأثیرات تنش و فشار قابل ملاحظه می باشند.
- انتقال جریان از حالت آرام به حالت آشفته موجب کاهش شدید ضریب نیروی دراگ می شود.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



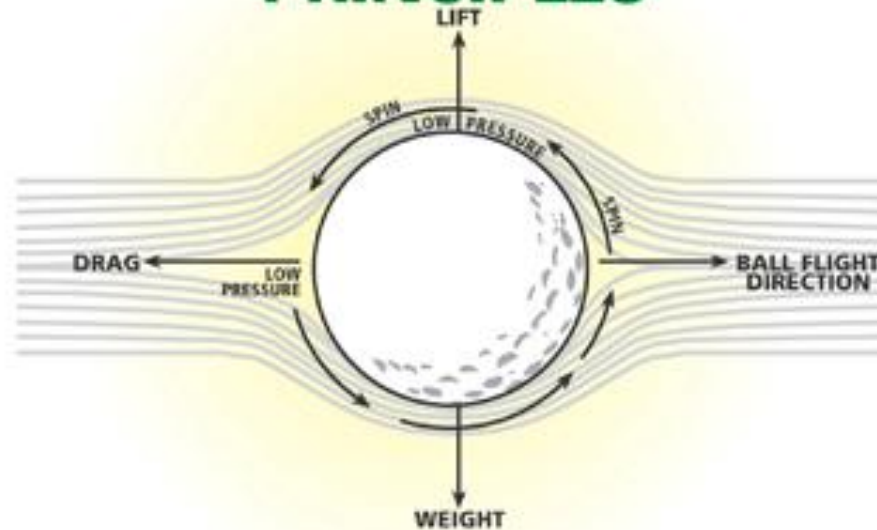
هدف بخش

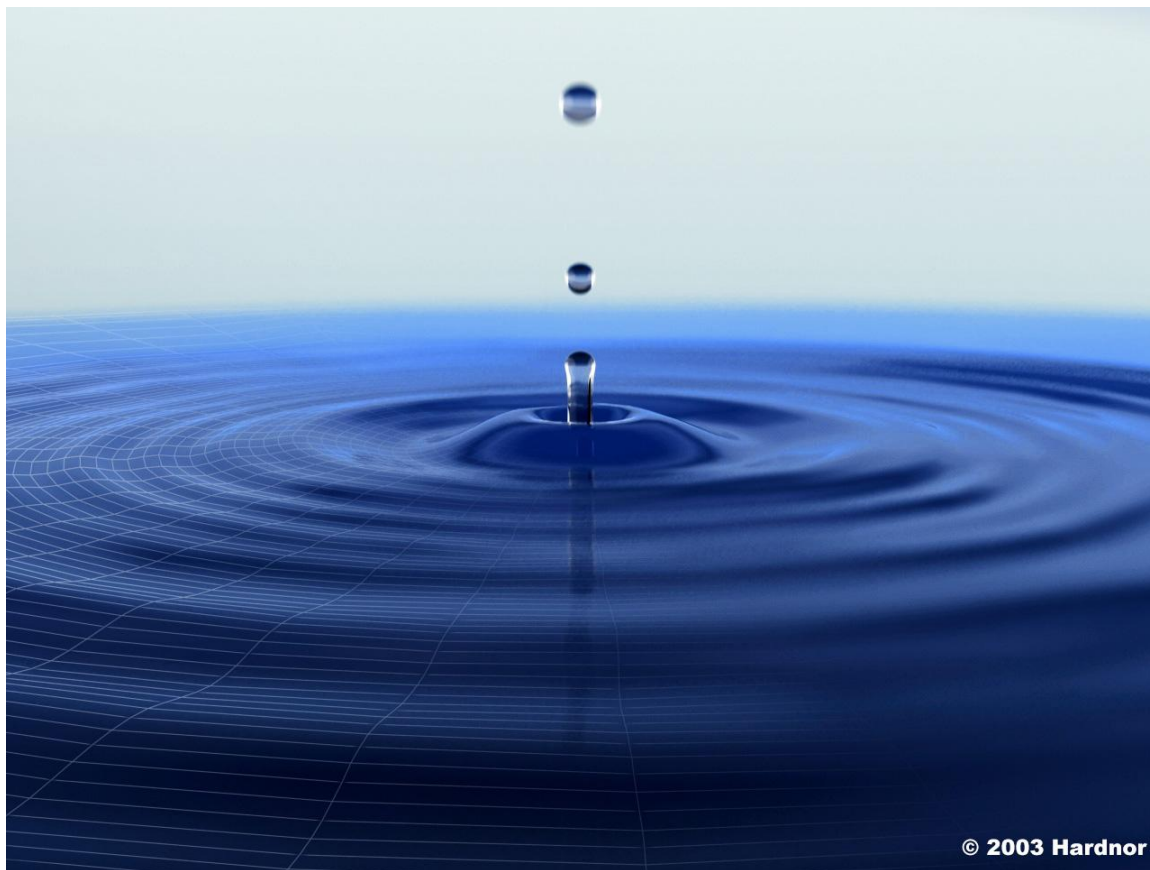
➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ تشکیل لایه مرزی بر روی استوانه و کره را شرح دهد و معادلات مربوطه را حل نماید.

➤ کره و استوانه از مثالهای کلاسیک در شناختن نیروها و تنشهای وارد شده از طرف سیال به جسم غوطه ور می باشند. در واقع در بسیاری از مراجع با بررسی نیروهای وارده به این دو شکل هندسی مفاهیم مربوط به نیروها و برهم کنشهای سیال- جامد در دیگر شکلهای هندسی نیز بررسی می شود (لازم با ذکر است در عمل بسیاری از اشکال هندسی را می توان با تقریب قابل قبولی به صورت کره و استوانه در نظر گرفت).

GOLF BALL FLIGHT PRINCIPLES





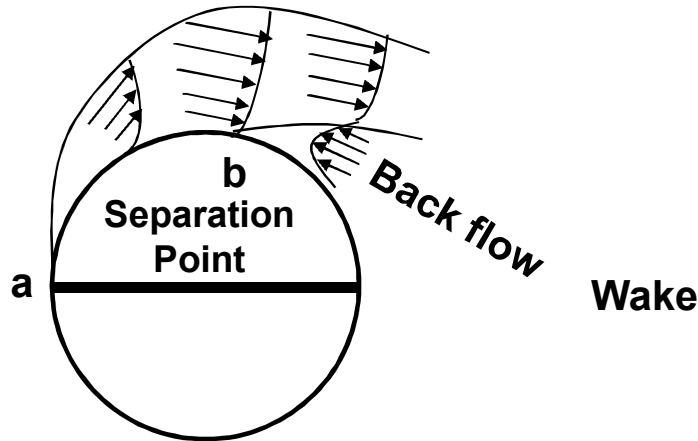
کاربرد



Saab 92001 / UrSaab

بررسی لایه مرزی بر روی یک استوانه

➤ با حرکت سیال واقعی از روی یک استوانه جدایی لایه مرزی (Separation of Boundary Layer) روی می دهد:



$$\frac{dP}{dx} < 0 \quad \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0} = 0 \quad \frac{dP}{dx} > 0$$

بررسی لایه مرزی بر روی یک استوانه

- لایه مرزی از نقطه a شروع می‌شود و به تدریج سراسر استوانه را فرا می‌گیرد.
- فشار در جهت جریان کاهش می‌یابد ($dP/dx < 0$).
- در خارج از لایه مرزی نیز سیال شتاب می‌گیرد (بر اساس رابطه برنولی) شتاب سیال در داخل لایه مرزی که به علت کاهش فشار سیال می‌باشد به علت وجود نیروی تنش (اصطکاک) کمتر از شتاب سیال در خارج از لایه مرزی می‌باشد. به علت شتاب گرفتن سیال در داخل و خارج از لایه مرزی در قسمت جلویی استوانه لایه مرزی تشکیل شده تأثیر قابل ملاحظه ای بر روی خطوط جریان ندارد.

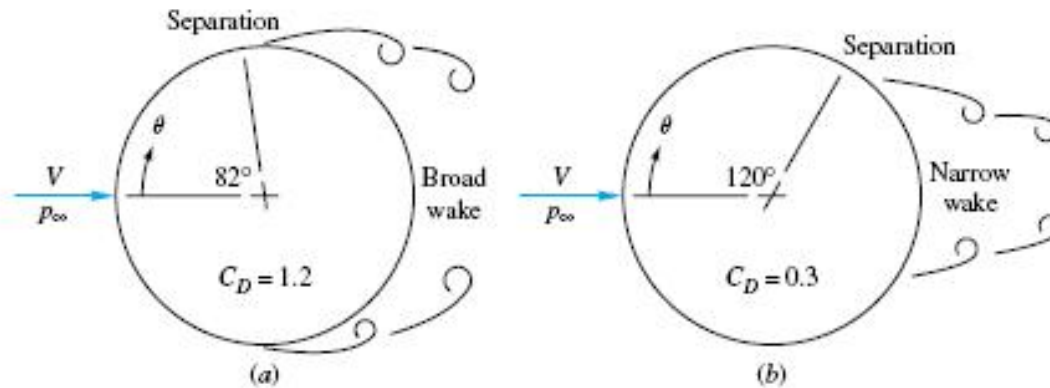
بررسی لایه مرزی بر روی یک استوانه

➤ در قسمت عقبی استوانه فشار در جهت جریان افزایش می‌یابد ($dP/dx > 0$)، این امر موجب کندی سیال در داخل و خارج از لایه مرزی می‌شود، اما سیال داخل لایه مرزی به علت از دست دادن اندازه حرکت که ناشی از وجود نیروی تنش می‌باشد، قادر نمی‌باشد بر نیروی فشار سیال خارج از لایه مرزی غلبه نماید، بنابراین در نقطه‌ای بر روی استوانه پدیده جدایی (Separation) رخ می‌دهد. به این معنی که لایه مرزی از حرکت باز می‌ایستد و فشار خارج لایه مرزی موجب می‌شود لایه مرزی در حالت سکون تغییر جهت دهد و حالت Back Flow رخ دهد.

➤ در این حالت در عقب استوانه Wake تشکیل می‌شود که این موجب جابجایی خطوط جریان و تغییر توزیع فشار می‌گردد.

بررسی لایه مرزی بر روی یک استوانه

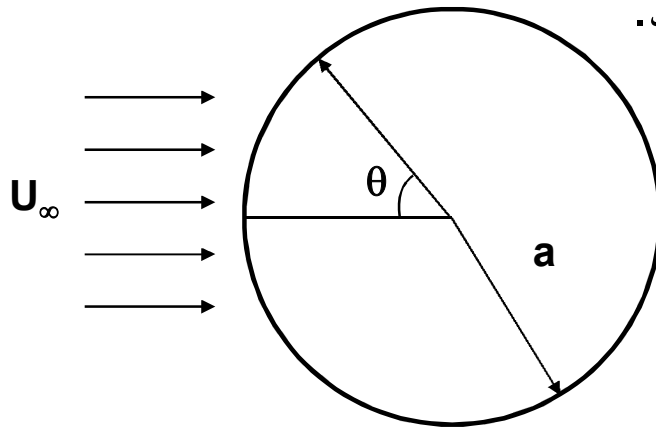
همانطوریکه قبلاً اشاره شد در جریان آشفته به علت اینکه سیال اندازه حرکت بیشتری دارد نقطه جدایی به تأخیر می‌افتد و این امر موجب کاهش Wake و کاهش گرادیان فشار در دو طرف استوانه می‌شود. در نتیجه نیروی Drag وارد شده بر استوانه در جریان آشفته کوچکتر از نیروی وارد شده در جریان آرام می‌باشد.



تمرین ۱:

➤ توزیع سرعت و فشار سیال اطراف یک استوانه را به دست آورید.
➤ حل:

✓ فرض مسأله: سیال ایده آل (Inviscid Flow) و یا غیرچرخشی (Irrotational) در نظر گرفته می شود.
✓ معادله برنولی قابل استفاده می باشد.



$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$V_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

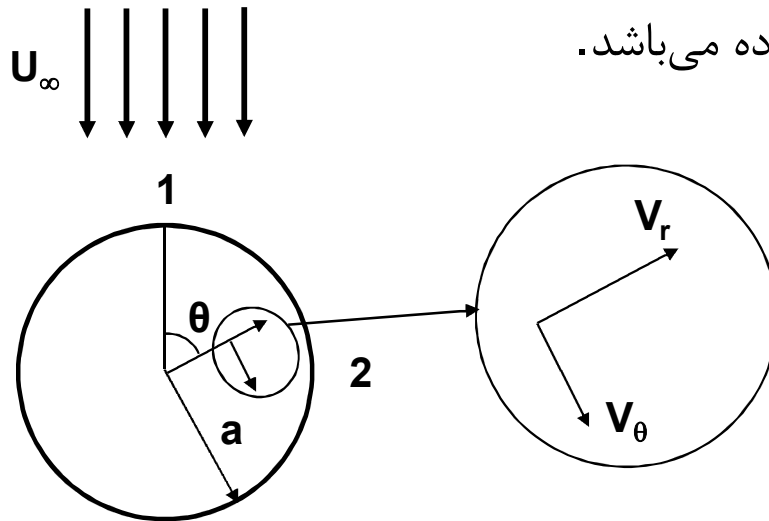
تمرین ۲:

➤ توزیع سرعت و فشار سیال در اطراف یک کره را تعیین نمایید.

➤ حل:

✓ فرض مسأله: سیال ایده آل (Inviscid Flow) و یا غیرچرخشی (Irrotational) در نظر گرفته می شود.

✓ معادله برنولی قابل استفاده می باشد.



➤ با حل معادلات لاپلاس و استفاده از معادله برنولی توزیع سرعت و فشار سیال ایده آل در اطراف استوانه و کره به دست آمد.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ مفاهیم و معادلات حاکم بر جریان آشفته را بشناسد.

✓ جریان آرام

✓ جریان آشفته

کاربرد

➤ به جرأت می توان گفت که در بیشتر موارد صنعتی، جریان سیال به صورت آشفته می باشد. در طراحی وسایل به حرکت در آورنده و هدایت کننده سیال (مانند پمپها و لوله ها)، دانستن انرژی مورد نیاز برای به حرکت در آوردن سیال و همچنین ویژگیهای مقاومتی و سایشی تجهیزات ناگزیر از داشتن دیدی تئوری از جریان آشفته می باشد. در این بخش تلاش می شود یکی از تئوریها مهم جریان آشفته در حرکت سیال معرفی شود.

مبانی جریان آشفته (*Turbulent Flow*)

➤ همان گونه که پیشتر نیز اشاره شد، در جریان آرام انتقال اندازه حرکت در اندازه مولکولی صورت می‌گیرد (Microscopic). در حالی که در جریان آشفته که در عمل بیشتر رخ می‌دهد، انتقال اندازه حرکت به صورت توده ای (Macroscopic) اتفاق می‌افتد و گردابه هایی (Eddy) از سیال از نقطه‌ای به نقطه دیگر منتقل می‌شوند.

➤ برای نخستین بار Reynolds با تزریق ماده رنگی به جریان آب در یک لوله شیشه‌ای پدیده جریان های آرام و آشفته را بررسی کرد. وی عدد بدون بعدی را تعریف کرد که با آن می‌توان نوع جریان سیال را مشخص نمود (N_R). وی همچنین نشان داد که سیال در گذر از حالت آرام به حالت آشفته از حالت انتقالی (Transition) نیز می‌گذرد.

مبانی جریان آشفته (Turbulent Flow)

➤ در جریان آرام یک سیال نیوتنی، **قانون ویسکوزیته نیوتن** حکم فرماست.

$$\tau = -\mu \frac{dU}{dy}$$

➤ بر اساس این معادله، معادله ای برای جریان آشفته نیز در نظر گرفته شده است:

$$\tau = -(\mu + \eta) \frac{dU}{dy}$$

که در این معادله μ مربوط به جریان آرام و η ، ویسکوزیته گردابه ای (Eddy Viscosity)، مربوط به جریان آشفته می باشد که بسته به میزان آرامش یا آشفتگی جریان سیال، یکی از این دو تعیین کننده می باشند. در جریان آشفته داریم:

$$\eta \gg \mu$$

$$\varepsilon = \eta / \rho$$

مبانی جریان آشفته (Turbulent Flow)

- ϵ (Eddy Kinematic Viscosity) تنها تابع رژیم جریان است.
- همان گونه که اشاره شد، در عمل بیشتر جریانها آشفته می باشند (به علت کمتر بودن ضرایب اصطکاک و دراگ در جریان آشفته نسبت به جریان آرام). در این حالت نوسانهای غیرمنظم گردابه ها به طور پیوسته در جریان اصلی وجود دارد.
- در جریانهای آشفته همواره یک انتقال پیوسته انرژی میان جریان اصلی و جریان گردابه ای وجود دارد.
- اگر چه آشفته و تصادفی بودن حرکت گردابه های و اختلاط آنها (Mixing Eddy) دستیابی به یک مدل قابل قبول ریاضی را بسیار دشوار می کند، اما از دیگر سو کمتر بودن ضرایب مقاومت در این جریان میزان اتلاف انرژی را کاهش می دهد (کاهش f و C_D با N_R).

➤ در این بخش با مفهوم فیزیکی جریان آشفته و اهمیت آن در بیشتر کاربردهای صنعتی آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

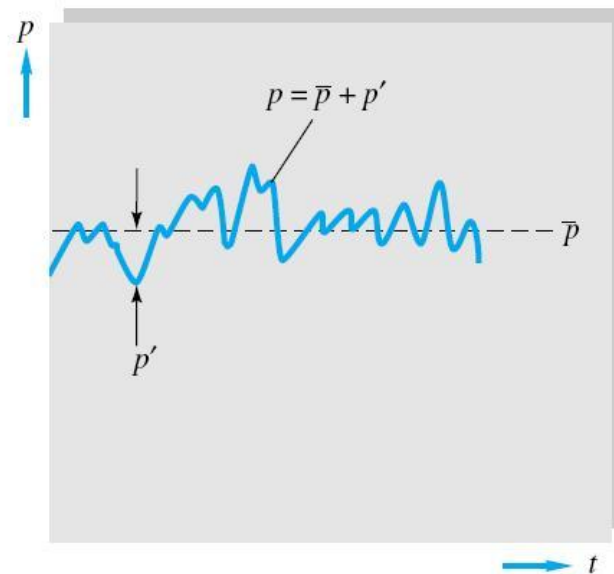
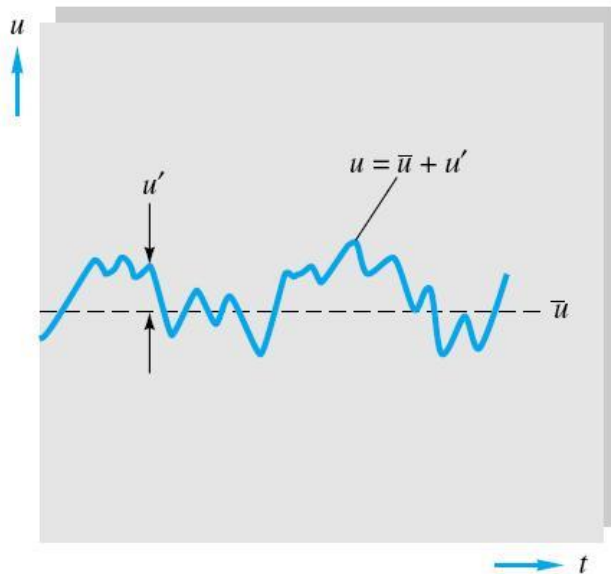
➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ شیوه مدل‌سازی در جریان آشفته مانند مدل پرانتل را بشناسد.

✓ معادله پیوستگی را در جریان آشفته سیال تراکم ناپذیر به کار گیرد.

کاربرد

استفاده از مفهوم Time Average در بسیاری از مدل‌سازیها مانند مدل‌سازی جریان آشفته سیالات کاربرد دارد.



تئوری طول اختلاط پранتل (Prandtl Mixing-Length Theory)

- یکی از بهترین تئوریهای ارائه شده برای بررسی جریان آشفته Mixing-Length Theory می باشد که توسط Prandtl مطرح شده است.
- در این تئوری جریان آشفته به صورت میانگین زمانی (Time Average) بررسی شده است.
- با بررسی های به عمل آمده مشخص شده است که در جریان آشفته مقادیر فشار و سرعت در یک نقطه نسبت به زمان ثابت نیستند و دارای نوسانهای (Fluctuation) غیر منظم با فرکانس بالا می باشند.
- مدل ریاضی جریان آشفته نیز با در نظر گرفتن این نوسانها گسترش یافته است.

$$U_x = \overline{U_x} + U'_x \quad V_y = \overline{V_y} + V'_y$$

$$W_z = \overline{W_z} + W'_z \quad P = \overline{P} + P'$$

تئوری طول اختلاط پراتل

➤ به بیان دیگر در توده سیال نوسانها در اندازه های گوناگون توده ای (Macroscopic) و به صورت گردابه ای (Eddy) و نه در اندازه های مولکولی به وجود می آیند که اندازه این گردابه ها و میزان نوسان آنها شاخصی از آشفتگی جریان می باشد.

➤ مقادیر \overline{P} ، \overline{U}_x ، \overline{V}_y و \overline{W}_z به صورت میانگین زمانی بیان می شوند و مقادیر P' ، U'_x ، V'_y و W'_z نیز میزان نوسانها را نشان می دهند.

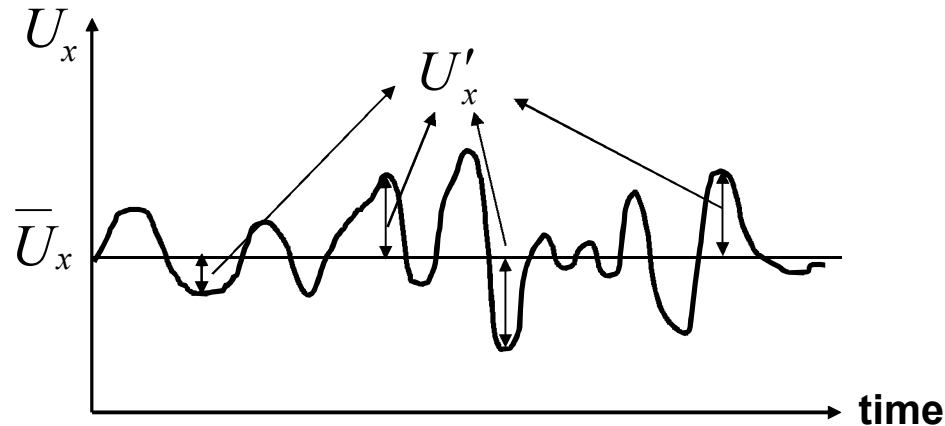
➤ در شرایط پایا (Steady State) مقادیر میانگین وابسته به زمان نمی باشند.

➤ هر یک از ترمهای میانگین زمانی به صورت رابطه زیر محاسبه می شوند:

$$\overline{U}_x = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} U_x dt$$

تئوری طول اختلاط پیرانتل

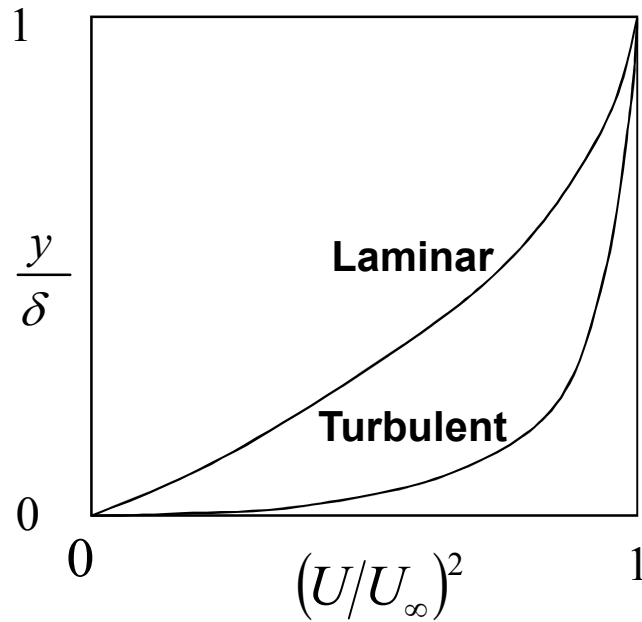
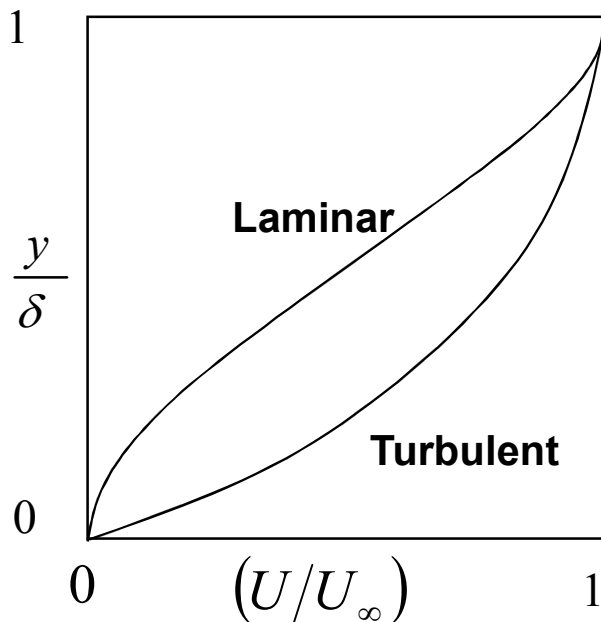
در این رابطه t مدت زمانی طولانی تر از مدت زمان نوسانها می باشد.



- Time Averaged Velocity: \bar{U}_x
- Instantaneous Velocity: U'_x

بررسی حرکت سیال بر روی سطوح غیر مسطح

➤ در جریان آشفته با افزایش N_R میزان C_D افزایش می‌یابد. علت آن نیز افزایش اندازه حرکت سیال و بیشتر بودن آن در جریان آشفته در مقایسه با جریان آرام می‌باشد و این در حالی است که نقطه جدایی تغییری نمی‌کند.



تمرین ۱:

➤ نشان دهید که میانگین سرعت نوسانی جریان در راستای x (و اساساً در هر راستایی) برابر صفر است ($\overline{U'_x} = 0$).

یادآوری

➤ هر گاه داشته باشیم:

$$f = \bar{f} + f' \quad \& \quad g = \bar{g} + g'$$

➤ می توان نوشت:

$$1) \overline{f \pm g} = \bar{f} \pm \bar{g} \quad 2) \overline{f'} = \overline{g'} = 0$$

$$3) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad 4) \overline{\bar{f}} = \bar{f}$$

➤ نکته:

✓ در جریان آشفته تأثیر مقادیر نوسانی سرعت بر مقادیر میانگین سرعت به گونه ایست که سبب افزایش تغییر شکل سیال می شود.


✓ به عبارت دیگر وجود نوسانها سبب افزایش ویسکوزیته ظاهری (Apparent Viscosity) سیال می شود.

معادله پیوستگی در جریان آشفته سیال تراکم ناپذیر

$$\nabla \cdot U = 0 \Rightarrow \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\overline{U_x} + U'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{V_y} + V'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{W_z} + W'_z)}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overline{U_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W_z}}{\partial z} + \frac{\partial U'_x}{\partial x} + \frac{\partial V'_y}{\partial y} + \frac{\partial W'_z}{\partial z} = 0$$

با میانگین گیری زمانی از این رابطه می توان نوشت: 

$$\Rightarrow \frac{\partial \overline{U_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W_z}}{\partial z} + \frac{\partial U'_x}{\partial x} + \frac{\partial V'_y}{\partial y} + \frac{\partial W'_z}{\partial z} = 0$$

معادله پیوستگی در جریان آشفته سیال تراکم ناپذیر

$$\overline{\frac{\partial U_x}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{U_x}}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial x} \quad \overline{\frac{\partial U'_x}{\partial x}} = \frac{\partial U'_x}{\partial x} \quad \overline{U'_x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overline{U_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W_z}}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U'_x}{\partial x} + \frac{\partial V'_y}{\partial y} + \frac{\partial W'_z}{\partial z} = 0$$

نتیجه: ➤

سرعت‌های میانگین و نوسانی هر دو در معادله پیوستگی صادق می‌باشند. به عبارت دیگر معادله پیوستگی برای هر دو سرعت صادق است. ➤

تمرین ۲:

➤ معادله پیوستگی را در جریان آشفته سیال تراکم پذیر محاسبه نمائید.

➤ با مفهوم **Time Average** و سرعت‌های لحظه‌ای و میانگین و نیز معادله پیوستگی در جریان آشفته آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
✓ از مفهوم Time Average در معادله حرکت استفاده نماید.

➤ همانگونه که پیشتر نیز گفته شد، معادله حرکت یکی از معادله های اساسی در تعیین توزیع پارامترهای اساسی جریان سیال می باشد. تقریباً در همه موارد صنعتی، جریان سیال به صورت آشفته می باشد و بنابراین بایستی بتوان جریان سیال را با معادلات گسترش یافته برای جریان آشفته مدل نمود.

کاربرد



مکانیک سیالات پیشرفته

مبانی جریان آشفته

معادله حرکت در جریان آشفته سیال تراکم ناپذیر

➤ معادله حرکت (Navier-Stokes) در راستای x:

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + W_z \frac{\partial U_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right)$$

➤ با میانگین گیری زمانی از اولین جمله سمت چپ معادله فوق می توان نوشت:

$$\overline{U_x \frac{\partial U_x}{\partial x}} = \overline{(\overline{U_x} + U'_x) \frac{\partial}{\partial x} (\overline{U_x} + U'_x)} = \overline{\overline{U_x} \frac{\partial \overline{U_x}}{\partial x}} + \overline{\overline{U_x} \frac{\partial U'_x}{\partial x}} + \overline{U'_x \frac{\partial \overline{U_x}}{\partial x}} + \overline{U'_x \frac{\partial U'_x}{\partial x}} = \overline{\overline{U_x} \frac{\partial \overline{U_x}}{\partial x}} + \overline{U'_x \frac{\partial U'_x}{\partial x}}$$

معادله حرکت در جریان آشفته سیال تراکم ناپذیر

➤ بدن ترتیب هر کدام از ترمهای سمت چپ تبدیل به دو ترم می شوند، اما همه ترمهای سمت راست به صورت میانگین بیان می شوند و تغییری نمی کنند. در نتیجه در هر جهت، سه ترم به معادله اصلی اضافه می شود. با جابجا کردن این ترمها به سمت راست، می توان نوشت:

$$\overline{U}_x \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial x} + \overline{V}_y \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial y} + \overline{W}_z \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \overline{g}_x +$$

$$v \left(\frac{\partial^2 \overline{U}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}_x}{\partial z^2} \right) - \overline{U'_x} \frac{\partial U'_x}{\partial x} - \overline{V'_y} \frac{\partial U''_x}{\partial y} - \overline{W'_z} \frac{\partial U'_x}{\partial z}$$

➤ به آسانی می توان سه ترم فوق را به صورت تنش نشان داد.

معادله حرکت در جریان آشفته سیال تراکم ناپذیر

نکته: ➤

✓ تنها تفاوت جریان آرام و جریان آشفته در این ترمهای اضافی می باشد.

$$U'_x \frac{\partial U'_x}{\partial x} + V'_y \frac{\partial U'_x}{\partial y} + W'_z \frac{\partial U'_x}{\partial z} = \frac{\partial U'^2_x}{\partial x} + \frac{\partial U'_x V'_y}{\partial y} + \frac{\partial U'_x W'_z}{\partial z} -$$

$$\left(U'_x \left[\frac{\partial U'_x}{\partial x} + \frac{\partial V'_y}{\partial y} + \frac{\partial W'_z}{\partial z} \right] \right)$$

$$\Rightarrow \overline{U'_x \frac{\partial U'_x}{\partial x}} + \overline{V'_y \frac{\partial U'_x}{\partial y}} + \overline{W'_z \frac{\partial U'_x}{\partial z}} = \overline{\frac{\partial U'^2_x}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial U'_x V'_y}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial U'_x W'_z}{\partial z}}$$

معادله حرکت در جریان آشفته سیال تراکم ناپذیر

➤ با جایگزینی این رابطه در معادله حرکت می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \overline{U}_x \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial x} + \overline{V}_y \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial y} + \overline{W}_z \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \overline{g}_x \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{U}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}_x}{\partial z^2} \right) \\ + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (-\rho \overline{U'_x{}^2})}{\partial x} + \frac{\partial (-\rho \overline{U'_x V'_y})}{\partial y} + \frac{\partial (-\rho \overline{U'_x W'_z})}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

معادله حرکت در جریان آشفته سیال تراکم ناپذیر

➤ همچنین می توان معادلات مشابهی در راستاهای Z و Y برای معادله حرکت به دست آورد. بنابراین ۹ ترم اضافی که بیان کننده تنشهای اضافی (Additional Stresses) $(\rho U'_i U'_j)$ می باشند، در معادلات حرکت جریان آشفته با عنوانهای

Turbulent stresses

Reynolds stresses

Apparent stresses

➤ ظاهر می شوند.

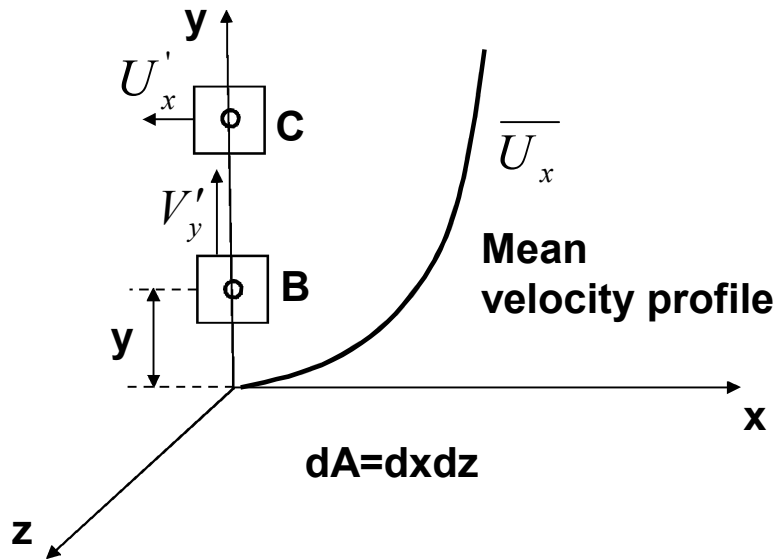
➤ روش نخست:

✓ برای نشان دادن ادعای مذکور از بحث Momentum Transfer استفاده می شود.

تنهشای اضافی در معادله حرکت

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} V_x \rho dV + \int_{c.s.} V_x \rho V_y dA$$

$$\frac{F}{A} = \rho V'_x V'_y = \tau_{xy}$$



روش دوم: ➤

تنهشای اضافی در معادله حرکت

➤ المان dA عمود بر محور y در نظر گرفته می‌شود که دارای سرعت متوسط \overline{U}_x در جهت محور x می‌باشد. مولفه نوسانی سرعت در جهت y (V'_y) می‌تواند یک توده از سیال (Bulk of Fluid) را از نقطه B به نقطه C که دارای سرعت میانگین بیشتری در جهت محور x می‌باشد، انتقال دهد.

➤ مقدار سیال انتقال یافته در اثر حرکت این توده از سطح مقطع dA معادل $\rho V'_y dA$ می‌باشد (Mass Flow Rate). در اثر انتقال این مقدار سیال به نقطه C یک انتقال اندازه حرکت رخ می‌دهد که سبب به وجود آمدن یک مولفه نوسانی سرعت در جهت محور x (U'_x) در نقطه C می‌شود.

➤ نکته:

✓ این انتقال سیال می‌تواند موجب به وجود آمدن مولفه های نوسانی سرعت در دیگر راستاها نیز بشود (V'_y, W'_z).

تنشهای اضافی در معادله حرکت

➤ میزان انتقال اندازه حرکت در راستاهای گوناگون برابر است با:

$$\rho V'_y dAU'_x, \quad \rho V'_y dAV'_y, \quad \rho V'_y dAW'_z$$

➤ میزان تغییرات اندازه حرکت معادل نیرویی است که موجب تغییرات شده است در نتیجه معادل تنش (Stress) نیز می باشد. لذا می توان نوشت:

$$\tau_{yx} = -\rho U'_x V'_y$$

$$\tau_{yy} = -\rho V_y'^2$$

$$\tau_{yz} = -\rho W'_z V'_y$$

➤ همانطوریکه مشاهده می شود ۹ ترم اضافی در معادلات حرکت از جنس تنش (Stress) می باشند.

تنشهای اضافی در معادله حرکت

➤ نکته:

✓ علامت منفی به این علت ظاهر می‌شود که هرگاه علامت V'_y مثبت باشد سیال به نقطه‌ای که دارای سرعت میانگین بیشتری می‌باشد، منتقل می‌شود و این امر سبب به وجود آمدن مولفه‌های نوسانی سرعت با علامت منفی می‌شود. بنابراین عبارت $U'_i U'_j$ همواره منفی می‌باشد. به عبارت دیگر در این حرکت این انتقال اندازه حرکت سبب کاهش اندازه حرکت در نقطه C می‌شود.

➤ مفهوم **Time Average** را در معادله حرکت در جریان آشفته به کار گرفتیم و تنشهای اضافی به واسطه آشفتگی جریان را شناختیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



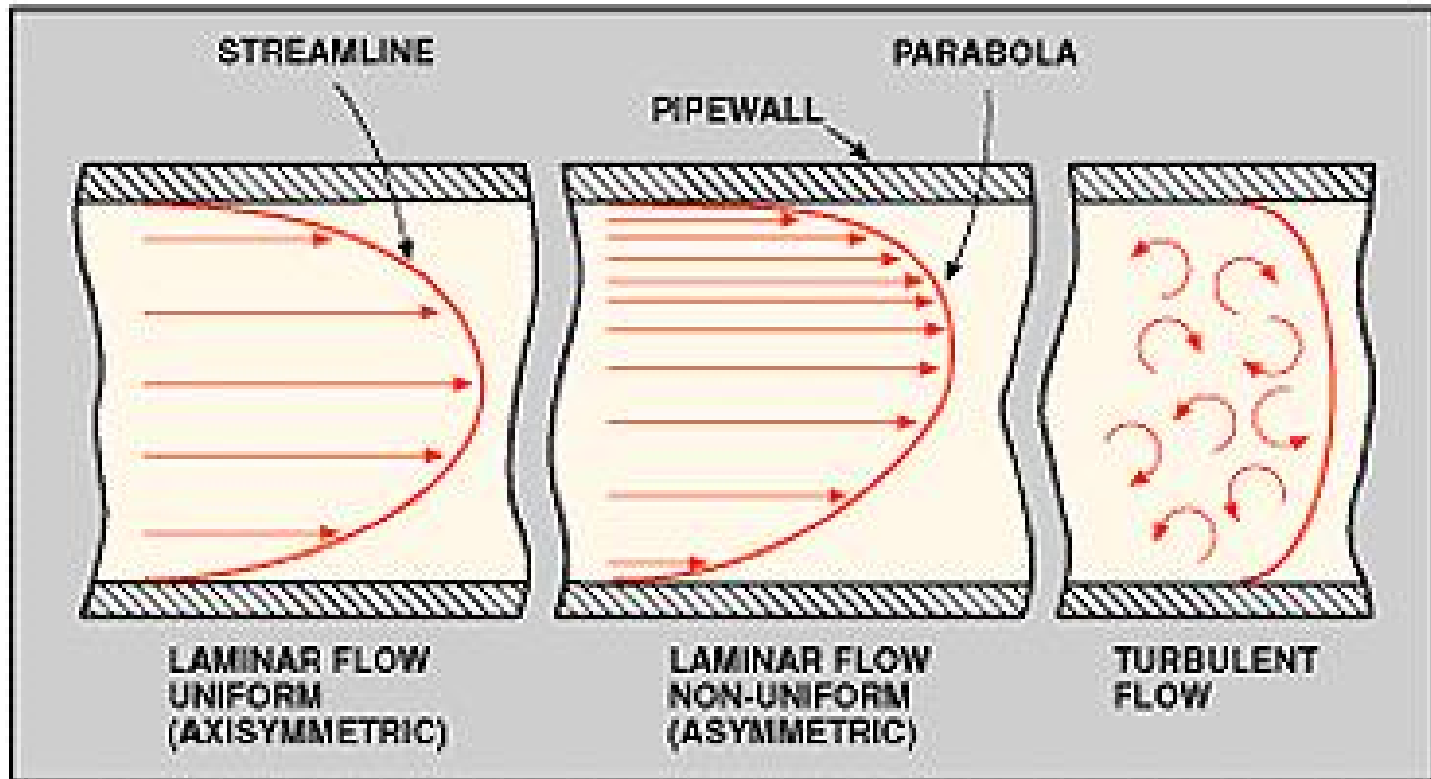
هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ تئوری پرانتل را برای حل معادله حرکت در جریان آشفته سیال تراکم ناپذیر بشناسد.

کاربرد

➤ همانگونه که پیشتر نیز گفته شد، تقریباً در همه موارد صنعتی، جریان سیال به صورت آشفته می باشد و بنابراین بایستی بتوان جریان سیال را با به کار گیری مدل های ارائه شده برای جریان آشفته بررسی نمود.



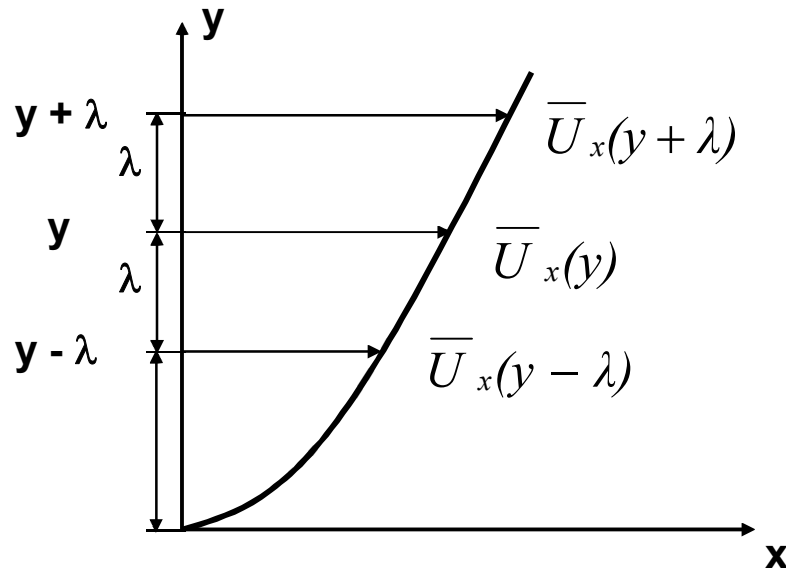
تئوری پرائنتل

➤ در این تئوری فرض شده است که:

۱. مقدار میانگین سرعت نوسانی به صورت قدر مطلق در یک نقطه معین درون سیال متناسب با فاصله میانگینی است که یک توده سیال در حال نوسان بین دو برخورد متوالی طی می‌کند. به عبارت دیگر مقدار میانگین سرعت نوسانی به صورت قدر مطلق معادل میانگین تغییرات سرعت متوسط سیال می‌باشد.
۲. مولفه های نوسانی سرعت که بر یکدیگر عمود می‌باشند، از یک درجه و با یکدیگر متناسب می‌باشند.

تئوری پرائنٹل

پرائنٹل فرض نمود توده‌ای از سیال از یک نقطه (y) دارای سرعت $\bar{U}_x(y)$ در حال نوسان به نقطه دیگر $(y+\lambda)$ دارای سرعت $\bar{U}_x(y+\lambda)$ منتقل شود. λ معادل طول میانگینی است که توده سیال بین دو برخورد متوالی طی می‌کند.



تئوری پرائنٹل

➤ اختلاف سرعت بین دو نقطه $(y+\lambda)$ و y براساس سری تیلور عبارت است از:

$$\left(\overline{U}_x(y) + \frac{d\overline{U}_x(y)}{dy} \lambda \right) - \overline{U}_x(y) = \frac{d(\overline{U}_x(y))}{dy} \lambda$$

➤ همچنین بین دو نقطه $(y-\lambda)$ و y می توان نوشت:

$$\overline{U}_x(y) - \left[\overline{U}_x(y) - \frac{d\overline{U}_x(y)}{dy} \lambda \right] = \frac{d(\overline{U}_x(y))}{dy} \lambda$$

$$|\overline{U}'_x| = \frac{1}{2} \left(\frac{d(\overline{U}_x(y))}{dy} \lambda + \frac{d(\overline{U}_x(y))}{dy} \lambda \right)$$

تئوری پرائنٹل

$$|\overline{U}'_x| = \lambda \left| \frac{d\overline{U}_x}{dy} \right|$$

$$|\overline{V}'_y| = A\lambda \left| \frac{d\overline{U}_x}{dy} \right|$$

$$|\overline{U}'_x| \cdot |\overline{V}'_y| = A\lambda^2 \left(\frac{d\overline{U}_x}{dy} \right)^2$$

$$\overline{U}'_x \overline{V}'_y = -B |\overline{U}'_x| |\overline{V}'_y|$$

$$\Rightarrow \overline{U}'_x \overline{V}'_y = -BA\lambda^2 \left(\frac{d\overline{U}_x}{dy} \right)^2$$

یادآوری ➤


تئوری پرائنٹل

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{U'_x V'_y} = AB\rho\lambda^2 \left(\frac{d\overline{U}_x}{dy} \right)^2$$

$L = \sqrt{AB}\lambda$, in which : L is mixing length

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \rho L^2 \left(\frac{d\overline{U}_x}{dy} \right)^2$$

$$\tau_{xy} = \eta \frac{d\overline{U}_x}{dy} \Rightarrow \eta = \rho L^2 \left(\frac{d\overline{U}_x}{dy} \right)$$

همانگونه که پیشتر هم گفته شد ویسکوزیته سینماتیک گردابه ای  (Kinematic Eddy Viscosity) تابع جریان می باشد.

تئوری پранتل

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\rho} = L^2 \left(\frac{d\bar{U}_x}{dy} \right)$$

▶ پранتل برای محاسبه تنش در جریان آشفته فرض نمود L به صورت خطی با y تغییر کند.

$$L = ky$$

K: Essential or universal constant

▶ همچنین فرض نمود نیروی تنش در نزدیکی دیواره ثابت باشد.

τ_0 : Shear stress at wall

$$\tau_0 = \rho k^2 y^2 \left(\frac{d\bar{U}_x}{dy} \right)^2 \quad \frac{d\bar{U}_x}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{ky} \Rightarrow \bar{U}_x = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int \frac{dy}{ky}$$

تئوری پранتل

$$\overline{U}_x = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln y + C$$

$$U^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} : \textit{Shear Stress Velocity or Friction Velocity}$$

$$\Rightarrow \overline{U}_x = U^* \left(\frac{1}{k} \ln y + \frac{C}{U^*} \right)$$

$$B.C.1: \textit{at } y = y_0 \cong 0: \overline{U}_x = 0$$

در نزدیکی دیواره: ➤

$$\Rightarrow \frac{\overline{U}_x}{U^*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{y_0} = \frac{1}{k} (\ln y - \ln y_0)$$

تئوری پранتل

$$U^+ = \frac{1}{k} \left(\ln y \frac{U^*}{\nu} - \ln y_0 \frac{U^*}{\nu} \right)$$

$$\Rightarrow U^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + D$$

➤ ضرایب معادله فوق که بصورت تجربی برای جریان سیال روی صفحه صاف تعیین شده‌اند عبارتند از:

$$U^+ = 2.54 \ln y^+ + 5.56$$

تئوری پранتل

این ضرایب برای لوله های نرم نیز به صورت تجربی توسط Nikuradse تعیین شده اند: ➤

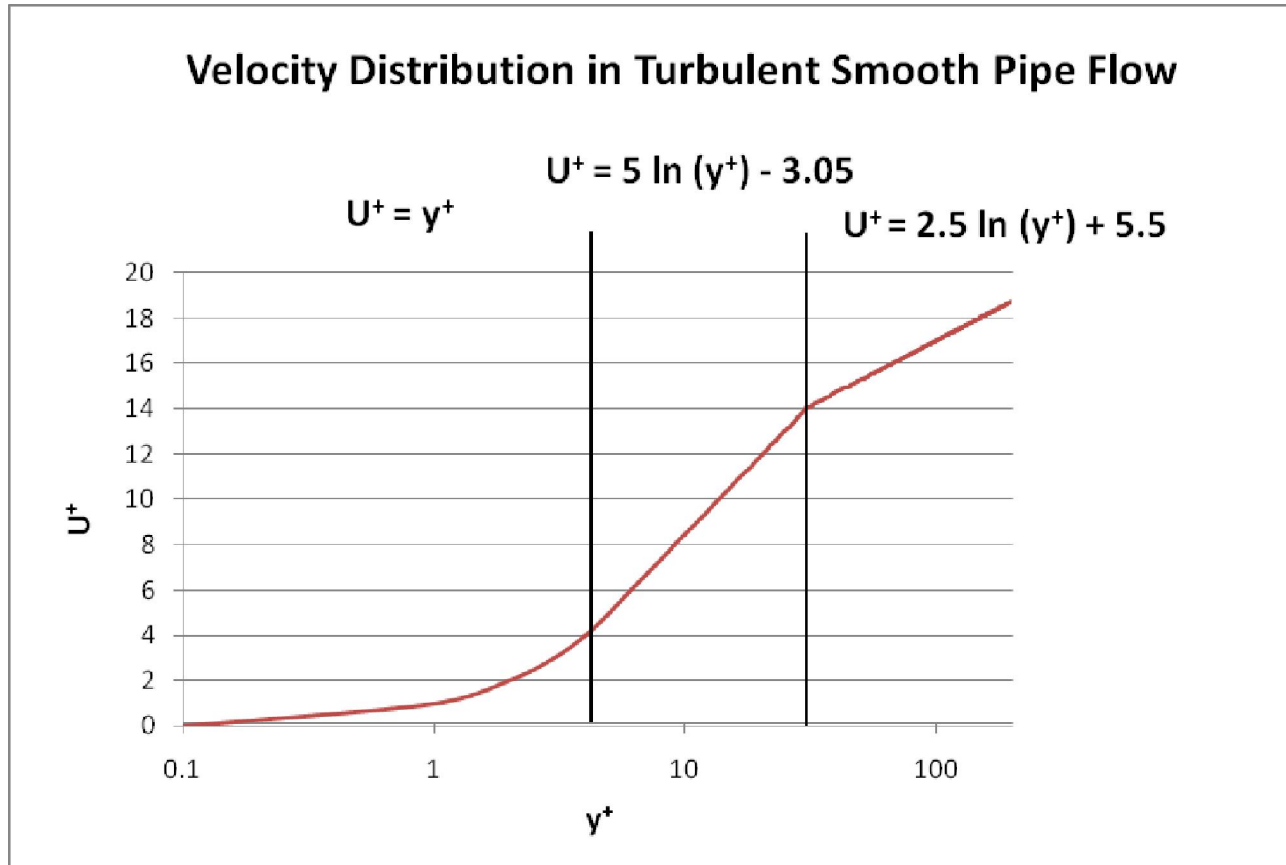
$$4 \times 10^3 < N_R < 3.2 \times 10^6$$

$$y^+ < 5: U^+ = y^+$$

$$5 < y^+ < 30: U^+ = 5 \ln y^+ - 3.05$$

$$30 < y^+: U^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$$

تئوری پرائنتل



تئوری پранتل

➤ مفاهیم فیزیکی:

۱. در نزدیکی دیواره ($y^+ < 5$) نوسانها کمتر است. در این حالت نوسانها در راستای لوله بیشتر از نوسانها در راستای عمود می‌باشند و همه نوسانها در سطح دیواره صفر می‌شوند. در این ناحیه ویسکوزیته معمولی تعیین کننده جریان سیال است و رابطه به دست آمده معادل رابطه جریان آرام می‌باشد.

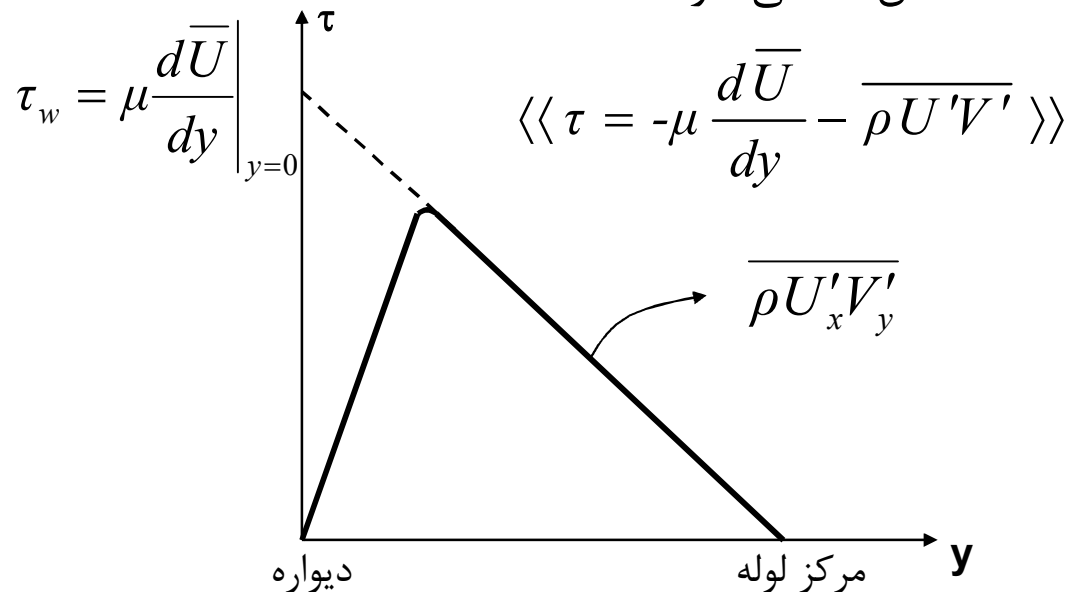
$$\frac{\overline{U_x}}{U^*} = \frac{yU^*}{\nu} \Rightarrow \overline{U_x} = y \frac{\tau_o / \rho}{\nu} = y \frac{\tau_o}{\mu}$$

$$\Rightarrow \tau_o = \mu \frac{\overline{U_x}}{y}$$

تئوری پранتل

۲. در حالت میانی $(5 \leq y^+ \leq 30)$ تأثیرات جریان آرام و جریان آشفته همزمان مشاهده می شوند.

۳. در مرکز لوله $(y^+ > 30)$ میزان نوسانها بسیار قابل ملاحظه می باشد و جریان آشفته نقش اساسی دارد.



تئوری پیرانتل

➤ با توجه به مطالب ذکر شده و دقت در شکل معلوم می‌شود که انتقال اندازه حرکت در ناحیه وسیعی ناشی از جریان آشفته می‌باشد و فقط در ناحیه همجوار دیواره انتقال اندازه حرکت در سطح مولکولی انجام می‌گیرد.

➤ **Nikuradse** همچنین برای لوله‌های زبر رابطه تجربی زیر را پیشنهاد داده است $(\varepsilon U^* / \nu > 80)$:

$$U^+ = 2.5 \left(\ln y^+ - \ln \frac{\varepsilon U^*}{\nu} \right) + 8.5$$

➤ که در این رابطه ε زبری لوله می‌باشد.

➤ در شرایطی که $\varepsilon U^* / \nu < 4$ باشد رفتار لوله‌های زبر شبیه لوله‌های در نظر گرفته می‌شود.

تمرین ۱:

➤ جریانی از آب در داخل یک لوله جاری است. با توجه به اطلاعات داده شده مطلوب است:

۱. محاسبه \bar{U} در مرکز لوله.
۲. محاسبه بیشینه فاصله‌ای که در آن ناحیه سرعت صفر می باشد.
۳. تکرار قسمت ۱ با فرض نرم بودن لوله.

$$\nu = 1.1 \times 10^{-5} \frac{ft^2}{s}, \quad \rho = 1.94 \text{ slug} / ft^3, \quad Q = 15 \text{ cfs}$$

$$D = 8", \quad \varepsilon = 0.00085' \text{ and } \tau_o = 9.5 \text{ bf} / ft^2$$

- مدلهای دیگری که برای جریان آشفته ارائه شده اند را بررسی نمایید.
- Kolmogorov Theory
- A Unified Theory Of Turbulent Flow

➤ با آنکه در جریان آشفته بیشتر تکیه بر معادلات تجربی است، اما مدل‌هایی نیز برای توصیف این جریان گسترش یافته اند. در این بخش با تئوری پرانتل و مدلسازی جریان آشفته با تکیه بر این تئوری آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
✓ معادله حرکت در داخل لایه مرزی را حل نماید.

➤ هنگامی که جسمی در داخل سیالی حرکت می کند، از سوی سیال نیروهایی به آن وارد می شود که حرکت جسم را تحت تأثیر قرار می دهد. از مهمترین این نیروها، نیروهای لیفت و دراگ می باشند که در دانش مکانیک سیالات با ضریبهای لیفت و دراگ معرفی می شوند. در این بخش با استفاده از نمودارها و روابط داده شده می توان ضرایب نیروی دراگ سیال به جسم را تعیین نمود.

لایه مرزی (Boundary Layer)

➤ برای نخستین بار پرانتل در سال ۱۹۴۰ نشان داد که در بیشتر جریانهای ویسکوز دو ناحیه متمایز وجود دارد:

۱. ناحیه‌ای نزدیک به سطح جامد که در آن اثرات ویسکوزیته مشاهده می‌شود.

۲. ناحیه‌ای که در آن اثرات ویسکوزیته مشاهده نمی‌شود.

➤ سیال در ناحیه اول (لایه مرزی) ویسکوز در نظر گرفته می‌شود، در حالیکه در ناحیه دوم غیرویسکوز فرض می‌شود.

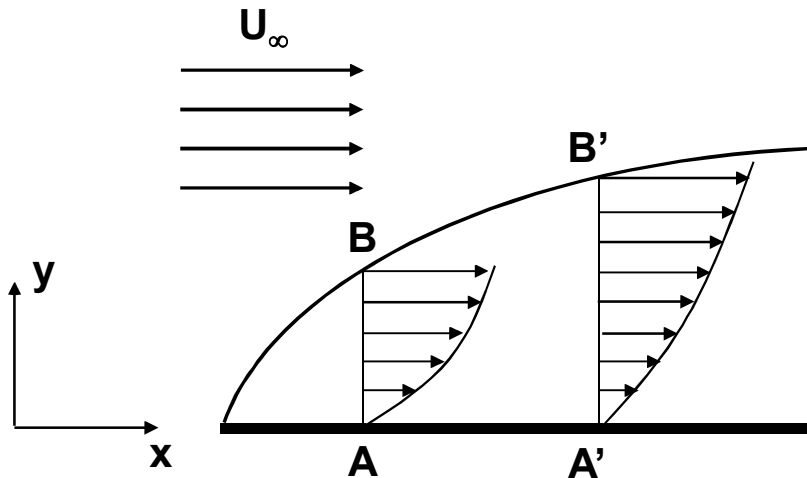
➤ **نکته:**

✓ در ناحیه‌ای که گرادیان سرعت زیاد باشد، از اثرات ویسکوزیته نمی‌توان صرف نظر نمود.

لایه مرزی (Boundary Layer)

➤ نخست باید مقدار dP/dx با فرض جریان غیرچرخشی (در خارج از لایه مرزی) محاسبه شود، سپس توزیع سرعت در داخل لایه مرزی قابل محاسبه می‌باشد.

➤ **حالت نخست:** تشکیل لایه مرزی روی اجسام صاف ($dP/dx=0$)



B.C.1: at A & A',
 $y = 0: U = 0$

B.C.2: at B:
 $y = \delta_1: U = U_\infty$

B.C.3: at B':
 $y = \delta_2: U = U_\infty$

لایه مرزی (Boundary Layer)

➤ اثر صفحه مسطح این است که سرعت سیال را در نقطه تماس (با شرط No Slip) صفر می‌کند، اما با افزایش فاصله در راستای y سرعت افزایش می‌یابد و در نقطه‌ای (مرز لایه مرزی) به بیشینه اندازه اش (معادل U_∞) می‌رسد.

➤ هر چه فاصله از ابتدای صفحه بیشتر می‌شود ضخامت لایه مرزی نیز افزایش می‌یابد.

$$\delta = \delta(x) \quad \& \quad \delta_2 > \delta_1$$

لایه مرزی (Boundary Layer)

نکته ➤

$$C_{D, \text{Laminar}} > C_{D, \text{Turbulent}} \quad \checkmark$$

علت: ➤

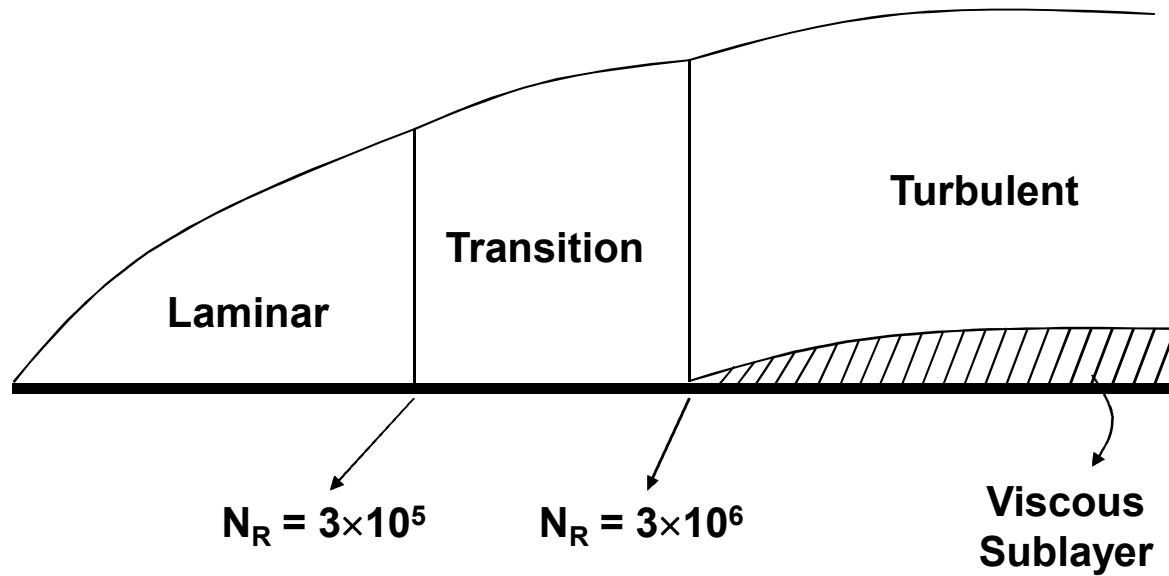
✓ در جریان آشفته با توجه به تعریف عدد رینولدز ($N_R = U_\infty X / \nu$) ملاحظه می شود که با افزایش فاصله (X) مقدار N_R افزایش می یابد. همچنین با افزایش N_R مقدار ضریب نیروی دراگ (C_D) کاهش می یابد.

✓ در نتیجه نیروی دراگ (بازدارنده) که موجب گرادیان سرعت می شود کاهش می یابد و این موجب افزایش ضخامت لایه مرزی می شود.

➤ این استدلال برای انتقال از جریان آرام به جریان آشفته نیز درست می باشد.

لایه مرزی (Boundary Layer)

➤ به عبارت دیگر با افزایش فاصله انتقال از لایه مرزی آرام به لایه مرزی آشفته نیز صورت می‌گیرد. در نتیجه ضخامت لایه مرزی آشفته بیشتر از ضخامت لایه مرزی آرام می‌باشد.



حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

۱. روش Prandtl-Blasius

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

معادله پیوستگی

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial U_x}{\partial y} =$$

معادله حرکت در راستای x:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right)$$

$$U_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} =$$

معادله حرکت در راستای y:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) - g$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

فرض: ➤

پرانتل از روش Order of Magnitude استفاده کرده است. ➤

$$U_x \gg V_y$$

$$x \gg y$$

$$U_x \& x \cong 1$$

$$V_y \& y \cong 0$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g$$

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

روی صفحات مسطح از تغییرات شتاب جاذبه صرف نظر می‌شود. ➤

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{p_\infty}{\gamma} + \frac{U_\infty^2}{2g} = cte \Rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{dp_\infty}{dx} + \frac{U_\infty}{g} \frac{dU_\infty}{dx} = 0$$

رابطه برنولی: ➤

$$\frac{dU_\infty}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dp_\infty}{dx} = 0$$

بیرون لایه مرزی: ➤

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

تغییرات فشار خارج از لایه مرزی با تغییرات فشار داخل لایه مرزی یکسان است. ➤

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0$$

$$B.C.1: y = 0 : U_x = V_y = 0$$

$$B.C.2: y \geq \delta: U_x = U_\infty$$

تابع جریان در معادله پیوستگی صادق است. ➤

$$U_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

نکته: ➤

استفاده از تابع جریان باعث حذف معادله پیوستگی می شود. ✓

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ معادله حرکت:

$$\Rightarrow -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

➤ برای حل این معادله به کار گیری اعداد بدون بعد به شکل زیر پیشنهاد شده است:

$$z = y \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} = \frac{y}{x} N_R^{0.5}$$

$$H(z) = \frac{U_x}{U_\infty} \Rightarrow U_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty H(z)$$

$$\Rightarrow \psi = -\int U_\infty H(z) dy + G(x)$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

نکته: ➤

✓ در هر خط جریان مقدار تابع جریان ثابت می باشد.

$$B.C.1: at y = 0 : U_x = 0$$

$$\Rightarrow at z = 0 : H(z) = 0 \Rightarrow \psi|_{y=0} = G(x)$$

➤ در $y=0$ یک خط جریان وجود دارد، بنابراین مقدار $G(x)$ تابع x نمی باشد. به منظور سادگی مقدار ثابت $G(x)$ معادل صفر در نظر گرفته می شود.

$$\Rightarrow \psi = -\int U_{\infty} H(z) dy$$

$$H(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$dz = \left(\frac{U_\infty}{vx} \right)^{0.5} dy \Rightarrow dy = \left(\frac{vx}{U_\infty} \right)^{0.5} dz$$

$$\psi = -\int U_\infty \frac{df(z)}{dz} \left(\frac{vx}{U_\infty} \right)^{0.5} dz = -(U_\infty vx)^{0.5} f(z)$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ به منظور جایگزینی در معادله حرکت عبارت مورد نیاز باید تعیین شود:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = -(U_{\infty} \nu x)^{0.5} f'(z) \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x} \right)^{0.5} = -U_{\infty} f'(z)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \left(\frac{U_{\infty}}{\nu} \right)^{0.5} (-0.5 x^{-1.5}) = -0.5 y \frac{1}{x} \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x} \right)^{0.5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -0.5 \frac{z}{x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-U_{\infty} f'(z)) = -U_{\infty} \frac{\partial f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -U_\infty f''(z) \left(-0.5 \frac{z}{x} \right) = 0.5 U_\infty \frac{z}{x} f''(z)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- (U_\infty \nu x)^{0.5} f(z) \right) = - (U_\infty \nu)^{0.5} (0.5 x^{-0.5}) f(z)$$

$$- (U_\infty \nu x)^{0.5} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -0.5 \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{0.5} f(z)$$

$$+ 0.5 \frac{z}{x} (U_\infty \nu x)^{0.5} f'(z) = 0.5 \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{0.5} (z f'(z) - f(z))$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-U_\infty f'(z) \right) = -U_\infty \frac{\partial f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -U_\infty f''(z) \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-U_\infty f''(z) \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} \right)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = -U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} f'''(z) \frac{\partial z}{\partial y} = -U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} f'''(z) \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = -U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right) f'''(z)$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

حال کلیه عبارتها را داخل معادله حرکت جایگزین می کنیم:

$$0.5U_{\infty}f' \frac{U_{\infty}z}{x} f'' - 0.5 \left(\frac{U_{\infty}v}{x} \right)^{0.5} (zf' - f) U_{\infty} f'' \left(\frac{U_{\infty}}{vx} \right)^{0.5}$$

$$= -\frac{U_{\infty}^2}{x} f'''$$

$$0.5 \frac{U_{\infty}^2 z}{x} f f'' - 0.5 \frac{U_{\infty}^2 z}{x} f f'' + 0.5 \frac{U_{\infty}^2}{x} f f'' = -\frac{U_{\infty}^2}{x} f'''$$

$$0.5 \frac{U_{\infty}^2}{x} f f'' + \frac{U_{\infty}^2}{x} f''' = 0 \Rightarrow f''' + 0.5 f f'' = 0$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

با نوشتن شرایط مرزی

$$y = 0 \rightarrow z = 0 \Rightarrow \begin{cases} U_x = 0 \rightarrow f' = 0 \\ V_y = 0 \rightarrow f = 0 \end{cases}$$

$$y = \delta \rightarrow z = \frac{\delta}{x} N_R^{0.5} : U_x = U_\infty \rightarrow f' = 1$$

$$U_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -(-U_\infty f') = U_\infty f'$$

$$V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.5 \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{0.5} (zf' - f)$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ جواب معادله فوق به صورت زیر ارائه شده است:

$$f = A_0 + A_1 Z + \frac{A_2}{2!} Z^2 + \dots + \frac{A_n}{n!} Z^n$$

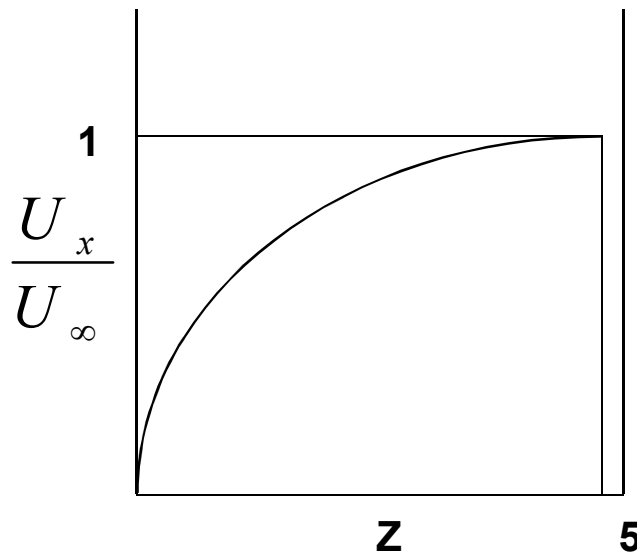
➤ با استفاده از نرم افزارهای محاسباتی می توان نوشت:

$$f = 0.166603Z^2 - 4.59 \times 10^{-4} Z^5 + 2.49 \times 10^{-6} Z^8 + \dots$$

$$\frac{U_x}{U_\infty} = f' = 0.333206Z - 2.295 \times 10^{-3} Z^4 + 1.992 \times 10^{-5} Z^7$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

شکل نموداری مولفه سرعت در راستای X به صورت زیر می باشد:



$$Z = 5 = \frac{y}{x} N_R^{0.5}$$

$$\frac{U_x}{U_\infty} = 1 \Rightarrow y = \delta$$

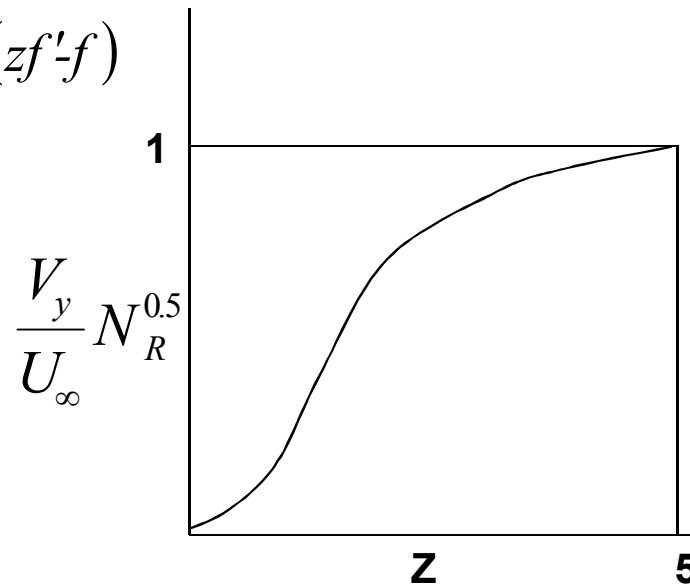
$$\Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5}{N_R^{0.5}}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ شکل نموداری مولفه سرعت در راستای y به صورت زیر می باشد:

$$V_y = 0.5 \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{0.5} (zf' - f)$$

$$\Rightarrow \frac{V_y}{U_\infty} \text{Re}^{0.5} = 0.5(zf' - f)$$



$$\frac{V_y}{U_\infty} N_R^{0.5} = 1$$

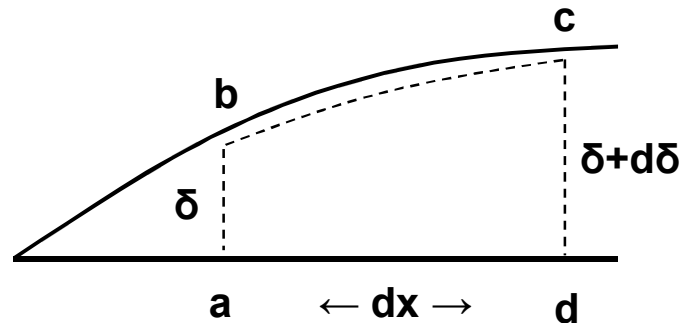
$$\Rightarrow \frac{V_y}{U_\infty} = \frac{1}{N_R^{0.5}}$$

تمرین ۱:

➤ مقادیر $\overline{C_D}$ ، C_D و τ_{0y} را برای یک صفحه تخت، محاسبه نمایید.

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

۲. در روش Von Karman برای یک المان در داخل لایه مرزی موازنه جرم و اندازه حرکت نوشته می شود:



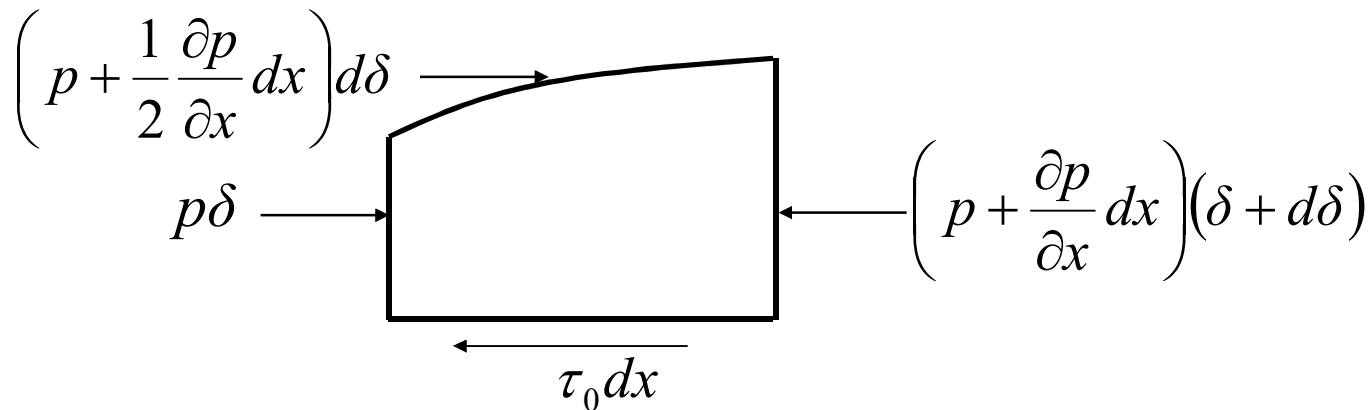
عرض صفحه واحد در نظر گرفته می شود:

$$\dot{m}_{ab} = \int_0^{\delta} \rho U_x dy$$

$$\dot{m}_{cd} = \int_0^{\delta} \rho U_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho U_x dy \right) dx$$

$$\dot{m}_{bc} = \dot{m}_{cd} - \dot{m}_{ab} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho U_x dy \right) dx$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)



$$\sum F_x = p\delta + p d\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta - p\delta - p d\delta - \frac{\partial p}{\partial x} dx \delta$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta - \tau_0 dx = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta - \frac{\partial p}{\partial x} dx \delta - \tau_0 dx$$

$$dx d\delta \ll dx \delta \Rightarrow \sum F_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \delta + \tau_0 \right) dx$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$F \dot{m}_{ab} = \int_0^\delta \rho U_x^2 dy \quad (in)$$

$$F \dot{m}_{cd} = \int_0^\delta \rho U_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho U_x^2 dy \right) dx \quad (out)$$

$$F \dot{m}_{bc} = U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho U_x dy \right) dx \quad (in)$$

$$\sum F = momentum_{out} - momentum_{in} \quad \text{معادله حرکت: } \blacktriangleright$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \delta + \tau_o \right) dx = \left[U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho U_x dy \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho U_x^2 dy \right) \right] dx$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{صفحه مسطح: } \blacktriangleright$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

برای سطح صاف می توان نوشت:

$$\Rightarrow \tau_0 = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho U_x U_{\infty} dy - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho U_x^2 dy$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho U_{\infty}^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \frac{U_x}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{U_x}{U_{\infty}} \right) dy$$

↓
Q: Momentum thickness

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ در حالت کلی حل معادله Von Karman به شکل زیر است:

$$\tau_0 = \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(U_\infty^2 \int_0^{\delta} \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right) dy \right) + U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right) dy \right]$$

↓
Q

↓
 δ^* : Displacement Thickness

➤ نکته:

✓ عبارت دوم سمت راست به اختلاف فشار موجود در صفحه غیرمسطح مربوط می شود.

➤ مفاهیم فیزیکی Q & δ^*

۱. Displacement thickness (δ^*)

بیان کننده تأثیر جسم جامد در کاهش دبی جرمی سیال است.

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

دبی جرمی سیال در حالتی که جسم جامد وجود ندارد:

$$\int_0^{\delta} \rho U_{\infty} dy = \rho U_{\infty} \delta$$

دبی جرمی سیال در حالتی که جسم جامد وجود دارد:

$$\int_0^{\delta} \rho U dy$$

میزان کاهش دبی جرمی سیال به علت وجود جسم جامد:

$$\int_0^{\delta} \rho (U_{\infty} - U) dy$$

δ^* معادل ضخامتی از لایه مرزی است که در آن دبی جرمی سیال معادل میزان کاهش دبی جرمی سیال (بعلت وجود جسم جامد) می باشد.

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$\rho U_{\infty} \delta^* = \int_0^{\delta} \rho (U_{\infty} - U) dy$$

$$\Rightarrow \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{U}{U_{\infty}} \right) dy$$

➤ به عبارت دیگر دبی جرمی سیال در اثر حضور جسم جامد کاهش می‌یابد گویی سیال از پهنای کمتری عبور می‌کند ($\delta - \delta^*$).

۲. Momentum Thickness (Q)

➤ وجود جسم جامد تاثیر مشابهی در کاهش میزان اندازه حرکت سیال در حال عبور از روی یک جسم جامد دارد.

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ هرگاه کاهش دبی جرمی سیال معادل $\int_0^\delta \rho(U_\infty - U) dy$ باشد، میزان کاهش اندازه حرکت سیال معادل $\int_0^\delta U \rho(U_\infty - U) dy$ می باشد.

➤ Q معادل ضخامتی از لایه مرزی است که در آن مقدار اندازه حرکت سیال معادل مقدار کاهش اندازه حرکت سیال (به علت وجود جسم جامد) می باشد.

$$\rho U_\infty^2 Q = \int_0^\delta U \delta(U_\infty - U) dy$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^\delta \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right) dy$$

➤ به عبارت دیگر اگر جسم جامد برداشته شود، باید به اندازه Q از لایه مرزی کم شود تا مقدار اندازه حرکت بدون تغییر باقی بماند.

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$\tau_o = \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (U_\infty^2 Q) + U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \delta^* \right)$$

$$\frac{dU_\infty}{dx} = 0$$

در مورد اجسام مسطح: ➤

$$\frac{dU_\infty}{dx} \neq 0$$

در مورد اجسام غیرمسطح (و در داخل لوله‌ها) ➤

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp_\infty}{dx} = - \frac{U_\infty}{g} \frac{dU_\infty}{dx}$$

با استفاده از رابطه برنولی می‌توان نوشت: ➤

تمرین ۲:

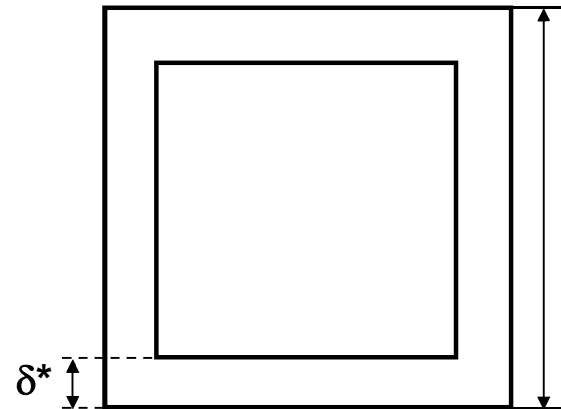
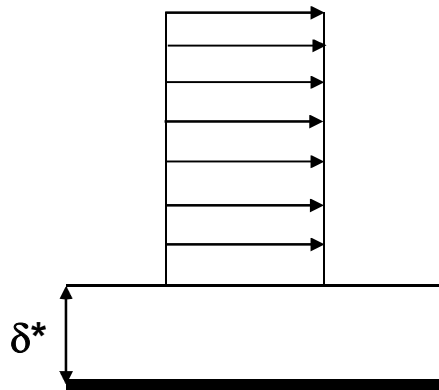
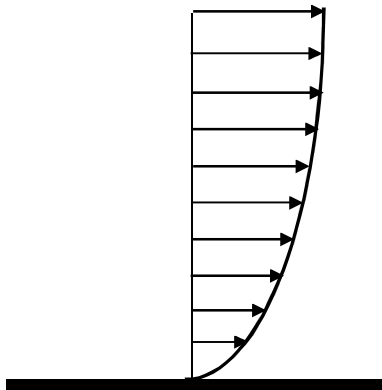
➤ مطلوب است محاسبه تغییرات فشار (بدون بعد) در داخل تونل هوا با مقطع

مستطیل. ویژگیهای جریان و کانال به صورت زیر می باشد:

$$A = L \times L = (305)^2 \text{ mm}^2$$

$$U_{\infty 1} = 26 \text{ m/s}, \delta_1^* = 1.5 \text{ mm} \quad \text{مقطع ۱}$$

$$U_{\infty 2} = ?, \delta_2^* = 2.1 \text{ mm} \quad \text{مقطع ۲}$$



حل معادله Von Karman

➤ به منظور حل معادله Von Karman نیاز به یک معادله توزیع سرعت سیال می باشد.

➤ ابتدا توزیع سرعت به صورت چند جمله ای درجه دوم در نظر گرفته می شود:

$$U_x = a + by + cy^2$$

➤ با توجه به سه ثابت معادله مفروض، نیاز به سه شرط مرزی می باشد:

$$B.C.1: y = 0 : U_x = 0$$

$$B.C.2: y = \delta : U_x = U_\infty$$

$$B.C.3: y = \delta : \frac{\partial U_x}{\partial y} = 0$$

حل معادله Von Karman

$$\Rightarrow \frac{U_x}{U_\infty} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

➤ حال این توزیع سرعت در معادله Von Karman قرار داده می شود:

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{dU_x}{dy} \right|_{y=0} = 2\mu \frac{U_\infty}{\delta}$$

$$2\mu \frac{U_\infty}{\delta} = \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \left(2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right) \left(1 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right) dy \right)$$

$$2\mu \frac{U_\infty}{\delta} = \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta - \frac{5}{3}\delta + \delta - \frac{1}{5}\delta \right) = \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{15}\delta \right)$$

حل معادله Von Karman

$$2\mu \frac{U_\infty}{\delta} = \delta U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{15} \delta \right) \Rightarrow \frac{15\mu}{\rho U_\infty} dx = \delta d\delta$$

$$\frac{15\mu}{\rho U_\infty} x = \frac{1}{2} \delta^2 + A$$

$$B.C : \text{at } x=0 : \delta=0 \Rightarrow A=0$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2}{x^2} = \frac{30}{\frac{\rho U_\infty x}{\mu}} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5.5}{N_R^{0.5}}$$

این مقدار ۱۰٪ از مقدار بدست آمده قبلی بیشتر است. ➤

حل معادله Von Karman

$$C_D = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{2\mu \frac{U_\infty}{\delta}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{4\mu}{\rho U_\infty \delta} = \frac{4\mu}{\rho U_\infty x} \frac{x}{\delta}$$

$$C_D = \frac{4}{N_R} \frac{N_R^{0.5}}{5.5} = \frac{0.73}{N_R^{0.5}}$$

حل معادله Von Karman

➤ اگر تابع توزیع سرعت درجه سوم در نظر گرفته شود، می توان نوشت:

$$U_x = a + by + cy^2 + dy^3$$

➤ در این صورت افزون بر سه شرط مرزی پیشین، به یک شرط مرزی دیگر نیز نیاز می باشد:

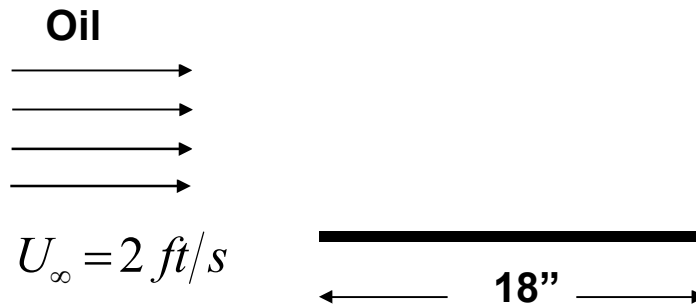
$$B.C.4: y = 0: \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{U_x}{U_\infty} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.6}{N_R^{0.5}} \quad C_D = \frac{0.65}{N_R^{0.5}}$$

تمرین ۳:

➤ مطلوب است محاسبه ضخامت لایه مرزی و نیروی دراگ وارد بر صفحه مسطح.



$$Sp. Gr. = 0.925$$

$$w = 6''$$

$$\nu = 0.001 \text{ ft}^2/\text{s}$$

تعیین ضخامت لایه مرزی جریان آشفته:

➤ برای تعیین ضخامت لایه مرزی در جریان آشفته، از معادله Von Karman استفاده می‌شود. در این حالت می‌توان از معادله توزیع سرعت سیال در داخل لوله‌ها استفاده کرد.

$$\frac{U_x}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}$$


➤ نکته:

✓ شیب این منحنی در نقطه تماس سیال با سطح جامد قابل محاسبه نمی‌باشد.

$$\frac{dU_x}{dy} = \frac{U_\infty}{7\delta^{\frac{1}{7}}y^{\frac{6}{7}}}$$

$$\left. \frac{dU_x}{dy} \right|_{y=0} \cong \text{نامعین}$$

تعیین ضخامت لایه مرزی جریان آشفته:

بنابراین به منظور محاسبه τ_0 از روابط تجربی استفاده می شود: 

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho \overline{U_x^2}, \quad f = \frac{0.316}{N_R^{0.25}}, \quad N_R = \frac{D \overline{U_x} \rho}{\mu} = \frac{2\delta \overline{U_x} \rho}{\mu}$$

$$\overline{U_x} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta U_x dy = 0.817 U_\infty$$

$$\Rightarrow \tau_0 = 0.0225 \rho U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta} \right)^{0.25}$$

$$\tau_0 = \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \frac{U_x}{U_\infty} \left(1 - \frac{U_x}{U_\infty} \right) dy \right)$$

تمرین ۴:

➤ مطلوب است محاسبه C_D و $\overline{C_D}$ در جریان آشفته بر روی یک صفحه تخت.
➤ حل:

$$\begin{aligned} F_D &= \int_0^L \tau_0 dx = \int_0^L 0.0225 \rho U_\infty^2 \left(\frac{v}{U_\infty \delta} \right)^{0.25} dx \\ &= 0.0225 \rho U_\infty^2 \left(\frac{v}{U_\infty} \right)^{0.25} \int_0^L \left(\frac{N_R^{0.2}}{0.37x} \right)^{0.25} dx \\ &= 0.0288 \rho U_\infty^2 \left(\frac{v}{U_\infty} \right)^{0.25} \left(\frac{U_\infty}{v} \right)^{0.05} \int_0^L x^{-0.2} dx \\ &= 0.0288 \rho U_\infty^2 \left(\frac{v}{U_\infty} \right)^{0.2} (1.25L^{0.8}) \end{aligned}$$

تصحیح رابطه ضریب نیروی دراگ

➤ Schlichting برای جریان آشفته رابطه تجربی زیر را پیشنهاد کرده است:

➤ نکته:

✓ همانطوریکه اشاره شد، فرض تشکیل لایه مرزی آشفته از ابتدای صفحه درست نمی باشد و در عمل لایه مرزی آرام ابتدا شکل می گیرد و سپس به لایه مرزی آشفته تبدیل می شود. انتقال از لایه مرزی آرام و لایه مرزی آشفته به N_R بستگی دارد.

➤ انتقال (Transition) برای صفحه مسطح در محدوده $3 \times 10^5 < N_{R,L}^* < 3 \times 10^6$ روی می دهد.

تصحیح رابطه ضریب نیروی دراگ

➤ وجود لایه مرزی آرام در ابتدای صفحه سبب افزایش نیروی دراگ می شود، زیرا:

$$C_{D, \text{Laminar}} > C_{D, \text{Turbulent}}$$

➤ به منظور اصلاح رابطه ابتدا باید نیروی دراگ از ابتدای صفحه تا نقطه بحرانی (L^*) را از کل نیروی دراگ کم و سپس مقدار معادل آن (حاصل از لایه مرزی آرام) را به کل نیروی دراگ اضافه کرد.

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{0.074}{N_{R,L^*}^{0.2}} + \frac{1.332}{N_{R,L^*}^{0.5}}$$

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \left(\frac{0.074}{N_{R,L^*}^{0.2}} - \frac{1.332}{N_{R,L^*}^{0.5}} \right)$$

تصحیح رابطه ضریب نیروی دراگ

$$\Rightarrow \overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{A}{N_{R,L}}$$

| | | | | |
|--------------------|-------------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| A | ۱۰۵۰ | ۱۷۰۰ | ۳۳۰۰ | ۸۷۰۰ |
| N _{R,L} * | ۳*۱۰ ^۵ | ۵*۱۰ ^۵ | ۱۰ ^۶ | ۳*۱۰ ^۶ |

اثبات:

$$\overline{C_D} = \frac{F_D}{(1/2)\rho U_\infty^2 L}$$

$$= \frac{1}{\rho U_\infty^2 L} \left(\frac{0.074 \rho U_\infty^2 L}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{0.074 \rho U_\infty^2 L^*}{N_{R,L}^{0.2}} + \frac{1.332 \rho U_\infty^2 L}{N_{R,L}^{0.5}} \right)$$

$$= \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \left(\frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{1.332}{N_{R,L}^{0.5}} \right) \frac{L^* A}{L N}$$

| | | | | |
|--|------|------|------|------|
| | ۱۰۵۰ | ۱۷۰۰ | ۳۳۰۰ | ۸۷۰۰ |
| | ۳.۰۰ | ۵.۰۰ | ۱.۰۰ | ۳.۰۰ |
| | E+05 | E+05 | E+06 | E+06 |

E-۲.۴۴ E-۱.۹۶ E-۱.۲۷ E-۸.۴۸

تصحیح رابطه ضریب نیروی دراگ

$$\frac{L^*}{L} = \frac{N_{R,L^*}}{N_{R,L}} \Rightarrow \overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{1}{N_R^{0.2}} \left(0.074 N_{R,L}^{0.8} - 1.332 N_{R,L}^{0.5} \right)$$

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{A}{N_{R,L}}$$

این رابطه در محدوده زیر صادق می باشد: ➤

$$5 \times 10^5 < N_R < 10^7$$

Schlichting رابطه تجربی زیر را نیز برای محاسبه ضریب نیروی دراگ در محدوده $N_{R,L} > 10^7$ پیشنهاد کرده است: ➤

$$\overline{C_D} = \frac{0.455}{(\log N_{R,L})^{2.58}}$$

تصحیح رابطه ضریب نیروی دراگ

مجدداً به منظور در نظر گرفتن تشکیل لایه مرزی آرام در ابتدای صفحه باید رابطه Schlichting – Prandtl مورد استفاده قرار گیرد:

$$\overline{C_D} = \frac{0.455}{(\log N_{R,L})^{2.58}} - \frac{A}{N_{R,L}}, \text{ where } N_{R,L} < 10^9$$

تمرین ۵:

➤ بررسی جریان آب بر روی یک صفحه صاف در جریان آشفته و تعیین ضریب نیروی دراگ

$$A = 1 \times 1 \text{ ft}^2$$

$$U_\infty = 50 \text{ ft/s}, \quad \nu = 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}, \quad \rho = 1.94 \text{ slug/ft}^3$$

$$N_{R,L^*} = 5 \times 10^5, \quad L^*, \quad F_D, \quad \overline{C_D}, \quad \overline{F_{D_{Laminar}}}$$

$$N_{R,L^*} = \frac{50 \times 1}{10^{-5}} = 5 \times 10^6$$

➤ حل:

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{1700}{N_{R,L}} = 0.003$$

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho U_\infty^2 A = 7.40 \text{ lbf}$$

تمرین ۶:

➤ بررسی حرکت هواپیما در جریان آشفته و تعیین توان مورد نیاز آن (با توجه به اطلاعات داده شده).

$$L = 785 \text{ ft}$$

$$D = 132 \text{ ft}, U_{\infty} = 123 \text{ ft/s}$$

$$\rho = 0.0017 \text{ slug/ft}^3, \mu = 3.7 \times 10^{-7} \text{ lbf.s/ft}^2$$

$$N_{R,L} = \frac{0.0017 \times 123 \times 785}{3.7 \times 10^{-7}} = 4.4 \times 10^8$$

$$\overline{C_D} = \frac{0.455}{(\log N_{R,L})^{2.58}} - \frac{1700}{N_{R,L}} = 0.0017$$



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ معادله حرکت در داخل لایه مرزی را به روش Prandtl-Blasius حل نماید.

➤ هنگامی که جسمی در داخل سیالی حرکت می کند و زمانی که سیالی بر روی جسمی حرکت می کند، از سوی سیال نیروهایی به آن وارد می شوند که حرکت جسم را تحت تأثیر قرار می دهند. از مهمترین این نیروها، نیروهای لیفت و دراگ می باشند که در دانش مکانیک سیالات از طریق تعیین ضرایب لیفت و دراگ محاسبه می شوند. تعیین هر کدام از این نیروها مستلزم دانستن چگونگی توزیع سرعت سیال در داخل لایه مرزی است (که خود تابع فرضهای ساده کننده ای می باشند که در هنگام حل معادلات به کار گرفته می شوند) که با داشتن آن می توان ضرایب نیروی دراگ و لیفت را تعیین نمود.

کاربرد



کاربرد



لایه مرزی (Boundary Layer)

➤ برای نخستین بار پرانتل در سال ۱۹۴۰ نشان داد که در بیشتر جریانهای ویسکوز دو ناحیه متمایز وجود دارد:

۱. ناحیه‌ای نزدیک به سطح جامد که در آن اثرات ویسکوزیته مشاهده می‌شود.

۲. ناحیه‌ای که در آن اثرات ویسکوزیته مشاهده نمی‌شود.

➤ سیال در ناحیه اول (لایه مرزی) ویسکوز در نظر گرفته می‌شود، در حالیکه در ناحیه دوم غیرویسکوز فرض می‌شود.

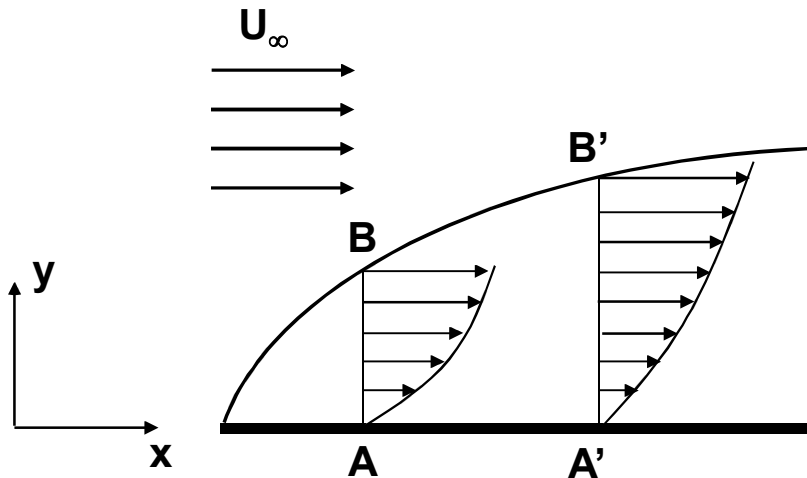
➤ **نکته:**

✓ در ناحیه‌ای که گرادیان سرعت زیاد باشد، از اثرات ویسکوزیته نمی‌توان صرف نظر نمود.

لایه مرزی (Boundary Layer)

➤ نخست باید مقدار dP/dx با فرض جریان غیرچرخشی (در خارج از لایه مرزی) محاسبه شود، سپس توزیع سرعت در داخل لایه مرزی قابل محاسبه می‌باشد.

➤ تشکیل لایه مرزی روی اجسام صاف ($dP/dx=0$)



B.C.1: at A & A',
 $y = 0: U = 0$

B.C.2: at B:
 $y = \delta_1: U = U_\infty$

B.C.3: at B':
 $y = \delta_2: U = U_\infty$

لایه مرزی (Boundary Layer)

➤ اثر صفحه مسطح این است که سرعت سیال را در نقطه تماس (با شرط No Slip) صفر می کند، اما با افزایش فاصله در راستای y سرعت افزایش می یابد و در نقطه ای (مرز لایه مرزی) به بیشینه اندازه اش (معادل U_∞) می رسد.

➤ هر چه فاصله از ابتدای صفحه بیشتر می شود ضخامت لایه مرزی نیز افزایش می یابد.

$$\delta = \delta(x) \quad \& \quad \delta_2 > \delta_1$$

لایه مرزی (Boundary Layer)

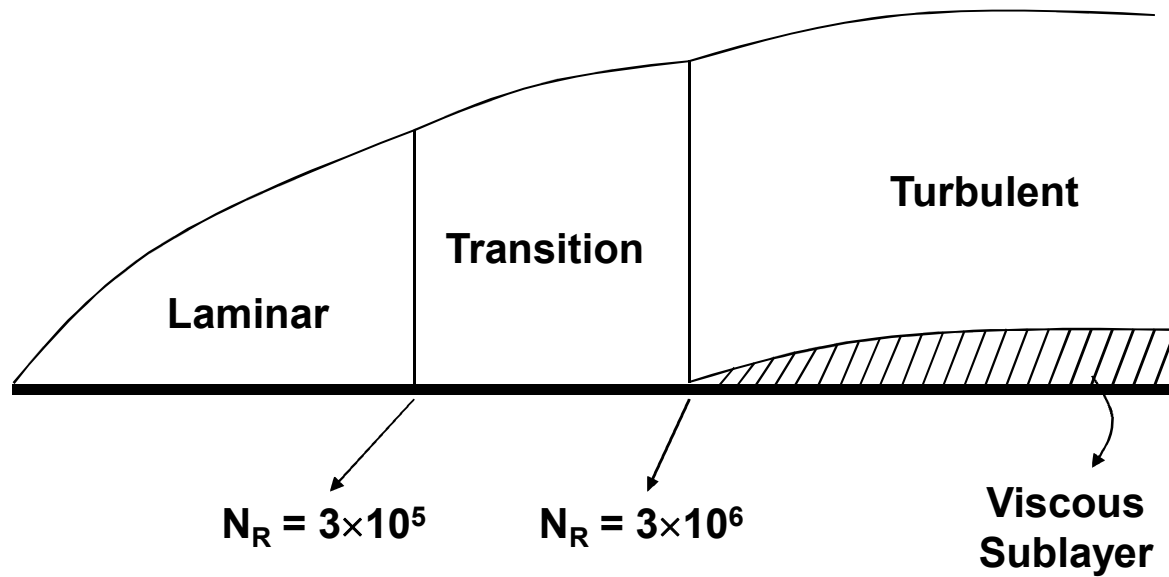
پرسش:




$$C_{D, \text{Laminar}} > C_{D, \text{Turbulent}} \quad \checkmark$$

لایه مرزی (Boundary Layer)

➤ به عبارت دیگر با افزایش فاصله انتقال از لایه مرزی آرام به لایه مرزی آشفته نیز صورت می‌گیرد. در نتیجه ضخامت لایه مرزی آشفته بیشتر از ضخامت لایه مرزی آرام می‌باشد.



حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

روش Prandtl-Blasius 

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

معادله پیوستگی

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial U_x}{\partial y} =$$

معادله حرکت در راستای x:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right)$$

$$U_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} =$$

معادله حرکت در راستای y:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) - g$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

فرض: ➤

پرانتل از روش Order of Magnitude استفاده کرده است. ➤

$$U_x \gg V_y$$

$$x \gg y$$

$$U_x \& x \cong 1$$

$$V_y \& y \cong 0$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g$$

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

روی صفحات مسطح از تغییرات شتاب جاذبه صرف نظر می شود.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{p_\infty}{\gamma} + \frac{U_\infty^2}{2g} = cte \Rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{dp_\infty}{dx} + \frac{U_\infty}{g} \frac{dU_\infty}{dx} = 0$$

رابطه برنولی:

$$\frac{dU_\infty}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dp_\infty}{dx} = 0$$

بیرون لایه مرزی:

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

تغییرات فشار خارج از لایه مرزی با تغییرات فشار داخل لایه مرزی یکسان است. ➤

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0$$

$$B.C.1: y = 0 : U_x = V_y = 0$$

$$B.C.2: y \geq \delta: U_x = U_\infty$$

تابع جریان در معادله پیوستگی صادق است. ➤

$$U_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

نکته: ➤

استفاده از تابع جریان باعث حذف معادله پیوستگی می شود. ✓

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ معادله حرکت:

$$\Rightarrow -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

➤ برای حل این معادله به کار گیری اعداد بدون بعد به شکل زیر پیشنهاد شده است:

$$z = y \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} = \frac{y}{x} N_R^{0.5}$$

$$H(z) = \frac{U_x}{U_\infty} \Rightarrow U_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty H(z)$$

$$\Rightarrow \psi = -\int U_\infty H(z) dy + G(x)$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

نکته: ➤

✓ در هر خط جریان مقدار تابع جریان ثابت می باشد.

$$B.C.1: at y = 0 : U_x = 0$$

$$\Rightarrow at z = 0 : H(z) = 0 \Rightarrow \psi|_{y=0} = G(x)$$

➤ در $y=0$ یک خط جریان وجود دارد، بنابراین مقدار $G(x)$ تابع x نمی باشد. به منظور سادگی مقدار ثابت $G(x)$ معادل صفر در نظر گرفته می شود.

$$\Rightarrow \psi = -\int U_{\infty} H(z) dy$$

$$H(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$dz = \left(\frac{U_\infty}{vx} \right)^{0.5} dy \Rightarrow dy = \left(\frac{vx}{U_\infty} \right)^{0.5} dz$$

$$\psi = -\int U_\infty \frac{df(z)}{dz} \left(\frac{vx}{U_\infty} \right)^{0.5} dz = -(U_\infty vx)^{0.5} f(z)$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ به منظور جایگزینی در معادله حرکت عبارت مورد نیاز باید تعیین شود:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = -(U_{\infty} vx)^{0.5} f'(z) \left(\frac{U_{\infty}}{vx} \right)^{0.5} = -U_{\infty} f'(z)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \left(\frac{U_{\infty}}{v} \right)^{0.5} (-0.5x^{-1.5}) = -0.5y \frac{1}{x} \left(\frac{U_{\infty}}{vx} \right)^{0.5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -0.5 \frac{z}{x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-U_{\infty} f'(z)) = -U_{\infty} \frac{\partial f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -U_\infty f''(z) \left(-0.5 \frac{z}{x} \right) = 0.5 U_\infty \frac{z}{x} f''(z)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- (U_\infty \nu x)^{0.5} f(z) \right) = - (U_\infty \nu)^{0.5} (0.5 x^{-0.5}) f(z)$$

$$- (U_\infty \nu x)^{0.5} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -0.5 \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{0.5} f(z)$$

$$+ 0.5 \frac{z}{x} (U_\infty \nu x)^{0.5} f'(z) = 0.5 \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{0.5} (z f'(z) - f(z))$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-U_\infty f'(z) \right) = -U_\infty \frac{\partial f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -U_\infty f''(z) \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-U_\infty f''(z) \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} \right)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = -U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} f'''(z) \frac{\partial z}{\partial y} = -U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} f'''(z) \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = -U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right) f'''(z)$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

حال کلیه عبارتها را داخل معادله حرکت جایگزین می کنیم:

$$0.5U_{\infty}f' \frac{U_{\infty}z}{x} f'' - 0.5 \left(\frac{U_{\infty}v}{x} \right)^{0.5} (zf' - f) U_{\infty} f'' \left(\frac{U_{\infty}}{vx} \right)^{0.5}$$

$$= -\frac{U_{\infty}^2}{x} f'''$$

$$0.5 \frac{U_{\infty}^2 z}{x} f f'' - 0.5 \frac{U_{\infty}^2 z}{x} f f'' + 0.5 \frac{U_{\infty}^2}{x} f f'' = -\frac{U_{\infty}^2}{x} f'''$$

$$0.5 \frac{U_{\infty}^2}{x} f f'' + \frac{U_{\infty}^2}{x} f''' = 0 \Rightarrow f''' + 0.5 f f'' = 0$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

با نوشتن شرایط مرزی

$$y = 0 \rightarrow z = 0 \Rightarrow \begin{cases} U_x = 0 \rightarrow f' = 0 \\ V_y = 0 \rightarrow f = 0 \end{cases}$$

$$y = \delta \rightarrow z = \frac{\delta}{x} N_R^{0.5} : U_x = U_\infty \rightarrow f' = 1$$

$$U_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -(-U_\infty f') = U_\infty f'$$

$$V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.5 \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{0.5} (zf' - f)$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ جواب معادله فوق به صورت زیر ارائه شده است:

$$f = A_0 + A_1 Z + \frac{A_2}{2!} Z^2 + \dots + \frac{A_n}{n!} Z^n$$

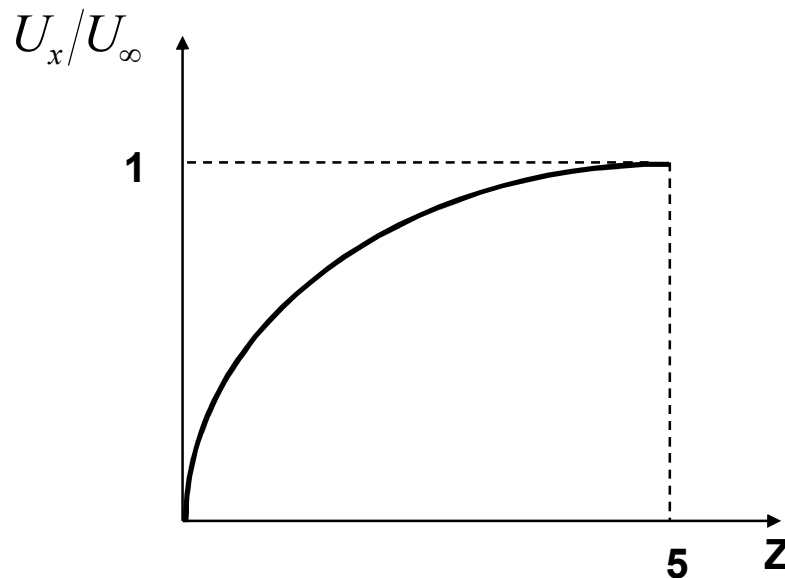
➤ با استفاده از نرم افزارهای محاسباتی می توان نوشت:

$$f = 0.166603Z^2 - 4.59 \times 10^{-4} Z^5 + 2.49 \times 10^{-6} Z^8 + \dots$$

$$\frac{U_x}{U_\infty} = f' = 0.333206Z - 2.295 \times 10^{-3} Z^4 + 1.992 \times 10^{-5} Z^7$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

شکل نموداری مولفه سرعت در راستای X به صورت زیر می باشد:



$$Z = 5 = \frac{y}{x} N_R^{0.5}$$

$$\frac{U_x}{U_\infty} = 1 \Rightarrow y = \delta$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5}{N_R^{0.5}}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$V_y = 0.5 \left(\frac{U_\infty v}{x} \right)^{0.5} (zf' - f)$$

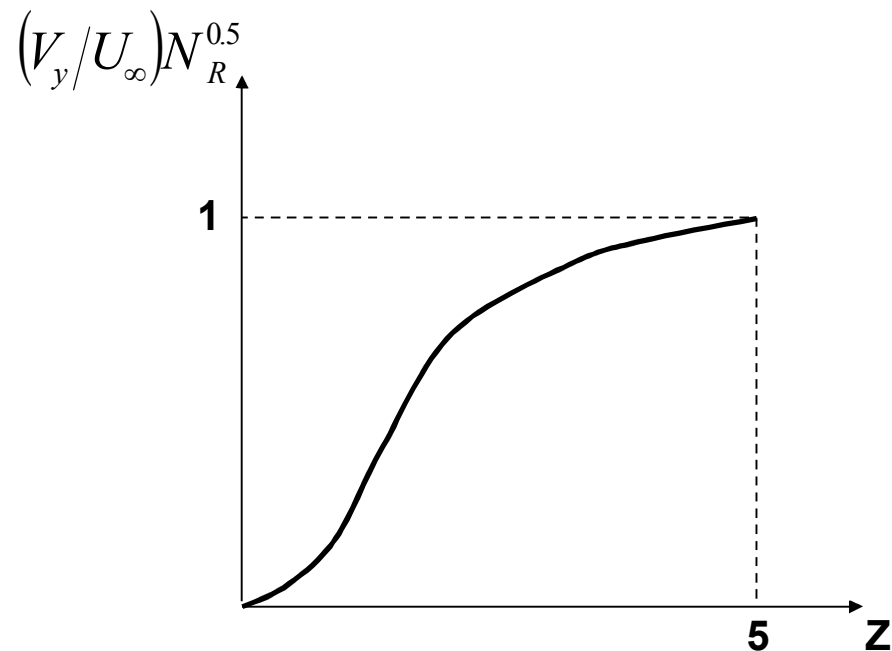
$$\Rightarrow \frac{V_y}{U_\infty} N_R^{0.5} = 0.5(zf' - f)$$

$$\frac{V_y}{U_\infty} N_R^{0.5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{V_y}{U_\infty} = \frac{1}{N_R^{0.5}}$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ شکل نموداری مولفه سرعت در راستای y به صورت زیر می باشد:



تمرین ۱:

➤ مقادیر $\overline{C_D}$ ، C_D و τ_{0y} را برای یک صفحه تخت، محاسبه نمایید.

➤ با شیوه مدلسازی و حل معادله حرکت سیال در داخل لایه مرزی به روش **Prandtl-Blausius** آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ شیوه مدل‌سازی حرکت سیال در داخل لایه مرزی با روش Von Karman را فرا گیرد.

➤ همانطوریکه اشاره شد هنگامی که جسمی در داخل سیالی حرکت می کند، از سوی سیال نیروهایی به آن وارد می شوند که حرکت جسم را تحت تأثیر قرار می دهند. از مهمترین این نیروها، نیروهای لیفت و دراگ می باشند. تعیین هر کدام از این نیروها مستلزم دانستن چگونگی توزیع سرعت سیال در داخل لایه مرزی است همانطوریکه مشاهده شد در روش Prandtl-Balusiوس با حل معادله حرکت از طریق به کار گیری تابع جریان، لایه مرزی حل می شود. در این بخش با استفاده از موازنه اندازه حرکت و نیرو بر روی لایه مرزی با روش Von-Karman موفق به مدلسازی و حل لایه مرزی می شویم.

کاربرد



کاربرد



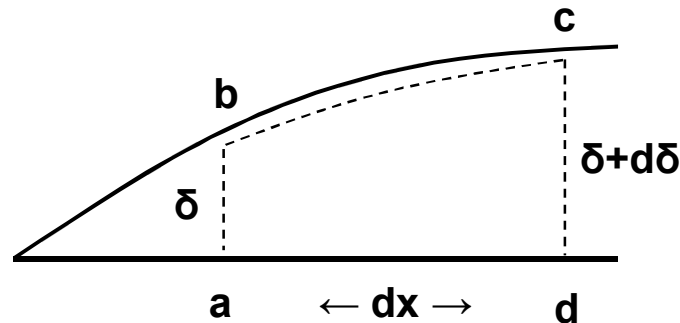
مدلسازی لایه

مکانیک سیالات

۸۳

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

در روش Von Karman برای یک المان در داخل لایه مرزی موازنه جرم و اندازه حرکت نوشته می شود:



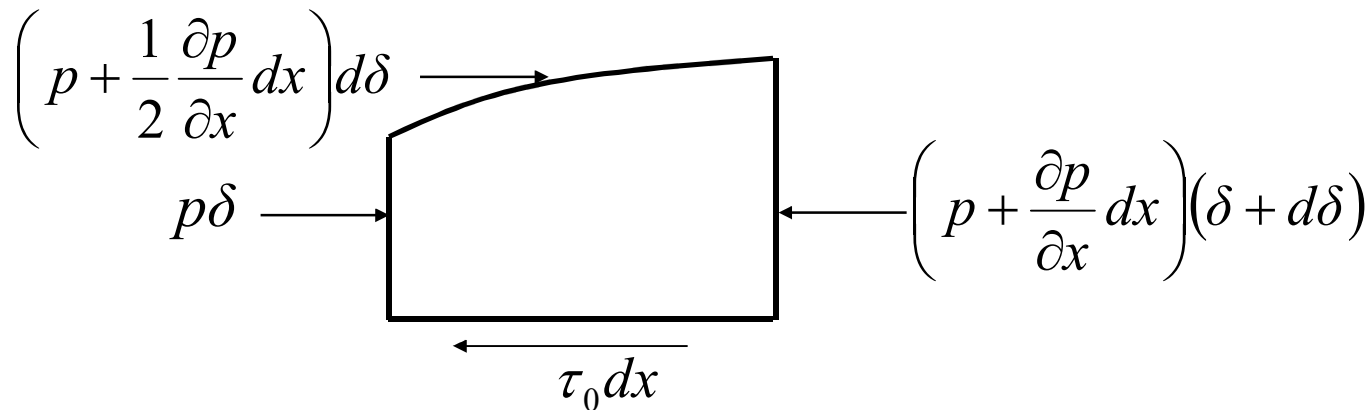
$$\dot{m}_{ab} = \int_0^{\delta} \rho U_x dy$$

عرض صفحه واحد در نظر گرفته می شود:

$$\dot{m}_{cd} = \int_0^{\delta} \rho U_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho U_x dy \right) dx$$

$$\dot{m}_{bc} = \dot{m}_{cd} - \dot{m}_{ab} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho U_x dy \right) dx$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

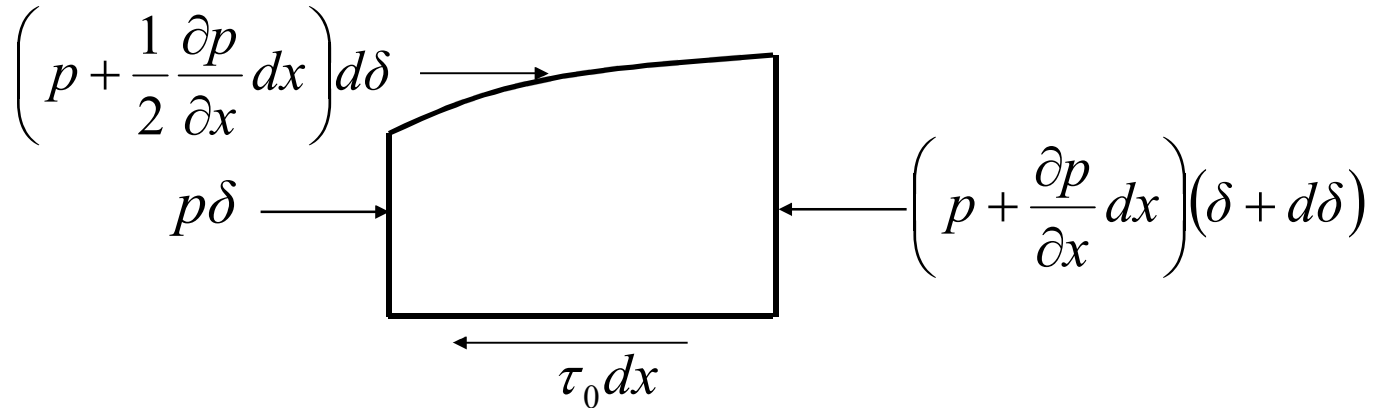


$$\sum F_x = p\delta + p d\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta - p\delta - p d\delta - \frac{\partial p}{\partial x} dx \delta$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta - \tau_0 dx = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta - \frac{\partial p}{\partial x} dx \delta - \tau_0 dx$$

$$dx d\delta \ll dx \Rightarrow \sum F_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \delta + \tau_0\right) dx$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)



$$F \dot{m}_{ab} = \int_0^{\delta} \rho U_x^2 dy \quad (in)$$

$$F \dot{m}_{cd} = \int_0^{\delta} \rho U_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho U_x^2 dy \right) dx \quad (out)$$

$$F \dot{m}_{bc} = U_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho U_x dy \right) dx \quad (in)$$

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$\sum F = \text{momentum}_{out} - \text{momentum}_{in}$$
 معادله حرکت: ➤

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \delta + \tau_0 \right) dx = \left[U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho U_x dy \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho U_x^2 dy \right) \right] dx$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
 صفحه مسطح: ➤

برای سطح صاف می توان نوشت: ➤

$$\Rightarrow \tau_0 = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho U_x U_\infty dy - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho U_x^2 dy$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \frac{U_x}{U_\infty} \left(1 - \frac{U_x}{U_\infty} \right) dy$$

➔ **Q: Momentum thickness**

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

در حالت کلی حل معادله Von Karman به شکل زیر است:

$$\tau_0 = \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(U_\infty^2 \int_0^{\delta} \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right) dy \right) + U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right) dy \right]$$

↓
Q

↓
 δ^* : Displacement Thickness

نکته:

✓ عبارت دوم سمت راست به اختلاف فشار موجود در صفحه غیرمسطح مربوط می شود.

مفاهیم فیزیکی Q & δ^*

۱. Displacement thickness (δ^*)

بیان کننده تأثیر جسم جامد در کاهش دبی جرمی سیال است.

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

دبی جرمی سیال در حالتی که جسم جامد وجود ندارد:

$$\int_0^{\delta} \rho U_{\infty} dy = \rho U_{\infty} \delta$$

دبی جرمی سیال در حالتی که جسم جامد وجود دارد:

$$\int_0^{\delta} \rho U dy$$

میزان کاهش دبی جرمی سیال به علت وجود جسم جامد:

$$\int_0^{\delta} \rho (U_{\infty} - U) dy$$

δ^* معادل ضخامتی از لایه مرزی است که در آن دبی جرمی سیال معادل میزان کاهش دبی جرمی سیال (بعلت وجود جسم جامد) می باشد.

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$\rho U_{\infty} \delta^* = \int_0^{\delta} \rho (U_{\infty} - U) dy$$

$$\Rightarrow \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{U}{U_{\infty}} \right) dy$$

➤ به عبارت دیگر دبی جرمی سیال در اثر حضور جسم جامد کاهش می‌یابد گویی سیال از پهنای کمتری عبور می‌کند ($\delta - \delta^*$).

۲. Momentum Thickness (Q)

➤ وجود جسم جامد تاثیر مشابهی در کاهش میزان اندازه حرکت سیال در حال عبور از روی یک جسم جامد دارد.

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

➤ هرگاه کاهش دبی جرمی سیال معادل $\int_0^\delta \rho(U_\infty - U) dy$ باشد، میزان کاهش اندازه حرکت سیال معادل $\int_0^\delta U \rho(U_\infty - U) dy$ می باشد.

➤ Q معادل ضخامتی از لایه مرزی است که در آن مقدار اندازه حرکت سیال معادل مقدار کاهش اندازه حرکت سیال (به علت وجود جسم جامد) می باشد.

$$\rho U_\infty^2 Q = \int_0^\delta U \delta(U_\infty - U) dy$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^\delta \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right) dy$$

➤ به عبارت دیگر اگر جسم جامد برداشته شود، باید به اندازه Q از لایه مرزی کم شود تا مقدار اندازه حرکت بدون تغییر باقی بماند.

حل معادلات حرکت در لایه مرزی (سیستم دو بعدی)

$$\tau_o = \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (U_\infty^2 Q) + U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \delta^* \right)$$

$$\frac{dU_\infty}{dx} = 0$$

در مورد اجسام مسطح: ➤

$$\frac{dU_\infty}{dx} \neq 0$$

در مورد اجسام غیرمسطح (و در داخل لوله‌ها) ➤

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp_\infty}{dx} = - \frac{U_\infty}{g} \frac{dU_\infty}{dx}$$

با استفاده از رابطه برنولی می‌توان نوشت: ➤

تمرین ۱:

مطلوب است محاسبه تغییرات فشار (بدون بعد) در داخل تونل هوا با مقطع

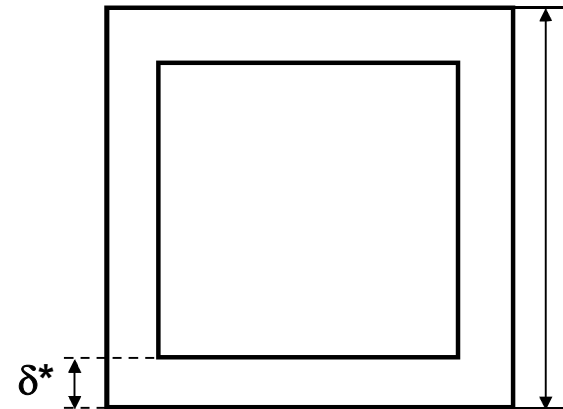
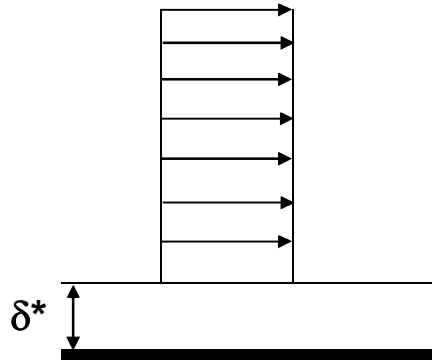
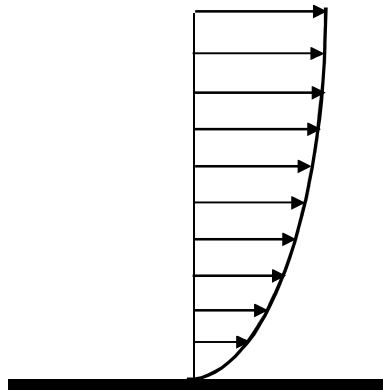


مستطیل. ویژگیهای جریان و کانال به صورت زیر می باشد:

$$A = L \times L = (305)^2 \text{ mm}^2$$

$$U_{\infty 1} = 26 \text{ m/s}, \delta_1^* = 1.5 \text{ mm} \quad \text{۱ مقطع فرضی}$$

$$U_{\infty 2} = ?, \delta_2^* = 2.1 \text{ mm} \quad \text{۲ مقطع فرضی}$$



➤ با مدلسازی حرکت سیال در داخل لایه مرزی به روش
Von Karman آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ شیوه حل مدل حرکت سیال در داخل لایه مرزی را با استفاده از روش Von Karman فرا گیرد.

➤ دانش حل معادلات جبری و دیفرانسیلی گوناگون یکی از دانش‌های اساسی در حل مدل‌های گوناگون به دست آمده از مدلسازی فیزیکی مسائل کاربردی در رشته مهندسی شیمی (و در نتیجه در دانش مکانیک سیالات) می باشد. بی شک بدون داشتن چنین ابزاری، تعیین چگونگی ارتباط تغییرات متغیرهای مستقل و وابسته، توزیع پارامترهای گوناگون در سیال امکان پذیر نمی باشد.

کاربرد



Vonحل مدل

مکانیک سیالات

۹۸

کاربرد



Vonحل مدل

مکانیک سیالات

۹۹

حل معادله Von Karman

➤ به منظور حل معادله Von Karman نیاز به یک معادله توزیع سرعت سیال می باشد.

➤ ابتدا توزیع سرعت به صورت چند جمله ای درجه دوم در نظر گرفته می شود:

$$U_x = a + by + cy^2$$

➤ با توجه به سه ثابت معادله مفروض، نیاز به سه شرط مرزی می باشد:

$$B.C.1: y = 0 : U_x = 0$$

$$B.C.2: y = \delta : U_x = U_\infty$$

$$B.C.3: y = \delta : \frac{\partial U_x}{\partial y} = 0$$

حل معادله Von Karman

$$\Rightarrow \frac{U_x}{U_\infty} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

➤ حال این توزیع سرعت در معادله Von Karman قرار داده می شود:

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{dU_x}{dy} \right|_{y=0} = 2\mu \frac{U_\infty}{\delta}$$

$$2\mu \frac{U_\infty}{\delta} = \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \left(2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right) \left(1 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right) dy \right)$$

$$2\mu \frac{U_\infty}{\delta} = \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta - \frac{5}{3}\delta + \delta - \frac{1}{5}\delta \right) = \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{15}\delta \right)$$

حل معادله Von Karman

$$2\mu \frac{U_\infty}{\delta} = \delta U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{15} \delta \right) \Rightarrow \frac{15\mu}{\rho U_\infty} dx = \delta d\delta$$

$$\frac{15\mu}{\rho U_\infty} x = \frac{1}{2} \delta^2 + A$$

$$B.C : \text{at } x=0 : \delta=0 \Rightarrow A=0$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2}{x^2} = \frac{30}{\frac{\rho U_\infty x}{\mu}} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5.5}{N_R^{0.5}}$$

این مقدار ۱۰٪ از مقدار بدست آمده قبلی بیشتر است. ➤

حل معادله Von Karman

$$C_D = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{2\mu \frac{U_\infty}{\delta}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{4\mu}{\rho U_\infty \delta} = \frac{4\mu}{\rho U_\infty x} \frac{x}{\delta}$$

$$C_D = \frac{4}{N_R} \frac{N_R^{0.5}}{5.5} = \frac{0.73}{N_R^{0.5}}$$

حل معادله Von Karman

➤ اگر تابع توزیع سرعت درجه سوم در نظر گرفته شود، می توان نوشت:

$$U_x = a + by + cy^2 + dy^3$$

➤ در این صورت افزون بر سه شرط مرزی پیشین، به یک شرط مرزی دیگر نیز نیاز می باشد:

$$B.C.4: y = 0: \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = 0$$

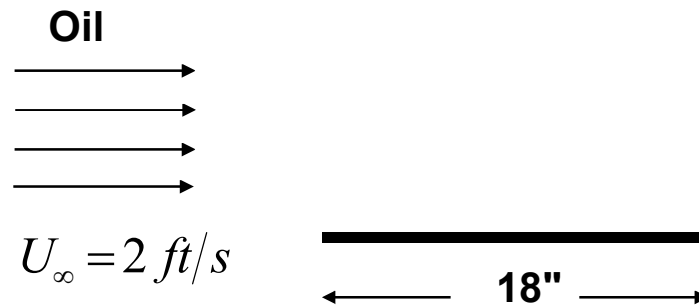
حل معادله Von Karman

خودآزمایی: ➤

✓ با استفاده از این شرط مرزی (B.C.4) ابتدا معادله توزیع سرعت را تعیین نمایید و سپس معادلات ضخامت لایه مرزی و ضریب نیروی دراگ را به دست آورید.

تمرین ۱:

مطلوب است محاسبه ضخامت لایه مرزی و نیروی دراگ وارد بر صفحه مسطح. ➤



$$Sp. Gr. = 0.925$$

$$w = 6''$$

$$\nu = 0.001 \text{ ft}^2/\text{s}$$

➤ با حل مدل Von Karman در حرکت آرام سیال در داخل لایه مرزی آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



➤ همانطوریکه اشاره شد دانش حل معادلات جبری و دیفرانسیلی گوناگون یکی از دانشهای اساسی در حل مدل‌های گوناگون به دست آمده از مدلسازی فیزیکی مسائل کاربردی مکانیک سیالات می باشد. حل این معادلات در جریان آشفته اهمیت بیشتری پیدا می کند. در این شرایط می توان نیروهای وارده از طرف سیال به جسم در جریانهای واقعی (آشفته) را تعیین نمود.

کاربرد



(C) Webfeat Productions

کاربرد



Vontron مدل

مکانیک سیالات

۱۱۱

تعیین ضخامت لایه مرزی جریان آشفته

➤ برای تعیین ضخامت لایه مرزی در جریان آشفته، از معادله Von Karman استفاده می‌شود. در این حالت می‌توان از معادله توزیع سرعت سیال در داخل لوله‌ها استفاده کرد.

$$\frac{U_x}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}$$

➤ نکته:

✓ شیب این منحنی در نقطه تماس سیال با سطح جامد قابل محاسبه نمی‌باشد.

$$\frac{dU_x}{dy} = \frac{U_\infty}{7\delta^{\frac{1}{7}}y^{\frac{6}{7}}}$$

$$\left. \frac{dU_x}{dy} \right|_{y=0} \cong \text{نامعین}$$

تعیین ضخامت لایه مرزی جریان آشفته

بنابراین به منظور محاسبه τ_0 از روابط تجربی استفاده می‌شود:

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho \overline{U_x^2}, \quad f = \frac{0.316}{N_R^{0.25}}, \quad N_R = \frac{D \overline{U_x} \rho}{\mu} = \frac{2\delta \overline{U_x} \rho}{\mu}$$

$$\overline{U_x} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta U_x dy = 0.817 U_\infty$$

$$\Rightarrow \tau_0 = 0.0225 \rho U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta} \right)^{0.25}$$

$$\tau_0 = \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \frac{U_x}{U_\infty} \left(1 - \frac{U_x}{U_\infty} \right) dy \right)$$

تعیین ضخامت لایه مرزی جریان آشفته

$$0.0225\rho U_\infty^2 \left(\frac{v}{U_\infty \delta} \right)^{0.25} = \rho U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \right) dy \right)$$

$$0.0225 \left(\frac{v}{U_\infty \delta} \right)^{0.25} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{7}{72} \delta \right)$$

$$\delta^{0.25} d\delta = 0.231 \left(\frac{v}{U_\infty} \right)^{0.25} dx$$

$$0.8\delta^{1.25} = 0.231 \left(\frac{v}{U_\infty} \right)^{0.25} x + A$$

$$B.C.: \text{ at } x = 0 : \delta = 0 \Rightarrow A = 0$$

نکته: ➤

این شرط مرزی درست نمی باشد و متعاقباً در مورد آن صحبت می شود. ✓

تعیین ضخامت لایه مرزی جریان آشفته

$$\Rightarrow \delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{U_\infty} \right)^{0.2} x^{0.8} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{\left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{0.2}} = \frac{0.37}{N_R^{0.2}}$$

نکته: ➤

➤ با مقایسه این رابطه با رابطه جریان آرام مشاهده می شود که ضخامت لایه مرزی در جریان آشفته بیشتر است.

تمرین ۱:

➤ مطلوب است محاسبه C_D ، $\overline{C_D}$ و F_D در جریان آشفته بر روی یک صفحه تخت.

➤ با حل مدل Von Karman در حرکت آشفته سیال در داخل لایه مرزی آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

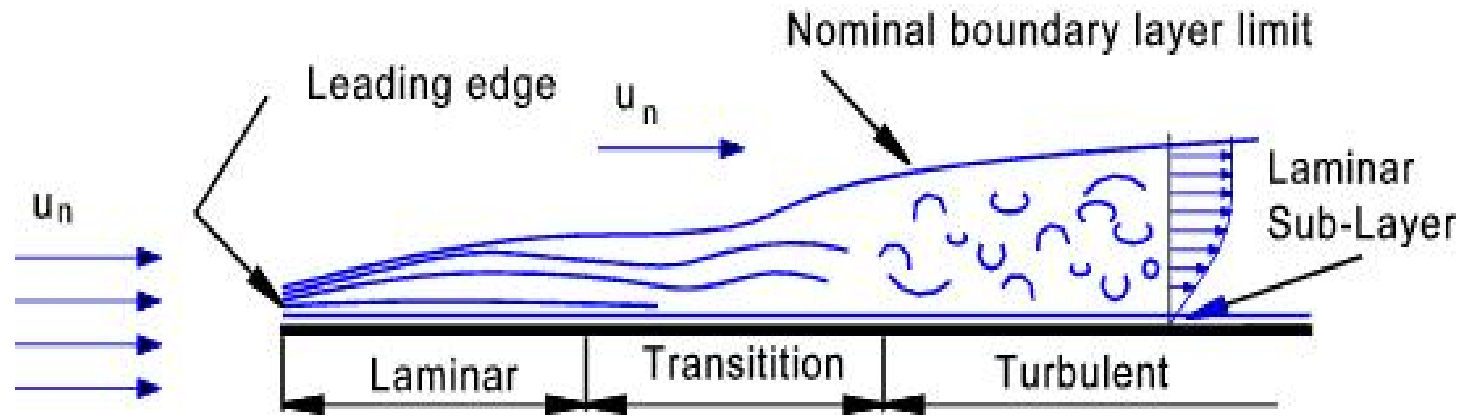
تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
✓ این فرض را که از ابتدای لایه مرزی آشفته تشکیل می شود، اصلاح نماید.

➤ در هنگام مدلسازی حرکت سیال در داخل لایه مرزی در ابتدای صفحه فرض بر این بود که لایه مرزی از آغاز آشفته باشد. در عمل چنین فرضی درست نیست و در آغاز، هنگامی که لایه مرزی تشکیل می شود، جریان سیال آرام است و پس از طی شدن فاصله ای به صورت آشفته در می آید. با اصلاح این فرض، نتایج مدلسازی به واقعیت نزدیک تر می شوند.



تصحیح رابطه ضریب نیروی دراگ

Schlichting برای جریان آشفته رابطه تجربی زیر را پیشنهاد کرده است: ➤

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_R^{0.2}}$$

نکته: ➤

✓ همانطوریکه اشاره شد، فرض تشکیل لایه مرزی آشفته از ابتدای صفحه درست نمی باشد و در عمل لایه مرزی آرام ابتدا شکل می گیرد و سپس به لایه مرزی آشفته تبدیل می شود. انتقال از لایه مرزی آرام و لایه مرزی آشفته به N_R بستگی دارد.

➤ انتقال (Transition) برای صفحه مسطح در محدوده $3 \times 10^5 < N_{R,L}^* < 3 \times 10^6$ روی می دهد.

تصحیح رابطه ضریب نیروی دراگ

➤ وجود لایه مرزی آرام در ابتدای صفحه سبب افزایش نیروی دراگ می شود، زیرا:

$$C_{D, \text{Laminar}} > C_{D, \text{Turbulent}}$$

➤ به منظور اصلاح رابطه ابتدا باید نیروی دراگ از ابتدای صفحه تا نقطه بحرانی (L^*) را از کل نیروی دراگ کم و سپس مقدار معادل آن (حاصل از لایه مرزی آرام) را به کل نیروی دراگ اضافه کرد.

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{0.074}{N_{R,L^*}^{0.2}} + \frac{1.332}{N_{R,L^*}^{0.5}}$$

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \left(\frac{0.074}{N_{R,L^*}^{0.2}} - \frac{1.332}{N_{R,L^*}^{0.5}} \right)$$

تصحیح رابطه ضریب نیروی دراگ

$$\Rightarrow \overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{A}{N_{R,L}}$$

تمرین: نشان دهید



| | | | | |
|-------------|----------|----------|--------|----------|
| A | ۱۰۵۰ | ۱۷۰۰ | ۳۳۰۰ | ۸۷۰۰ |
| $N_{R,L}^*$ | $۳*۱۰^۵$ | $۵*۱۰^۵$ | $۱۰^۶$ | $۳*۱۰^۶$ |

تمرین ۱:

➤ بررسی جریان آب بر روی یک صفحه صاف در جریان آشفته و تعیین ضریب نیروی دراگ

$$A = 1 \times 1 \text{ ft}^2$$

$$U_\infty = 50 \text{ ft/s}, \quad \nu = 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}, \quad \rho = 1.94 \text{ slug/ft}^3$$

$$N_{R,L^*} = 5 \times 10^5, \quad L^*, \quad F_D, \quad \overline{C_D}, \quad F_{D_{Laminar}}$$

حل تمرین ۱:

$$\overline{C}_{D, Lami nar} = \frac{1.332}{N_{R, L}^{0.5}} = 0.0019$$

$$F_{D, Lami nar} = \frac{1}{2} \overline{C}_D \rho U_{\infty}^2 A^* = 0.46 \text{ lbf}$$

تمرین ۲:

➤ بررسی حرکت هواپیما در جریان آشفته و تعیین توان مورد نیاز آن (با توجه به اطلاعات داده شده).

$$L = 785'$$

$$D = 132', U_{\infty} = 123 \text{ ft/s}$$

$$\rho = 0.0017 \text{ slug/ft}^3, \mu = 3.7 \times 10^{-7} \text{ lbf.s/ft}^2$$

➤ در تعیین نیروهای وارد شده بر اجسام در جریان آشفته سیال، روابط تجربی به کار برده می شوند.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

- پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
- ✓ جریان مایعات در کانالهای باز را تعیین نماید.
- ✓ بر نقش عدد فروید در جریان مایع داخل کانالهای باز واقف باشد.

کاربرد

➤ در بسیاری موارد بنا به ضرورت کار و یا توجیه های اقتصادی بهتر است که به منظور انتقال و توزیع سیال در یک واحد صنعتی محدود (مانند واحدهای جدایش فیزیکی آب و نفت) و یا گسترده (مانند مزارع بزرگ کشاورزی) از کانالهای باز استفاده شود. انتقال سیال در این کانالها مورد بحث در این بخش می باشد.

کاربرد



مکانیک سیالات پیشرفته

جریان در کانالهای باز

کاربرد



مکانیک سیالات پیشرفته

جریان در کانالهای باز

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز

➤ کانالهای باز به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

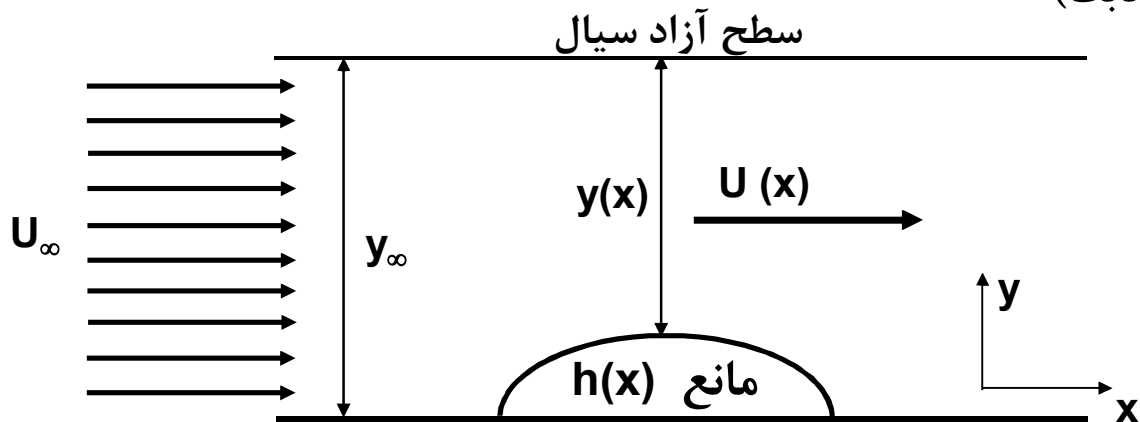
۱. مصنوعی (کانال‌های آب و فاضلاب و سدها)

۲. طبیعی (رودخانه‌ها و سیلابها)

➤ در حالتی که سیال تمام مقطع کانال را اشغال می‌کند (مانند جریان داخل لوله‌ها) گرادیان فشار در راستای جریان وجود دارد و برآیند نیروی حاصل از این گرادیان و نیروی اصطکاک موجب حرکت سیال می‌شود. در حالی که در کانال‌های باز با عمق ثابت گرادیان فشار وجود ندارد و برآیند نیروی جاذبه و نیروی اصطکاک موجب حرکت سیال می‌شود. به همین علت در کانالهای باز N_F حائز اهمیت می باشد.

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز

- جریان در کانالهای باز بدون اصطکاک
- بررسی جریان یکنواخت و یک بعدی سیال درون کانال مستطیل شکل (با پهنای ثابت)




➤ نکته:

- ✓ از آنجایی که ضخامت لایه مرزی سیال در برابر ارتفاع کانال ناچیز است، از آن چشم پوشی شده و توزیع سرعت در کانال یکنواخت فرض می شود.

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز


$$E_{\infty} = \frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{U_{\infty}^2}{2g} + y_{\infty} = cte \quad \text{الف: رابطه برنولی پیش از مانع:}$$

$$E_x = \frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} + y + h = cte \quad \text{ب: رابطه برنولی روی مانع:}$$

با مشتق گیری از رابطه برنولی می توان نوشت: 

$$\Rightarrow \frac{U}{g} \frac{dU}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dh}{dx} = 0 \quad (I)$$

$$\frac{Q}{W} = U_{\infty} y_{\infty} = Uy = cte$$

معادله پیوستگی 

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز

با مشتق گیری از رابطه پیوستگی می توان نوشت:

$$U \frac{dy}{dx} + y \frac{dU}{dx} = 0 \quad (II)$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{dh}{dx}}{1 - \frac{U^2}{gy}} = \frac{-\frac{dh}{dx}}{1 - N_F^2}$$

رابطه به دست آمده نشان می دهد که رفتار سیال داخل کانالهای باز به مقدار N_F بستگی دارد.

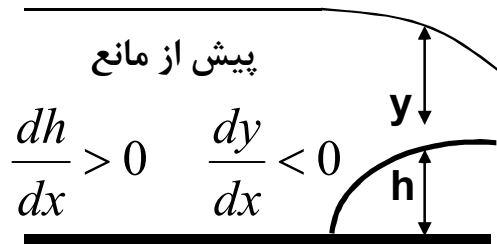
بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز

جریان سیال در حالت‌های گوناگون بررسی می‌شود. ➤

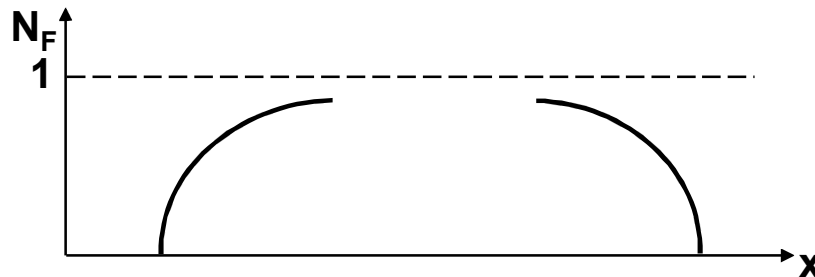
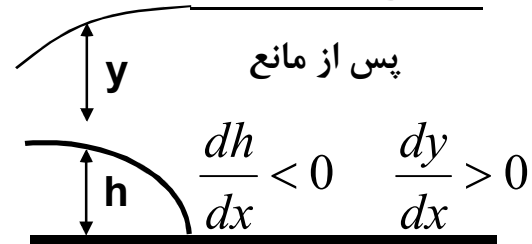
۱. در حالتی که عدد فروید کوچکتر از ۱ باشد:

Subcritical flow or Tranquil flow, $N_F < 1$

سطح آزاد سیال



سطح آزاد سیال



بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز

➤ در این حالت جریان در دو سوی مانع متقارن می باشد و N_F همواره از یک کوچکتر است.

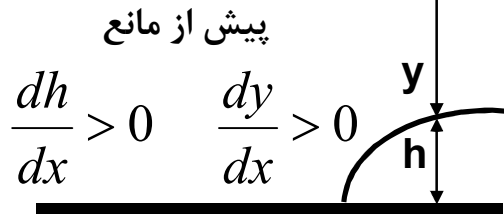
||. در حالتی که عدد فروید بزرگتر از ۱ باشد:

Supercritical flow or Rapid flow, $N_F > 1$

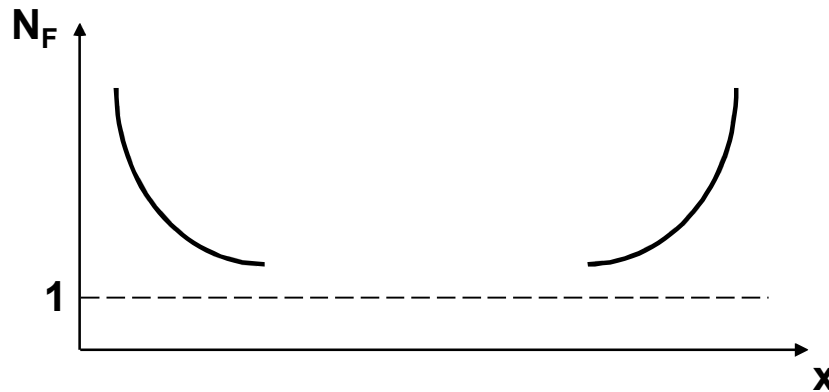
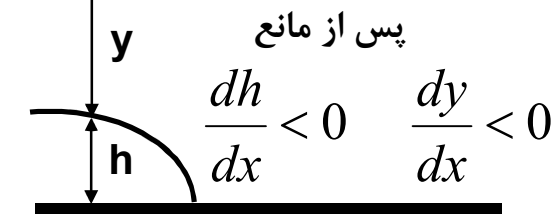
➤ در این حالت نیز جریان در دو سوی مانع تقارن دارد و N_F همواره از یک بزرگتر است.

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز

سطح آزاد سیال



سطح آزاد سیال



بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز

|||. در حالتی که عدد فروید برابر ۱ باشد:

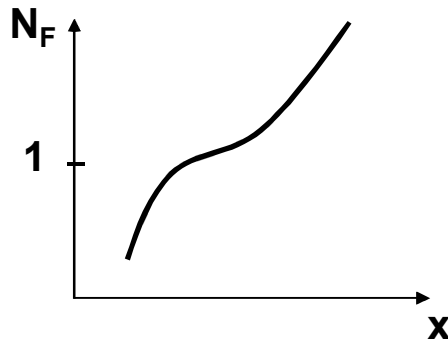
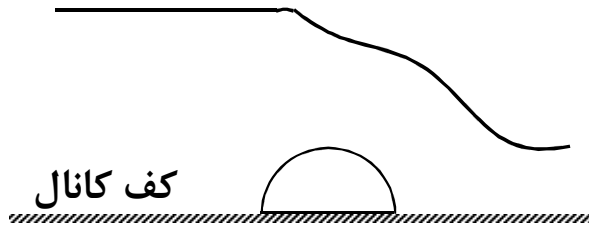
Critical flow, $N_F=1$

در این حالت براساس شرایط پایین دست (Down Stream) دو حالت ممکن است رخ دهد. ➤

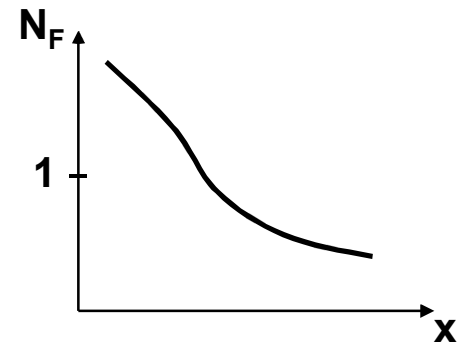
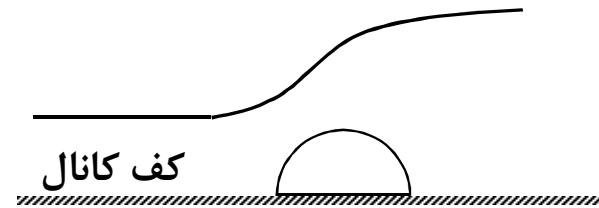
الف) جریان مطابق شکل الف از حالت گذرا (Transition) گذر نماید و به حرکت خود ادامه دهد.

ب) جریان مطابق شکل ب به حرکت خود ادامه می دهد.

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز



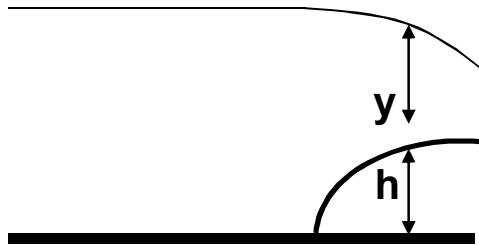
$$\text{at } \frac{dh}{dx} = 0 \Rightarrow N_F = 1$$



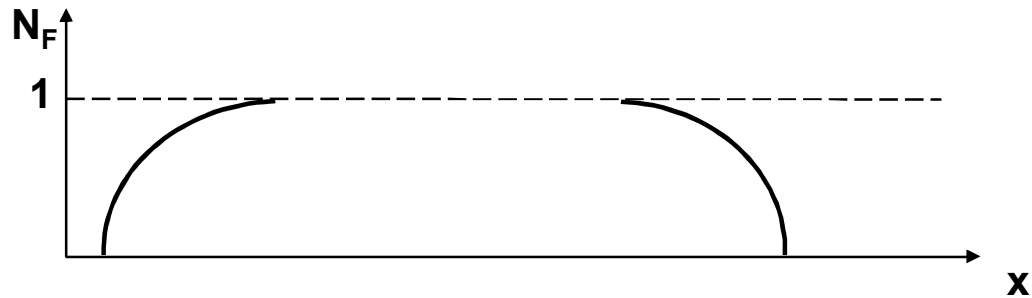
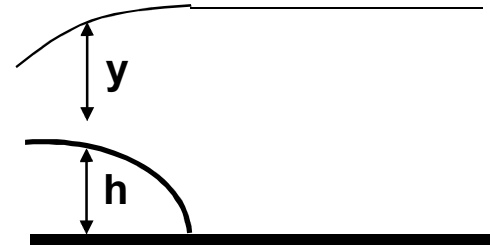
شکل الف

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز

سطح آزاد سیال

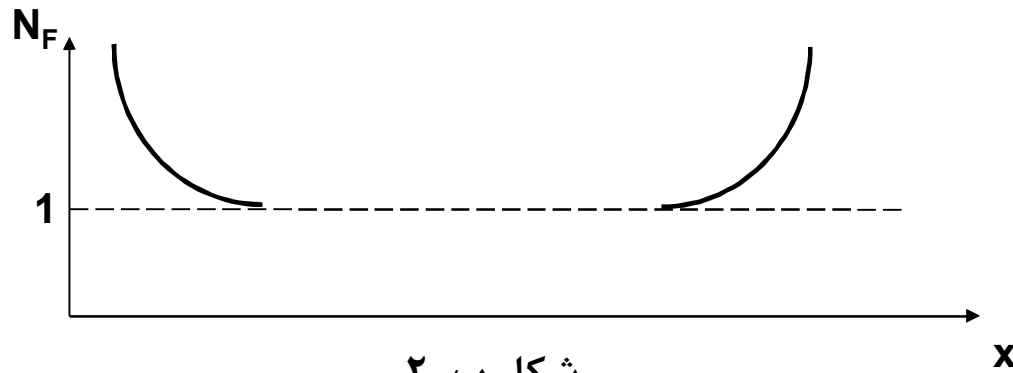
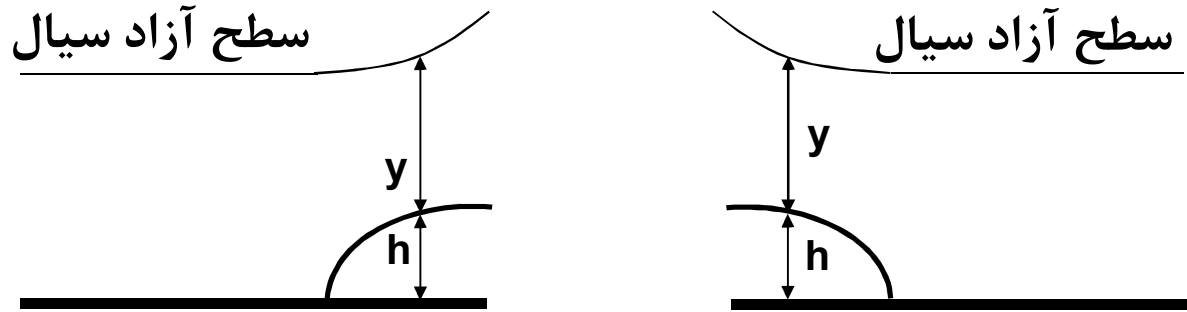


سطح آزاد سیال



شکل ب- ۱

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز



شکل ب-۲

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز

- در هر دو حالت مطابق شکل N_F در نوک مانع معادل یک می باشد.
- لیکن در حالت الف N_F روی مانع از یک عبور می کند در حالیکه در حالت ب N_F روی مانع از یک عبور نمی کند.

نکته:

- ✓ هرگاه $N_F=1$ باشد، آنگاه $dh/dx=0$ ، اما عکس این مطلب درست نیست.

خلاصه:

➤ با چگونگی جریان سیال بر روی موانع و نقش عدد فروید در کانالهای باز آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ معادلات حرکت را بدون بعد نماید و اثر اعداد بدون بعد را در کانالهای باز بشناسد.

کاربرد

➤ بدون بعد سازی معادلات، همانگونه که پیش از این نیز دیدیم، در ایجاد درک درستی از معادلات تشریح کننده سیستم مورد نظر و شناخت نقش نیروهای گوناگون بسیار مفید می باشد.



بررسی تغییرات H با y

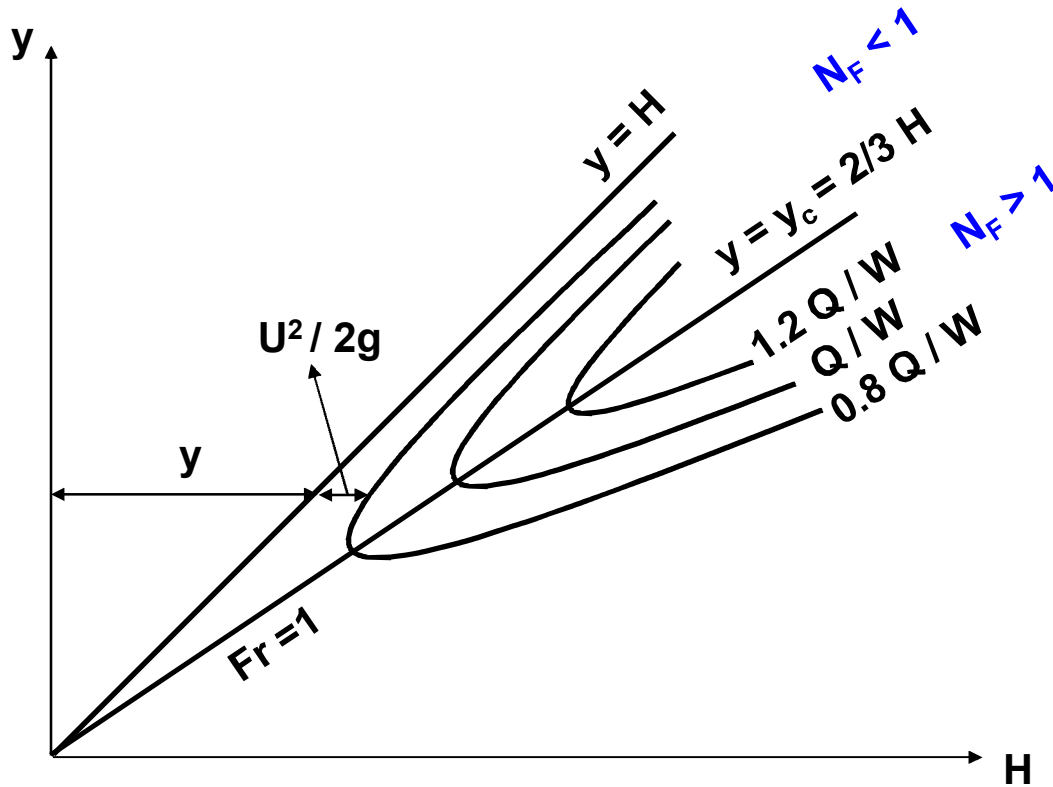
با ترکیب رابطه برنولی و معادله پیوستگی می توان نوشت:

$$\frac{(Q/W)^2}{2gy_\infty^2} + y_\infty = \frac{(Q/W)^2}{2gy^2} + y + h, \quad \& \quad H = y + \frac{(Q/W)^2}{2gy^2}$$

$$\Rightarrow H_\infty = H + h \Rightarrow \frac{dH}{dy} = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{(Q/W)^2}{g} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow H_{min} = (3/2)y$$

بررسی تغییرات H با y



بررسی تغییرات H با y

- هر منحنی دارای یک کمینه می باشد ($y = y_c = 2/3 H$).
- هر منحنی از دو بخش تشکیل شده است ($N_F < 1$ و $N_F > 1$).

$$y = \left(\frac{(Q/W)^2}{g} \right)^{1/3} \Rightarrow gy^3 = (Q/W)^2 = y^2 U^2 \Rightarrow \frac{U^2}{gy} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{U}{\sqrt{gy}} = 1 \Rightarrow N_F = 1$$

نتیجه:

- کمینه منحنی H بر روی خط $y = 2/3 H$ قرار می گیرد و این در حالی است که $N_F = 1$ باشد. به عبارت دیگر در جریان بحرانی (Critical Flow) مقدار H کمینه می باشد.

بررسی تغییرات H با y

$$y_c = \left(\frac{(Q/W)^2}{g} \right)^{1/3} \Rightarrow \frac{Q}{W} = \sqrt{gy_c^3}$$

$$N_F = \frac{U}{\sqrt{gy}} = \frac{Q/W}{y\sqrt{gy}} = \frac{Q/W}{\sqrt{gy^3}} = \frac{\sqrt{gy_c^3}}{\sqrt{gy^3}} = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{3/2}$$

در قسمت بالای خط $y = 2/3 H$ ➤

$y > y_c \Rightarrow N_F < 1$, *Subcritical Flow*


در قسمت پایین خط $y = 2/3 H$ ➤

$y < y_c \Rightarrow N_F > 1$, *Supercritical Flow*

بررسی منحنی به صورت بدون بعد

$$H = y + \frac{(Q/W)^2}{2gy^2}$$

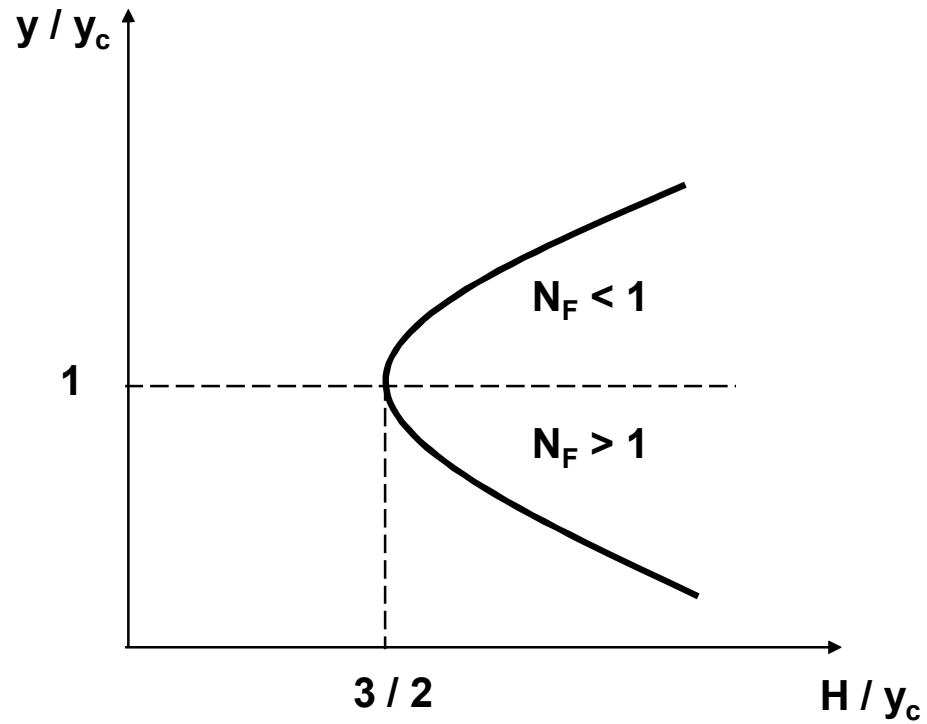
$$\Rightarrow \frac{H}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{(Q/W)^2}{2gy_c y^2} = \frac{y}{y_c} + \frac{y_c^3 g}{2gy_c y^2} = \frac{y}{y_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^2$$

این معادله اساس بررسی جریان در کانالهای باز می باشد. 

$$H = y + \frac{(Q/W)^2}{2gy^2} \Rightarrow (Q/W) = y \sqrt{2g(H-y)}$$

$$\frac{d(Q/W)}{dy} = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} H$$

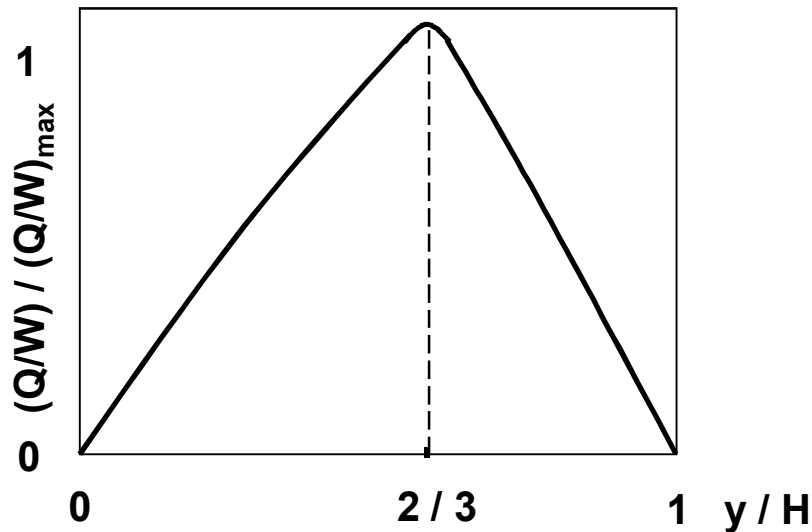
بررسی منحنی به صورت بدون بعد



بررسی منحنی به صورت بدون بعد

$$\Rightarrow (Q/W)_{max} = \sqrt{(8/27)gH^3} \quad (N_F = 1)$$

$$\frac{(Q/W)}{(Q/W)_{max}} = \frac{y\sqrt{2g(H-y)}}{\sqrt{(8/27)gH^3}} = \left[(27/4) \left(\frac{y}{H} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{H} \right) \right]^{0.5}$$



بررسی منحنی به صورت بدون بعد

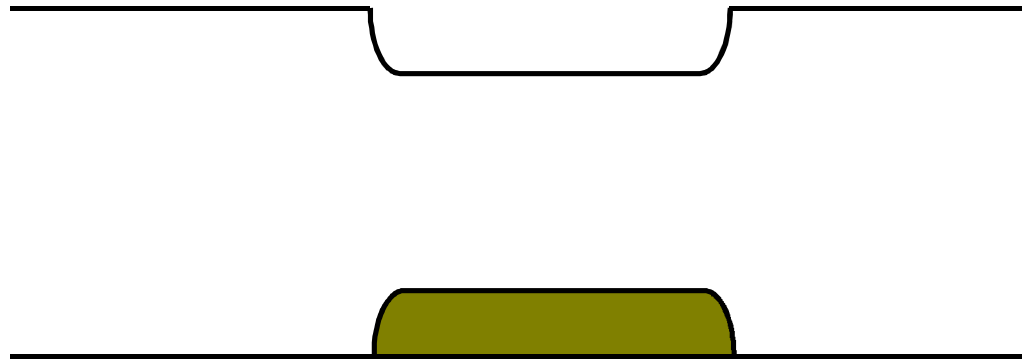
نکته:

هرگاه ارتفاع مانع از h_c بیشتر باشد، سیال نمی تواند از روی مانع عبور نماید. به منظور عبور دادن سیال باید Q/W و یا y_∞ افزایش یابند تا مقدار H به کمینه مقدار لازم (H_{min}) برسد.

$$H_\infty = H_{min} + h_c$$

تمرین ۱:

مطلوب است محاسبه ارتفاع بحرانی مانع و توزیع سطح آب در کانال زیر با توجه به اطلاعات داده شده.



$$Q = 27 \text{ cfs}, h = 0.3'$$

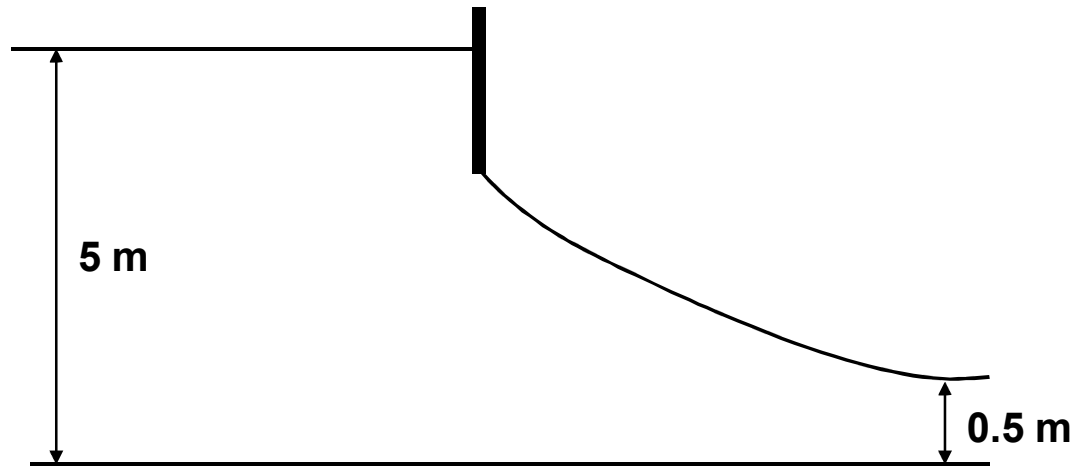
$$W = 4', y_1 = 2'$$

تمرین ۲:

➤ آب در داخل کانالی با مشخصات داده شده جریان دارد. جریان سیال روی مانع را بررسی نمایید.

تمرین ۳:

در شکل زیر مطلوب است محاسبه $(Q/W)_{\max}$.



خلاصه:

➤ معادلات حاکم بر جریان سیال داخل کانالهای باز را به صورت بدون بعد بررسی کردیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
✓ مفهوم پرش هیدرولیکی و معادلات مربوط به آنرا بشناسد.

➤ به منظور کنترل جریان سیال در کانالهای باز، بایستی رفتار سیال و پدیده های گوناگونی را که ممکن است در جریان سیال روی دهند، شناخت و در راستای دلخواه به کار گرفت. به عنوان مثال می توان از تلف کردن انرژی در جریان بالای سد و یا بازیابی ارتفاع سطح آب به منظور آبیاری نام برد.

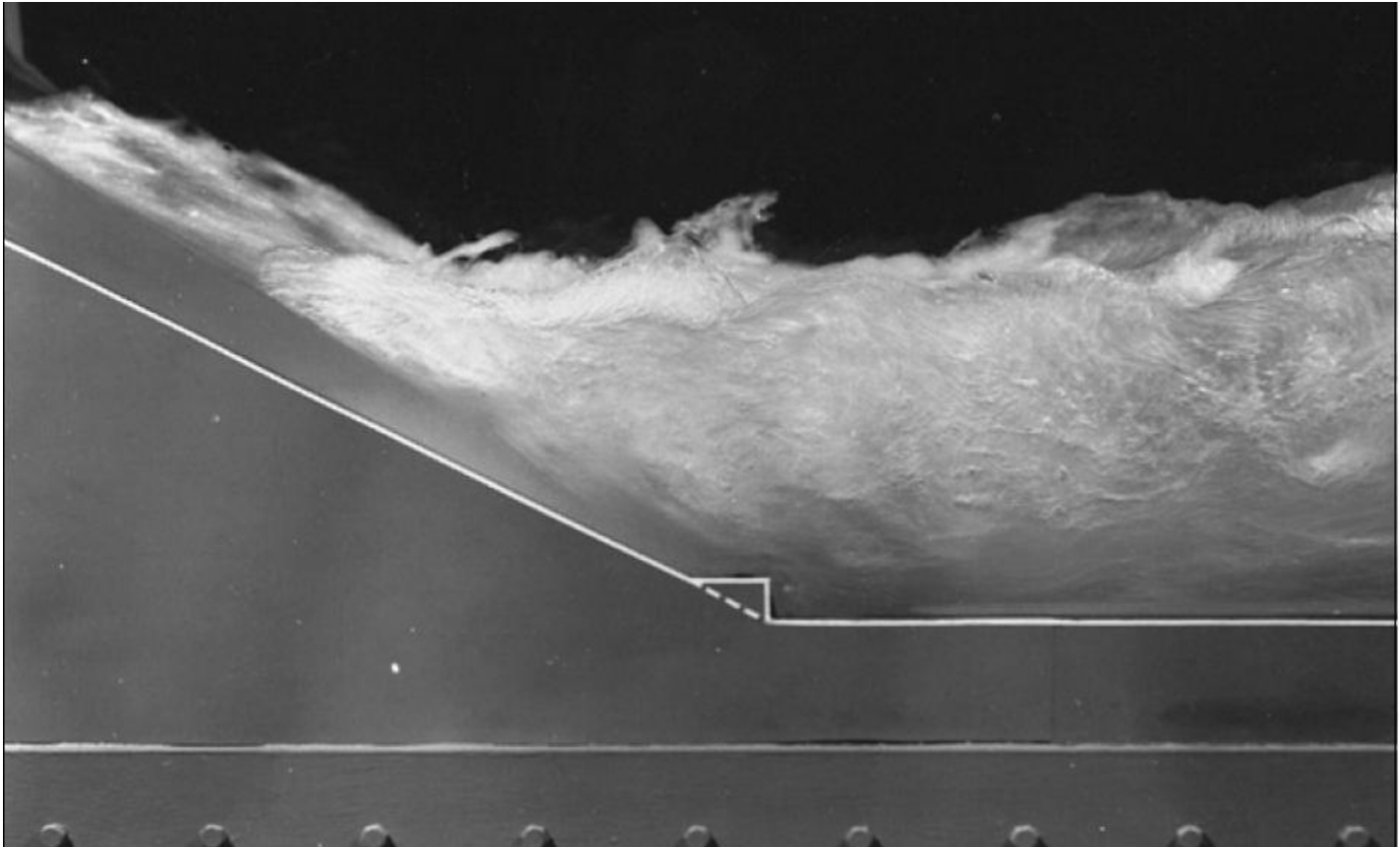
کاربرد

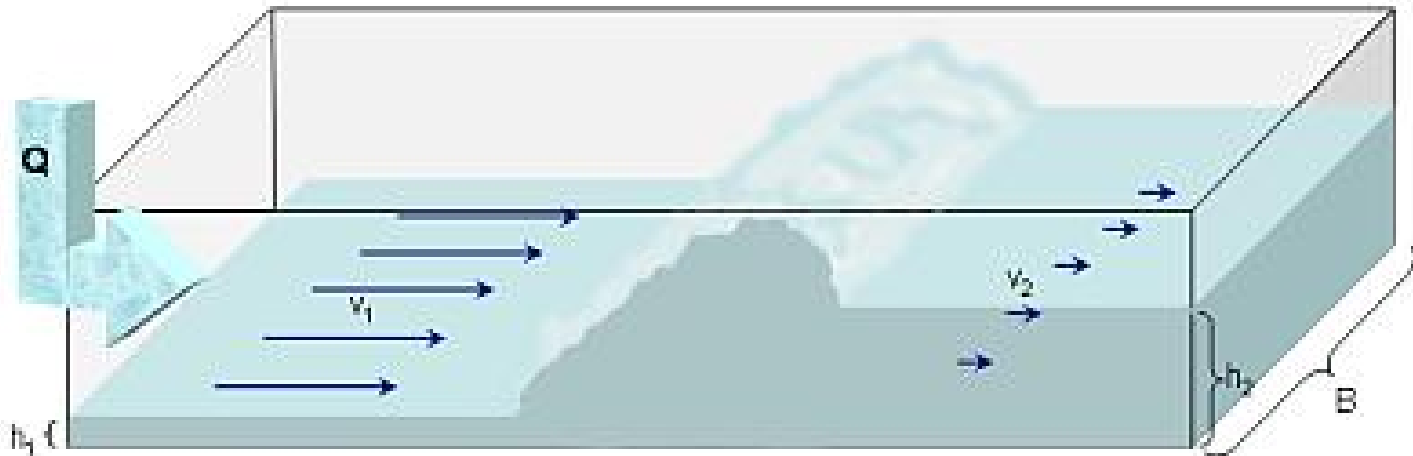


کاربرد



کاربرد





- Q: Flow Rate**
- B: Channel Width**
- h_1 : Upstream Depth**
- V_1 : Upstream Velocity**
- h_2 : Downstream Depth**
- V_2 : Downstream Velocity**

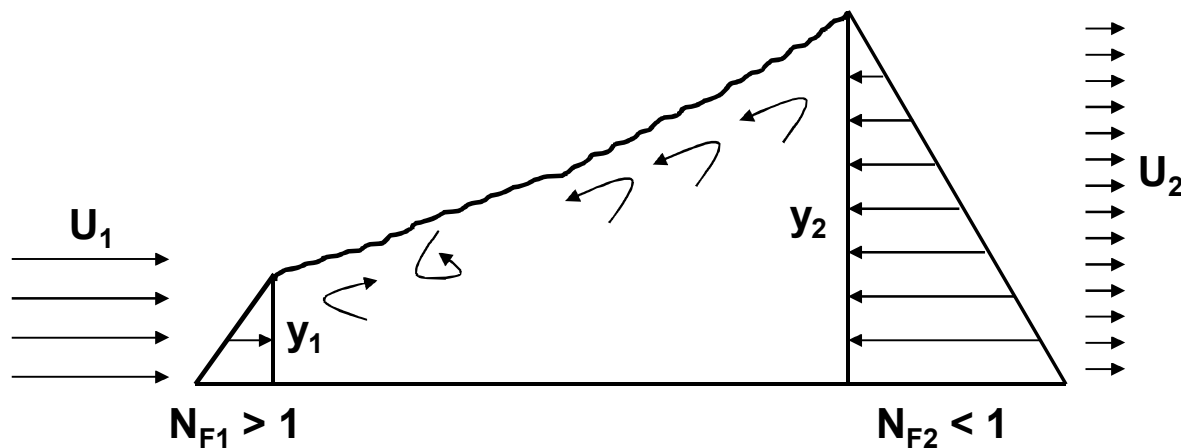
پرش هیدرولیکی (Hydraulic Jump)

پرش هیدرولیکی پدیده ای است که سبب تغییر حالت جریان از **Subcritical** به **Supercritical** می شود و با تلفات بسیار زیاد انرژی همراه است و به همین علت کاربرد فراوانی دارد.



پرش هیدرولیکی (Hydraulic Jump)

همانگونه که گفته شد می توان از تلف کردن انرژی در جریان بالای سد و یا بازیابی ارتفاع سطح آب به منظور آبیاری بهره گرفت.



پرش هیدرولیکی در طول مسیر کوتاهی (معادل $6y_2$) رخ می دهد، بنابراین مقدار اتلاف ناشی از تنش در کف کانال ناچیز می باشد.

پرش هیدرولیکی (Hydraulic Jump)

با در نظر گرفتن W به عنوان پهنای کانال، می توان معادله حرکت را نوشت:

$$\frac{1}{2} \rho g y_1 y_1 W - \frac{1}{2} \rho g y_2 y_2 W = \rho (U_2 y_2 W U_2 - U_1 y_1 W U_1)$$

$$\frac{1}{2} g (y_1^2 - y_2^2) = U_2^2 y_2 - U_1^2 y_1$$

$$N_{F,1} = \frac{U_1}{\sqrt{g y_1}}$$

$$\frac{Q}{W} = cte = y_1 U_1 = y_2 U_2$$

معادله پیوستگی:

$$\Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 N_{F,1}^2} - 1 \right)$$

پرش هیدرولیکی (Hydraulic Jump)

$$y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = y_2 + \frac{U_2^2}{2g} + h_f$$

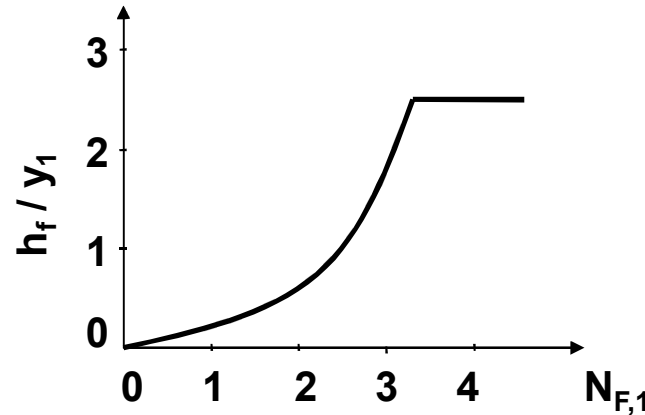
➤ معادله برنولی:

$$\Rightarrow h_f = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2}$$

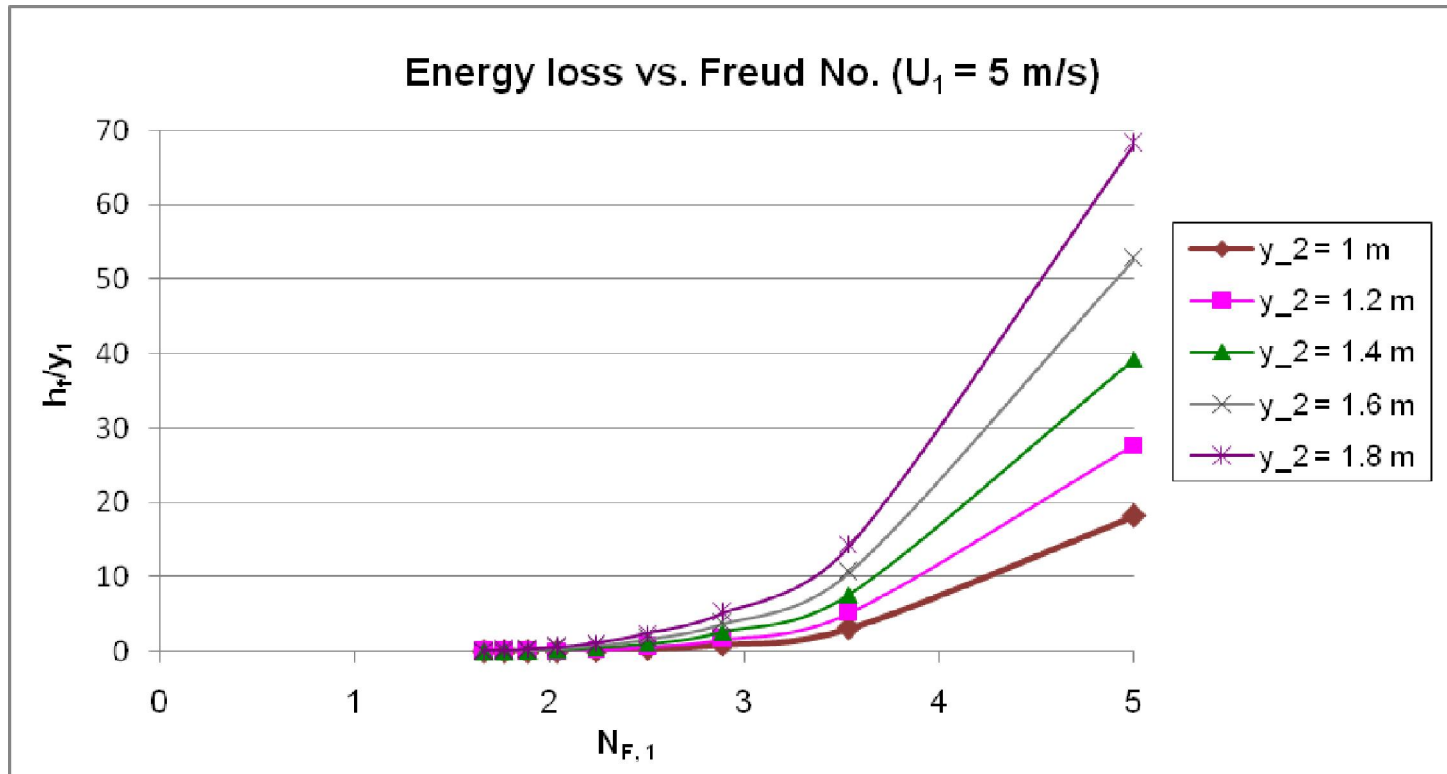
➤ همچنین می توان نوشت:

$$\frac{h_f}{y_1} = \frac{((y_2/y_1) - 1)^3}{4(y_2/y_1)}$$

$$\frac{h_f}{Y_1} = f(N_{F1})$$

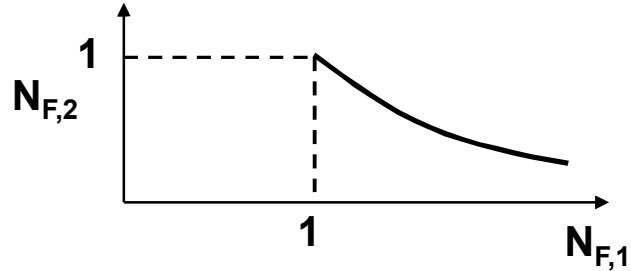


پرش هیدرولیکی (Hydraulic Jump)



پرش هیدرولیکی (Hydraulic Jump)

$$\frac{N_{F,1}}{N_{F,2}} = \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8N_{F,1}^2} - 1 \right) \right)^{3/2}$$



تمرین ۱:

➤ آب در درون کانالی پهنی با دبی $10 \text{ m}^3/\text{s.m}$ و ارتفاع ورودی $25/1 \text{ m}$ جریان دارد. اگر جریان دستخوش یک پرش هیدرولیکی شود، مطلوب است محاسبه:

۱. y_2

۲. V_2

۳. $N_{F, 2}$

۴. h_f

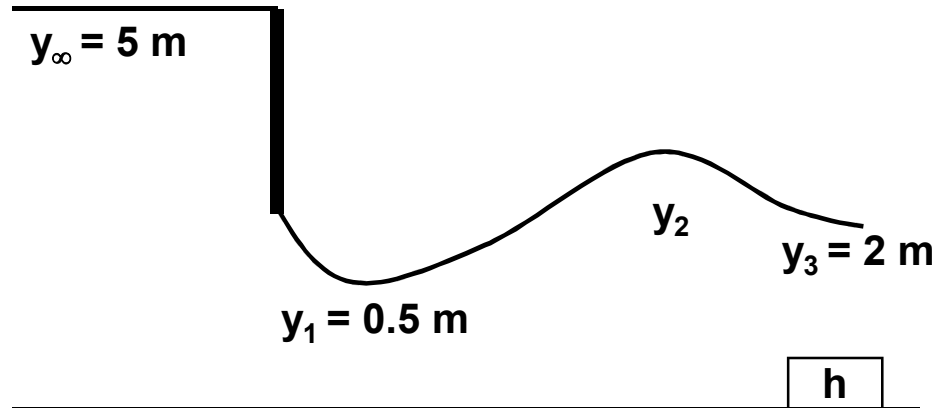
۵. درصد افت انرژی

۶. افت انرژی به ازای واحد پهنای کانال

۷. افزایش دما اگر $C_p = 4200 \text{ J/kg.}^\circ\text{C}$ باشد.

تمرین ۲:

در شکل زیر مطلوب است محاسبه h ، $N_{F,3}$ و h_c .



خلاصه:

➤ با مفهوم پرش هیدرولیکی، معادلات و شرایط به وجود آمدن و کنترل آن در راستای دلخواه آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ با توجه به اینکه جریان در کانالهای باز بدون اصطکاک بررسی شد، اثر در نظر گرفتن ترم اصطکاک در معادلات و نتایج آنها را تشخیص دهد.

➤ در مسائل واقعی، همواره بخشی از انرژی سیال به خاطر وجود اصطکاک لایه های سیال با یکدیگر و نیز با دیواره های کانال از دست می رود. در این بخش معادلات اساسی با در نظر گرفتن این فاکتور ارائه می شوند.

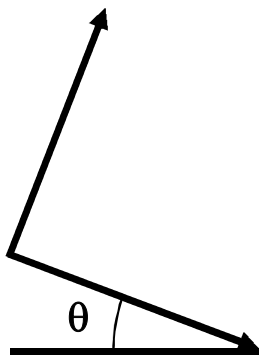
کاربرد



بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز با اصطکاک

- جریان در کانالهای باز با اصطکاک
- نیروی Shear موجب کاهش فشار می شود. این نیرو در لوله ها یکنواخت و در کانالهای باز غیریکنواخت می باشد. علت غیریکنواخت بودن این نیرو عبارت است از:
- ✓ نخست آنکه کانالهای باز دارای مقاطع مختلف و متنوعی می باشند.
- ✓ دوم آنکه نیروی Shear ناشی از تماس سیال با هوا با نیروی Shear ناشی از تماس سیال با کانال متفاوت است. در این حالت ضریب اصطکاک تابعی از N_R و شکل مقطع کانال می باشد.

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز با اصطکاک



نیروهای وارد شده بر سیال عبارتند از:

Shear Force: $\tau_0 P dx$

Gravity Force: $\rho g A dx \sin \theta$

در حالت یکنواخت جمع جبری نیروها صفر است و سرعت میانگین سیال ثابت می باشد.

$$\rho g A dx \sin \theta - \tau_0 P dx = 0$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho g \frac{A}{P} \sin \theta = \rho g R_h S_0 \left(\begin{array}{l} P : \text{Wetted Perimeter} \\ R_h : \text{Hydraulic Radius} \\ S_0 : \text{Slope} \end{array} \right)$$

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز با اصطکاک

در حالت غیریکنواخت سرعت میانگین سیال تغییر می کند. ➤

$$\rho g A dx \sin \theta - \tau_0 P dx = \rho \frac{d}{dx} (U^2 A) dx$$

$$\rho g A \sin \theta - \tau_0 P = \rho \left(2AU \frac{dU}{dx} + U^2 \frac{dA}{dx} \right)$$

$$\tau_0 = \rho g R_h \sin \theta - \rho \left(2R_h U \frac{dU}{dx} + \frac{U^2}{P} \frac{dA}{dx} \right)$$

$$Q = UA = Cte \Rightarrow A \frac{dU}{dx} + U \frac{dA}{dx} = 0$$

معادله پیوستگی: ➤

$$\Rightarrow \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dA}{dx} = - \frac{A}{U} \frac{dU}{dx}$$

بررسی جریان سیال در داخل کانالهای باز با اصطکاک

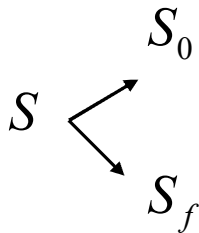
$$\tau_0 = \rho g R_h \sin \theta - \rho \left(2 R_h U \frac{dU}{dx} - R_h U \frac{dU}{dx} \right)$$

$$\tau_0 = \rho g R_h \sin \theta - R_h U \rho \frac{dU}{dx} = \rho g R_h \left(\sin \theta - \frac{U}{g} \frac{dU}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho g R_h S_f$$

$$\tau_0 = \rho g R_h S \quad (S : \text{Energy Slope})$$

در حالت کلی: ➤



معادله Chezy

➤ در این حالت مانند جریان آشفته میزان τ_0 با استفاده از رابطه تجربی زیر جایگزین می شود:

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho U^2$$

➤ در این معادله f تابع N_R ، ϵ/D و شکل مقطع کانال می باشد.

$$\Rightarrow \frac{1}{8} f \rho V^2 = \rho g R_h S$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{\frac{8g}{f} R_h S} = C \sqrt{R_h S}$$

C : Chezy Coefficient

➤ در این معادله C تابع N_R و ϵ/D و شکل مقطع کانال می باشد.

معادله Chezy

رابطه Chezy را می توان با استفاده از معادله Darcy-Weisbach نیز اثبات نمود: ➤

$$h_f = Sdx$$

$$h_f = f \frac{dx}{D_h} \frac{U^2}{2g}$$

$$D_h = 4R_h = 4 \frac{A}{P}$$

$$\Rightarrow Sdx = f \frac{dx}{4R_h} \frac{U^2}{2g} \Rightarrow U = \sqrt{\frac{8g}{f} R_h S} = C \sqrt{R_h S} \quad \& \quad C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$$

همانطوریکه مشاهده می شود برای تعیین C نیاز به f داریم. ➤

روابط *Blasius* و *Colebrook*

➤ برای **کانال‌های نرم (Smooth)** می‌توان مقدار f را با استفاده از رابطه **Blasius** تعیین کرد:

$$f = \frac{0.316}{N_R^{0.25}}, \quad N_R < 10^5$$

$$\Rightarrow C = 28.6 N_R^{0.125} = 28.6 \left(\frac{UD_h}{\nu} \right)^{0.125}$$

➤ برای **کانال‌های زبر (Rough)** نیز می‌توان مقدار f را با استفاده از رابطه **Colebrook** تعیین کرد:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left(\frac{(\varepsilon/D)}{3.7} + \frac{2.51}{N_R \sqrt{f}} \right)$$

روابط *Colebrook* و *Blasius*

این رابطه در ناحیه Partially Rough صادق می باشد. ترم دوم برای ناحیه **Fully Rough** ($N_R > 10^5$) قابل صرف نظر کردن می باشد.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln\left(\frac{(\varepsilon/D)}{3.7}\right)$$

در این حالت با رسم f بر حسب ε / D و استفاده از Power Law می توان نوشت:

$$\Rightarrow f = 0.18(\varepsilon/D)^{1/3}$$

$$D = 4R_h \Rightarrow f = 0.113(\varepsilon/R_h)^{1/3} \Rightarrow C = 47.7(R_h/\varepsilon)^{1/6}$$

نکته:

در این معادلات مقدار g معادل 32 ft/s^2 در نظر گرفته شده است. ✓

معادله Manning

➤ روابطی که برای محاسبه C بیان شده‌اند همگی از روابط تجربی برای محاسبه f در داخل لوله‌ها مشتق شده‌اند.

➤ برای اولین بار Manning رابطه‌ای را به منظور تعیین C در داخل کانالهای بزرگ و رودخانه‌ها ارائه داد:

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n}, \quad R_h (m)$$

$$C = 1.49 \frac{R_h^{1/6}}{n}, \quad R_h (ft)$$

➤ که در این روابط n بیانگر زبری کانال می‌باشد.

معادله Manning

$$U = \sqrt{\frac{8f}{g}} \sqrt{R_h S}$$

$$U = C \sqrt{R_h S}$$

$$U = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$$

$$U = \frac{1.49}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$$

$$\Rightarrow n = 0.110 f^{1/2} R_h^{1/6}$$

$$\Rightarrow n = 0.093 f^{1/2} R_h^{1/6}$$

خودآزمایی

پرسش ➤

بعد یا ابعاد n کدام است؟ ✓

پاسخ: ➤

$TL^{-1/3}$

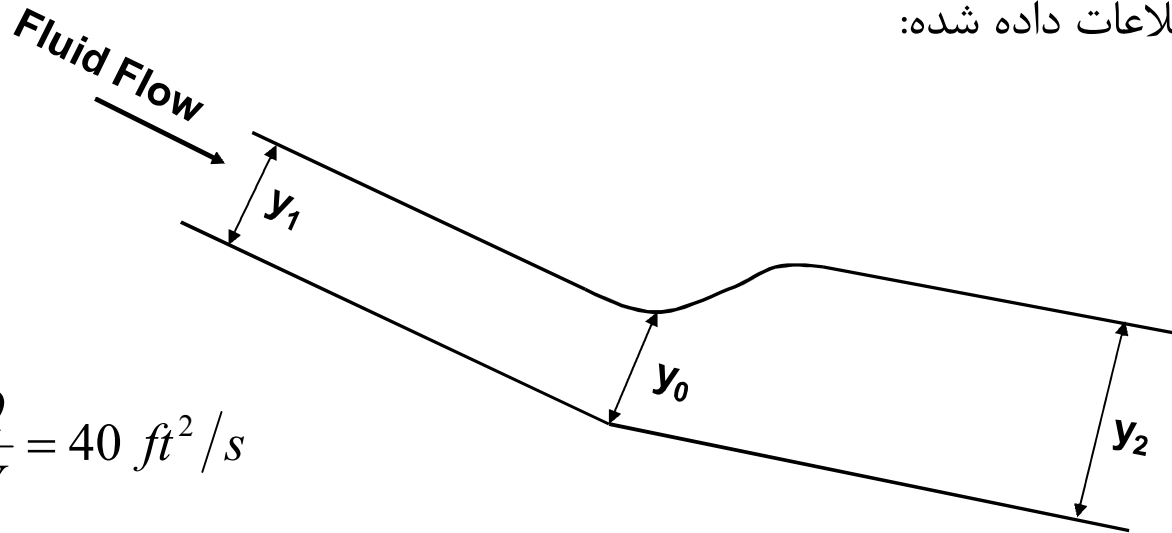
$TL^{1/3}$

T^2L

TL

تمرین ۱:

مطلوب است تعیین توزیع سطح آب در یک کانال شیب دار با توجه به اطلاعات داده شده:



$$\frac{Q}{W} = 40 \text{ ft}^2/\text{s}$$

$$S_1 = 0.015, S_2 = 0.0016$$

$$n = 0.013, W = 10'$$

$$Q/W = U_1 y_1 = U_2 y_2$$

خلاصه:

➤ همانطوریکه ملاحظه شد، در کانالهای باز با اصطکاک بیشتر از روابط تجربی جهت محاسبه میزان تلفات انرژی استفاده می شود.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ سیال غیرنیوتنی، اثر دما بر ویسکوزیته و ویسکوزیته سیال غیر نیوتنی را بشناسد.

➤ در بسیاری موارد سیال نیوتنی در نظر گرفته می شود و ویسکوزیته آن همواره فارغ از تنش برشی وارد آمده ثابت فرض می شود. اما در عمل رفتار سیالهای گوناگون در برابر وارد آمدن تنش برشی بر آنها بسته به سرشت سیال از یک سیال به سیال دیگر متفاوت است. از آن رو که بسیاری از سیالهای به کار گرفته شده در صنعت غیر نیوتنی هستند، شناخت آنها ضروری می نماید.

کاربرد



مکانیک سیالات پیشرفته

سیالهای غیر نیوتنی

سیالهای غیرنیوتنی

➤ در بخشهای پیش با قانون ویسکوزیته نیوتن آشنا شدیم:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dU_x}{dy}$$

➤ چنین سیالی نیوتنی خوانده می شود.

➤ برای گازها با افزایش دما (T) ویسکوزیته (μ) افزایش، اما برای مایعات کاهش می یابد.

➤ تئوری سیالهای غیرنیوتنی بخشی از دانش جریان و تغییر شکل ماده (Rheology) به شمار می آید.

➤ رئولوژی دانش رفتار سیال در هنگام جریان یافتن است. به عبارت دیگر مطالعه تغییر شکل سیال در هنگام جریان رئولوژی نامیده می شود.

سیالهای غیرنیوتنی

➤ به بیان بسیار ساده می توان گفت در گازها که مولکولها بین دو برخورد پیاپیشان فاصله های طولانی تری را می پیمایند، انتقال اندازه حرکت از طریق انتقال مولکولها انجام می شود، در حالیکه برای مایعات که مولکولهای مایع فاصله های کوتاهتری را می پیمایند انتقال اندازه حرکت به وسیله برخوردها شکل می گیرد.

وابستگی μ به دما برای گازها

تئوری گازها: ➤

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy}$$

➤ برای یک ذره گازی با جرم m ، میانگین پیمایش آزاد (Mean Free Path) برابر λ و تعداد در واحد حجم N سرعت میانگین ذره برابر C می باشد:

$$C = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

که در این رابطه k ثابت بولتزمن (Boltzmann's Constant) می باشد.

وابستگی μ به دما برای گازها

➤ با در نظر گرفتن سرعت میانگین ذره، C ، می توان نوشت:

$$\frac{1}{2} NC \times m \times \lambda \times \frac{du}{dy} = \mu \frac{du}{dy}$$

➤ ترمهای $m\lambda du/dy$ و $NC/2$ به ترتیب در برگیرنده شمار ذره های جابجا شده در واحد زمان در واحد سطح و اندازه حرکت یک ذره هستند. حاصلضرب آنها بیانگر تغییرات اندازه حرکت در واحد سطح در واحد زمان است:

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2} CNm\lambda$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2} Nm\lambda \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

➤ بنابراین با افزایش دما μ برای گازها افزایش می یابد.

وابستگی μ به دما برای گازها

➤ میانگین پیمایش آزاد با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N}$$

➤ بنابراین می توان نوشت:

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{d^2} \sqrt{\frac{mkT}{\pi^3}}$$

وابستگی μ به دما برای مایعات

➤ تغییرات ویسکوزیته مایع با دما با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$\mu = \frac{Nh}{\bar{v}} \exp\left(\frac{3.8T_b}{T}\right)$$

➤ که در این رابطه N عدد آووگادرو، h ثابت پلانک، \bar{v} حجم مولی مایع و T_b دمای مرجع می‌باشد.

➤ بر پایه این رابطه کاهش ویسکوزیته مایعات با افزایش دما تفسیر می‌گردد.

ویسکوزیته سیال غیر نیوتنی

➤ برای بیشتر سیالها می توان نوشت:

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dU_x}{dy}$$

η تابعی از τ_{yx} یا du_x/dy است.

➤ اگر η با افزایش نرخ تنش برشی (Shear Rate, $-du_x/dy$) کاهش یابد، سیال پلاستیک سا (Pseudoplastic) و اگر افزایش یابد سیال دیلاتنت (Dilatant) است.

➤ اگر η تابعی از تنش برشی نباشد، سیال نیوتنی است:

$$\eta = \mu$$

ویسکوزیته سیال غیر نیوتنی

در این رابطه ویسکوزیته تابع (τ_{yx}) تنش برشی و یا $\tau = -\eta dU_x/dy$ نرخ تنش می باشد. (du_x/dy)

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{d}{dy} \frac{dx}{dt} = -\mu \frac{d}{dt} \frac{dx}{dy} = -\mu \frac{d}{dt} \gamma$$

$$\tau_{yx} = -\mu \dot{\gamma}$$

$$\frac{1}{\mu} : \text{fluidity}$$

➤ در این بخش با سیالهای غیر نیوتنی، ویسکوزیته آنها و اثر دما بر ویسکوزیته آنها آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

- پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
 - ✓ دسته های سیال غیر نیوتنی را بشناسد.
 - ✓ تفاوت سیال نیوتنی با سیال غیر نیوتنی را بداند.

➤ همان گونه که پیشتر نیز گفته شد، در صنعت در بسیاری از موارد سیال غیرنیوتنیست. شناختن دسته بندی سیالهای غیر نیوتنی و رفتار آنها که از قانون نیوتن به دور است، در طراحی دستگاه های فرآوری، بسته بندی (بسته بندی سس ها و عصاره های مواد خوارکی گوناگون) و نیز کاربری پایانی آنها (مانند نازل های پاشش رنگ) این سیال ها ضروریست.

کاربرد

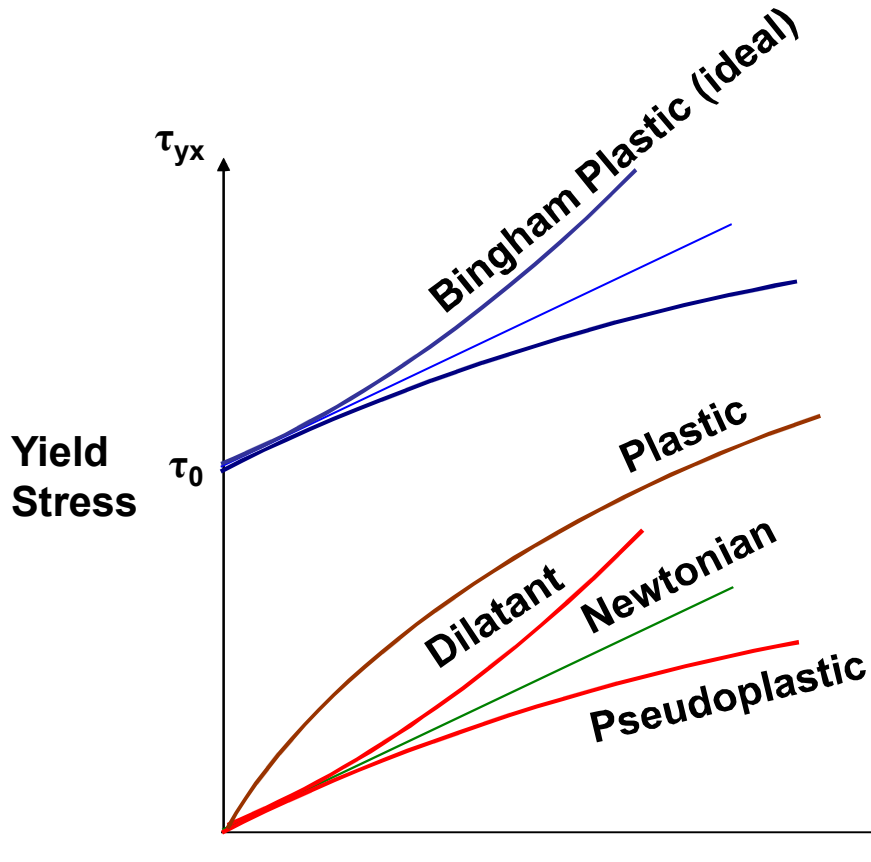


گونه های سیال غیر نیوتنی بر اساس ویسکوزیته

➤ بنا بر چگونگی رفتار سیال در برابر وارد آمدن تنش برشی می توان، دسته های گوناگونی در نظر گرفت. نمونه های از این گونه سیال ها به قرار زیر است:

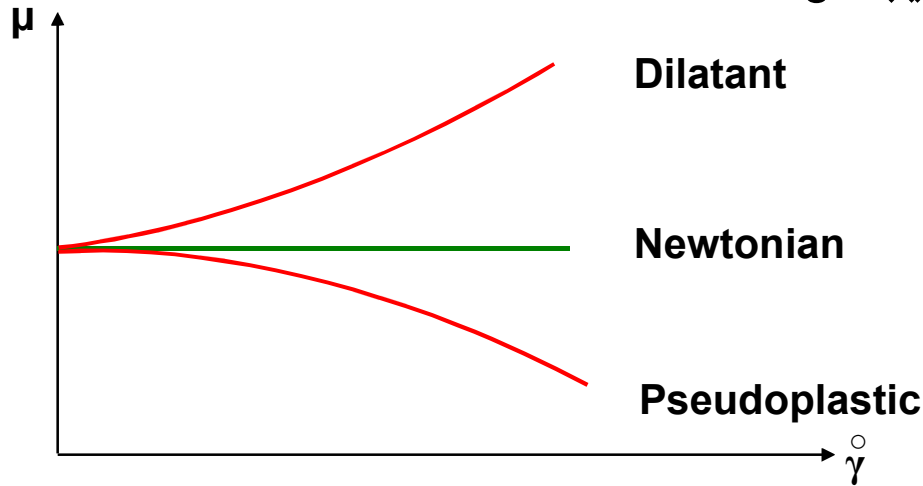
- | | |
|----------------------|----------------|
| 1) Polymeric Liquids | 2) Suspensions |
| 3) Emulsions | 4) Food Sauces |
| 5) Paints | 6) Coatings |
| 7) Blood | 8) Detergents |

ویسکوزیته سیال های غیر نیوتنی



ویسکوزیته سیال های غیر نیوتنی

➤ ویسکوزیته سیال پلاستیک سا با افزایش تنش برشی وارده آمده کاهش می یابد (Shear Thinning) ولی ویسکوزیته سیال دیلاتنت با افزایش تنش برشی افزایش می یابد (Shear Thickening).



➤ مایعات پلاستیک سا و دیلاتنت مایعات Viscous Inelastic هستند.

بررسی گونه های سیال غیر نیوتنی

➤ مایعات پلاستیک سا

✓ در این مایعات بیشتر مولکولهای بزرگ (Macromolecules) در حالت ایستایی (و حتی در Shearهای کوچک) به صورت Random قرار دارند. به همین علت در آغاز حرکت در اثر وارد آمدن تنش برشی، ایستادگی زیادی در برابر حرکت دارند (ویسکوزیته بالا)، اما پس از جریان یافتن سیال و بیشتر شدن نرخ تنش برشی این مولکولهای بزرگ در سوی جریان آرایش می یابد و ایستادگی کمتری در برابر جریان از خود نشان می دهند و ویسکوزیته سیال کاهش می یابد.

بررسی گونه های سیال غیر نیوتنی

➤ مایعات دیلاتنت

✓ این گونه سیالها معمولاً در برگیرنده ذره های جامد سوسپانسیونی (Solid Particle Suspensions) هستند.

✓ در Shear های کوچک مایع به عنوان روانساز (Lubricant) میان ذره های معلق عمل می کند اما در Shear های بزرگ تأثیر روانساز کاهش یافته و در نتیجه اصطکاک میان ذره های معلق و ویسکوزیته افزایش می یابد.

➤ مایعات Viscoplastic

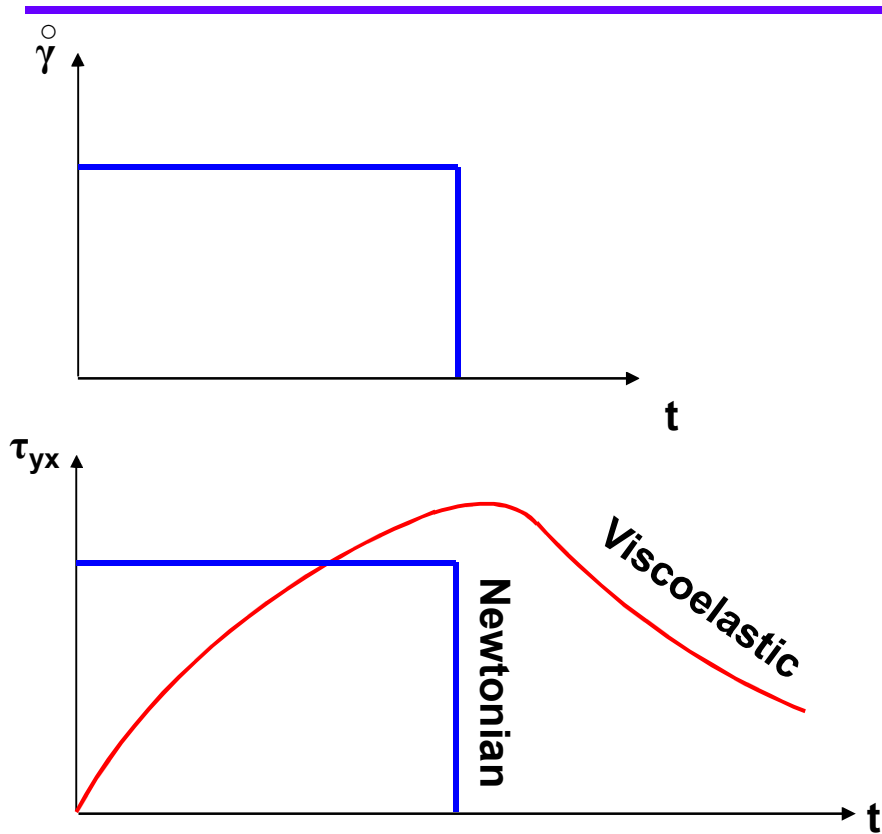
✓ رفتار این مایعات مانند جامدهاست و تا پیش از نقطه تسلیم (Yield Point) اندکی تغییر شکل برگشت پذیر (Elastic Deformation) دارند اما پیش از تنش تسلیم (Yield Stress) ساختمان آنها شکسته می شود و جریان می یابند.

بررسی گونه های سیال غیر نیوتنی

مایعات Viscoelastic ➤

✓ در این گونه سیالها ویژگی کشسانی (Elasticity) با ویژگی ویسکوزیته همراه است. همه مایعات پلیمری (محلول، مذاب و یا سوسپانسیون) در این دسته قرار می گیرند. این مایعات به گونه های متفاوتی در برابر وارد آمدن تنش برشی جریان می یابند که این به ویژگی ویسکوزیته آنهاست. همچنین ویژگی کشسانی آنها به توانایی انعطاف پذیری مولکولهای بزرگ الاستیک در برابر تغییر شکل باز می گردد.

بررسی گونه های سیال غیر نیوتنی



در سیالهای نیوتنی $\dot{\gamma}$ و τ_{xy} هر دو در یک فاز هستند اما در سیالهای Viscoelastic این دو اختلاف فاز دارند.

دسته بندی سیالهای غیرنیوتنی

۱. نیوتنی چون آب، هوا، روغن، محلولهای آبی و گلیسرین
۲. پلاستیک سا چون پلیمرهای محلول و گداخته
۳. دیلاتنت چون امولسیونها و سوسپانسیونها
۴. پلاستیک Bingham چون رنگها، سس مایونز و خمیر دندان
۵. Viscoelastic چون مایعات پلیمری و خمیر نان

تفاوت‌های سیال‌های نیوتنی و غیر نیوتنی

۱. ویسکوزیته سیال‌های نیوتنی ثابت است اما ویسکوزیته سیال‌های غیز نیوتنی تغییر می کند.

۲. نرمال استرس (τ_{xx} ، τ_{yy} و τ_{zz}) برای سیال‌های نیوتنی و سیال‌های Viscous Inelastic برابر است

$$\Rightarrow \tau_{yx} - \tau_{yy} = 0 \quad \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -P$$

اما برای سیال‌های Viscoelastic این مقادارها الراماً برابر نیستند:

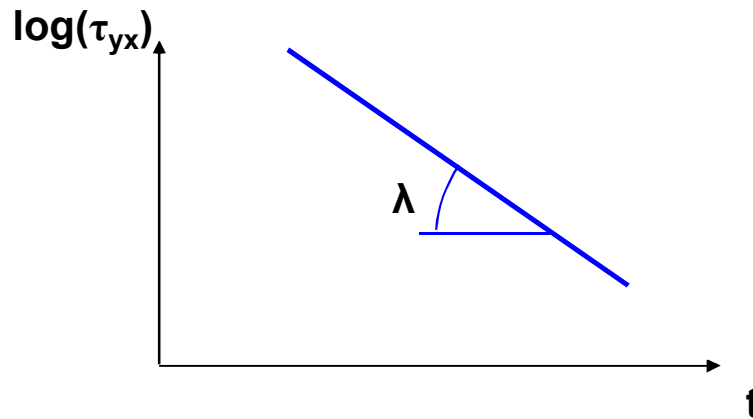
$$\tau_{xx} \neq \tau_{yy} \neq \tau_{zz}$$

۳. Elasticity and time dependent strsses

در سیال‌های نیوتنی Shear Rate & Shear Stress همفاز هستند اما در سیال‌های Viscoelastic به علت وجود مولکول‌های بزرگ کشسان Shear Stress (Elastic Mocromolecules) به صورت نمایی نمو می کند و به همین صورت نیز آزاد می شود.

تفاوت‌های سیالهای نیوتنی و غیر نیوتنی

سرعت آن متناسب با عکس زمان آرامش، λ ، (Relaxation Time) است.



گاهی بنا به نیاز کاربر، بایستی رفتار سیال را در راستای دلخواه تغییر داد. به عنوان نمونه می توان از رفتار خمیر دندان در هنگام بیرون آمدن از لوله اش و یا رنگ پس از پاشش (که باید ویسکوزیته اش به اندازه ای باشد که در لایه مورد نیاز پوشش رنگ جاری نشود) نام برد.

➤ در این بخش با گونه های سیال غیر نیوتنی و تفاوت آنها با سیال های نیوتنی آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷

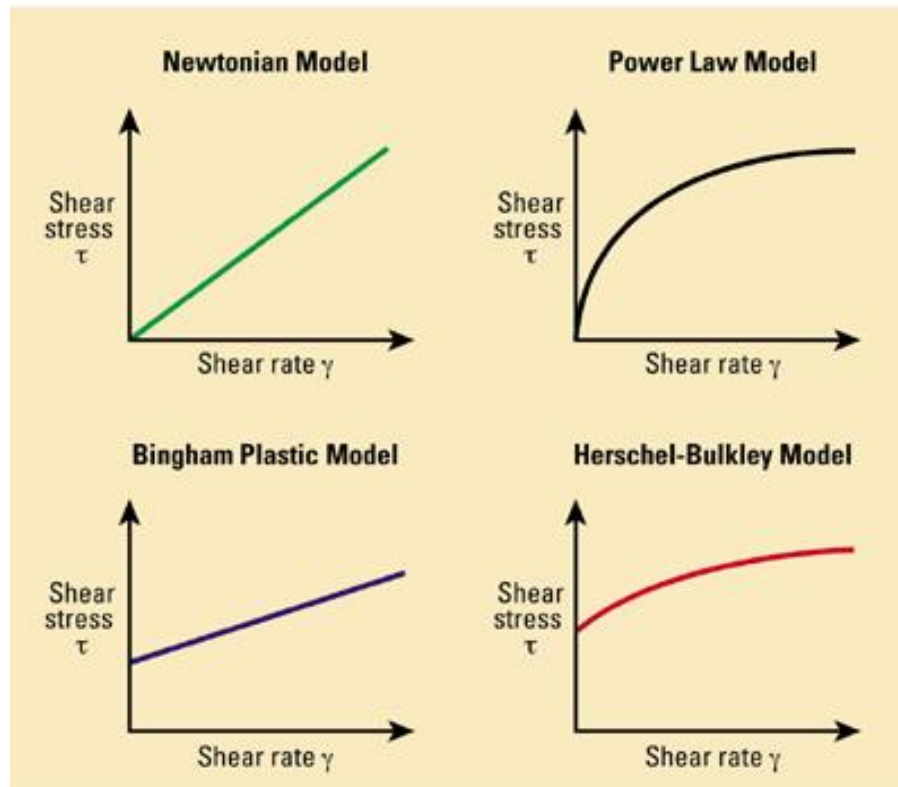


هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
✓ مدل های بیان کننده رفتار ویسکوزیته سیال های غیرنیوتنی را بداند.

➤ برای شناختن و طراحی دستگاه های فرآوری و یا کاربری سیال های غیر نیوتنی نیاز است که مدلی از رفتار سیال در حالت ها گوناگون جریان داشت. مدل های گوناگونی برای ویسکوزیته سیال های غیرنیوتنی گسترش داده شده اند. با دانستن این مدل ها، می توان طراحی دستگاه های و اتصالات گوناگونی را که در فرآوری و کاربری سیال های غیر نیوتنی نیاز است، انجام داد.

Rheological Models



Linear Viscoelastic

(مدل ماکسول)

رفتار حضور همزمان ویژگیهای Viscous & Elastic را که به صورت خطی تغییر می کنند، بیان می کند. ➤

$$\tau_E = E \gamma_E \text{ (Young Module)}$$

$$\tau_V = \mu \dot{\gamma}_V$$

قانون هوک

قانون نیوتن

مدل ماکسول: ➤

فرضها مدل: ➤

$$A) \tau_E = \tau_V = \tau$$

$$B) \gamma_E + \gamma_V = \gamma$$

Linear Viscoelastic

(مدل ماکسول)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_E}{dt} + \frac{d\gamma_V}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\mu}$$


$$\Rightarrow \tau + \frac{\mu}{E} \frac{d\tau}{dt} = \mu \frac{d\gamma}{dt}$$

$\frac{\mu}{E} = \lambda$, in which λ is Relaxation Time (زمان آرامش)

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = \mu \dot{\gamma}, \text{ Maxwell Equation}$$

Linear Viscoelastic

(مدل ماکسول)

هرگاه سیال تحت تاثیر یک نرخ تغییر شکل ثابت (Shear Rate)، $\dot{\gamma}$ ، قرار گیرد: 

$$\dot{\gamma} = cte \Rightarrow \dot{\tau} + \frac{1}{\lambda} \tau = \frac{\mu}{\lambda} \dot{\gamma}$$

$$\Rightarrow \tau = \mu \dot{\gamma} (1 - \exp(-t/\lambda)) \quad (I)$$

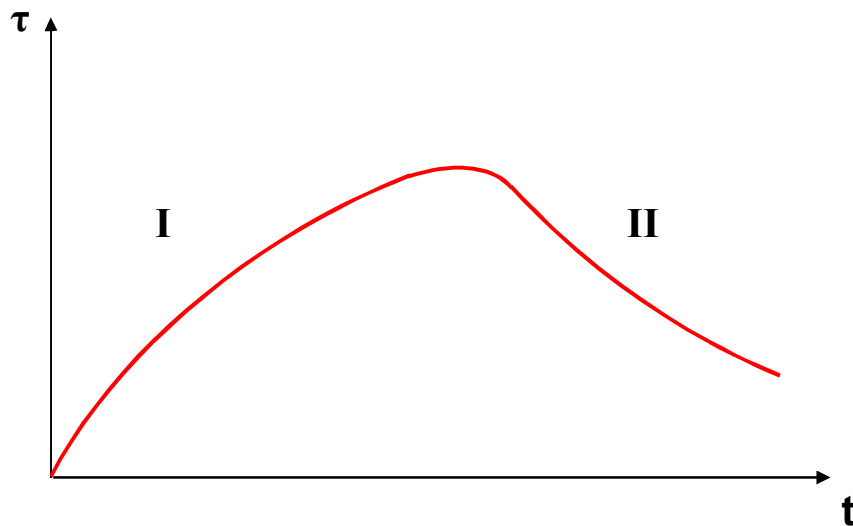
و اگر آن نرخ تنش برشی برداشته شود، می توان نوشت:

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = 0, \quad \text{at } t = 0 : \tau = \tau_0, \dot{\gamma} = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \tau_0 \exp(-t/\lambda) \quad (II)$$

Linear Viscoelastic

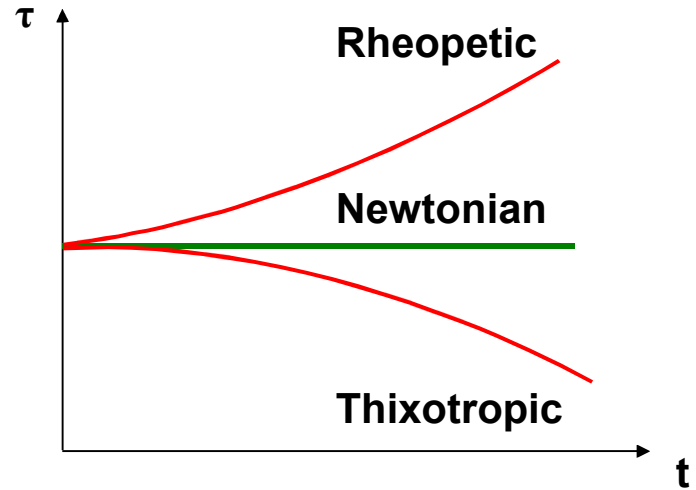
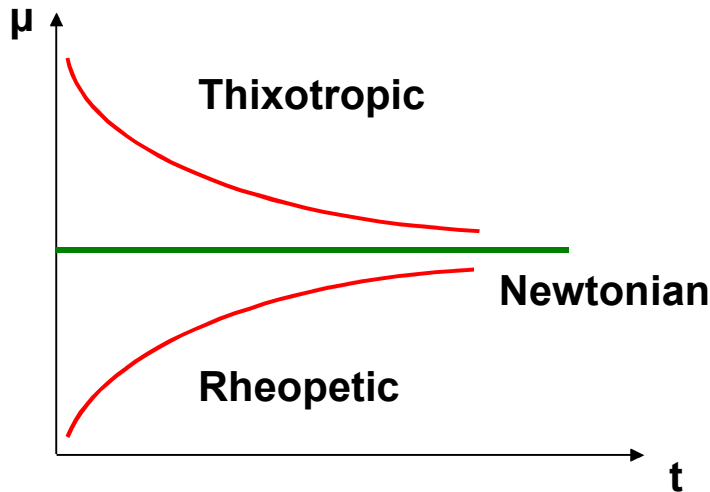
(مدل ماکسول)



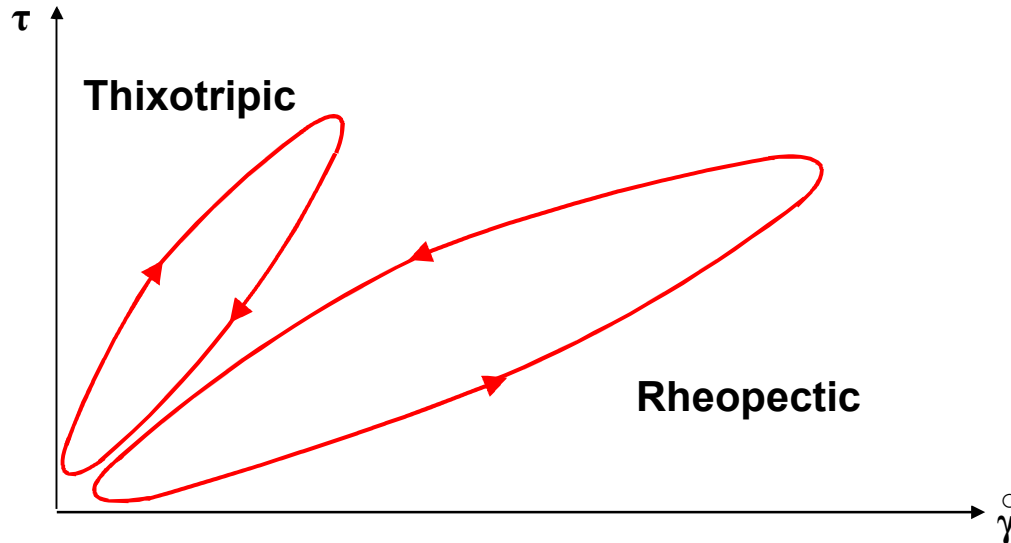
تغییر ویسکوزیته با زمان

- در برخی سیالها، ویسکوزیته با زمان تغییر می کند.
- هرگاه ویسکوزیته با زمان کاهش یابد، سیال را Thixotropic نامند و این گونه سیالها بسیار رایجند.
- در حالتی که ویسکوزیته با گذشت زمان افزایش یابد، سیال Rheopectic نامیده می شود.
- در هر دو مورد ویسکوزیته با گذشت زمان به سوی مقدار ثابتی میل می کند.

تغییر ویسکوزیته با زمان



تغییر ویسکوزیته با زمان



از دسته سیالهای Thixotropic می توان گریسها، مارگارین و گل حفاری را نام برد و گچ (دوغابی)، رس بنتونیت، V_2O_5 و اولئات آمونیوم و برخی از سوسپانسیونها در دسته سیالهای Rheopectic قرار می گیرند.

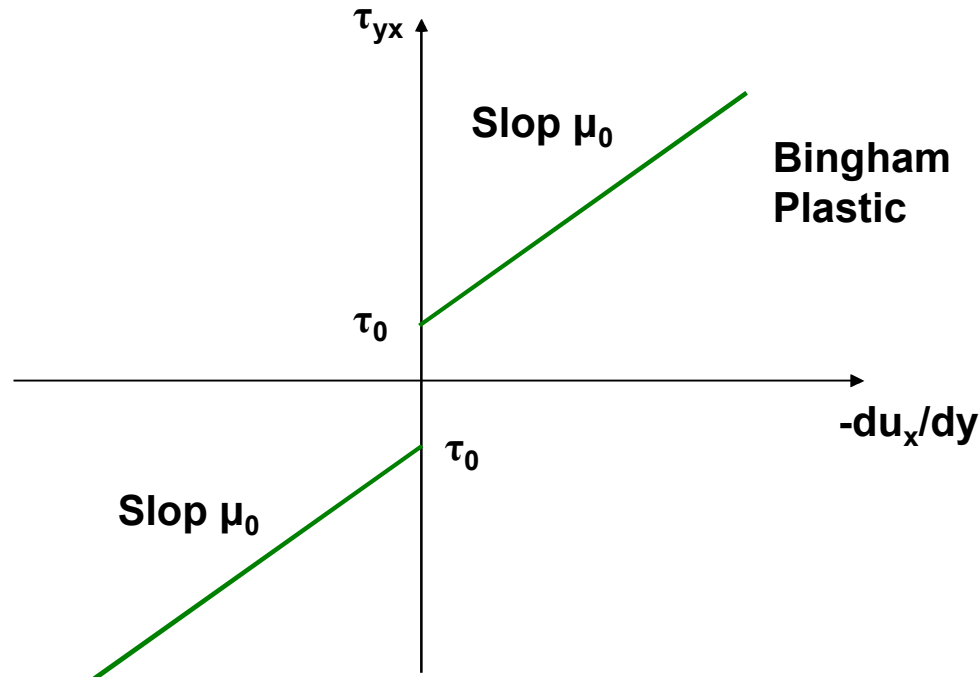
نمونه مدل‌های غیر نیوتنی (دو پارامتری)

➤ Bingham Model

$$\tau_{yx} = -\mu_0 \frac{du_x}{dy} \pm \tau_0 \quad \text{if } |\tau_{yx}| > \tau_0$$

$$\frac{du_x}{dy} = 0 \quad \text{if } |\tau_{yx}| < \tau_0$$

نمونه مدل‌های غیر نیوتنی (دو پارامتری)



تا هنگامی که Shear Stress اعمال شده کمتر از τ_0 باشد پلاستیک سخت (Rigid) است، اما پس از آن رفتاری چون سیالهای نیوتنی دارد. ➤

نمونه مدل‌های غیر نیوتنی (دو پارامتری)

➤ Oswald –de Wale Model

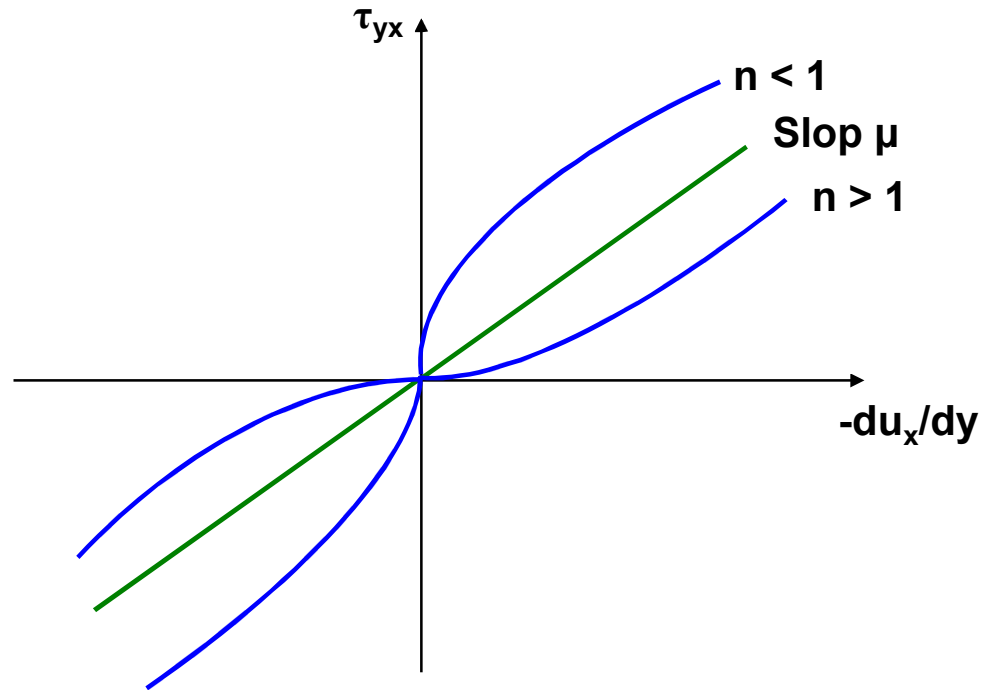
$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{du_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{du_x}{dy} \quad (\text{Power Law})$$

if $n = 1$: $m = \mu$, Newtonian Fluid

if $n < 1$: Pseudoplastic Fluid

if $n > 1$: Dilatant Fluid

نمونه مدل‌های غیر نیوتنی (دو پارامتری)



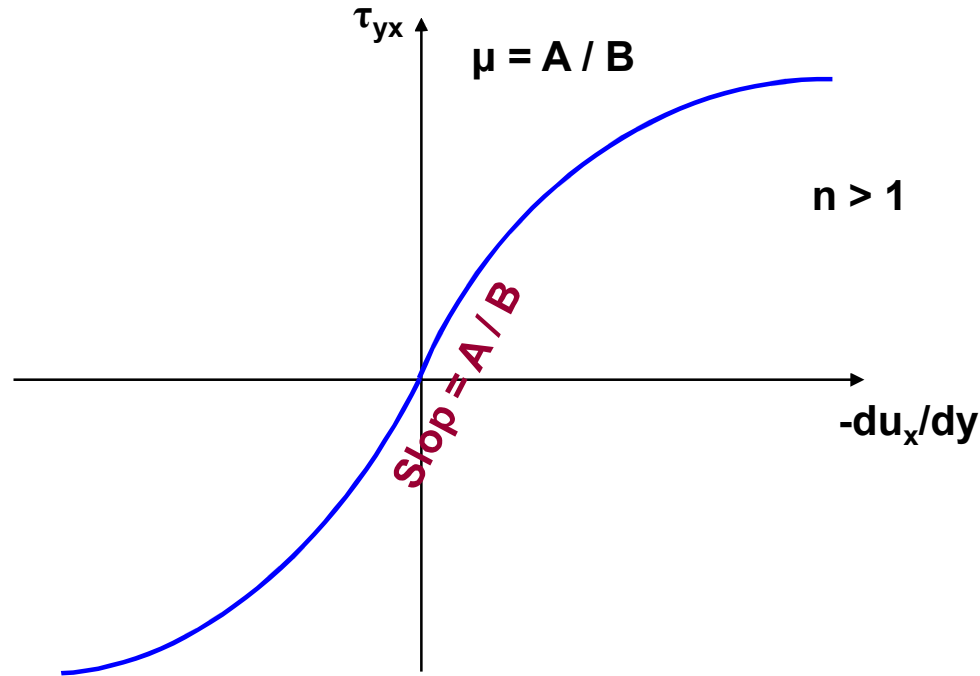
نمونه مدل‌های غیر نیوتنی (دو پارامتری)

➤ Eyring Model

$$\tau_{yx} = A \operatorname{arcsinh} \left(-\frac{1}{B} \frac{du_x}{dy} \right)$$

➤ پیش بینی این مدل برای اندازه های کوچک τ_{yx} مانند رفتار سیالهای نیوتنی می شود.

نمونه مدل‌های غیر نیوتنی (دو پارامتری)



این مدل برای سیالهای پلاستیک سا به کار می رود زیرا شیب آن با افزایش du_x/dy کاهش می یابد

نمونه مدل‌های غیر نیوتنی (سه پارامتری)

➤ Ellis Model

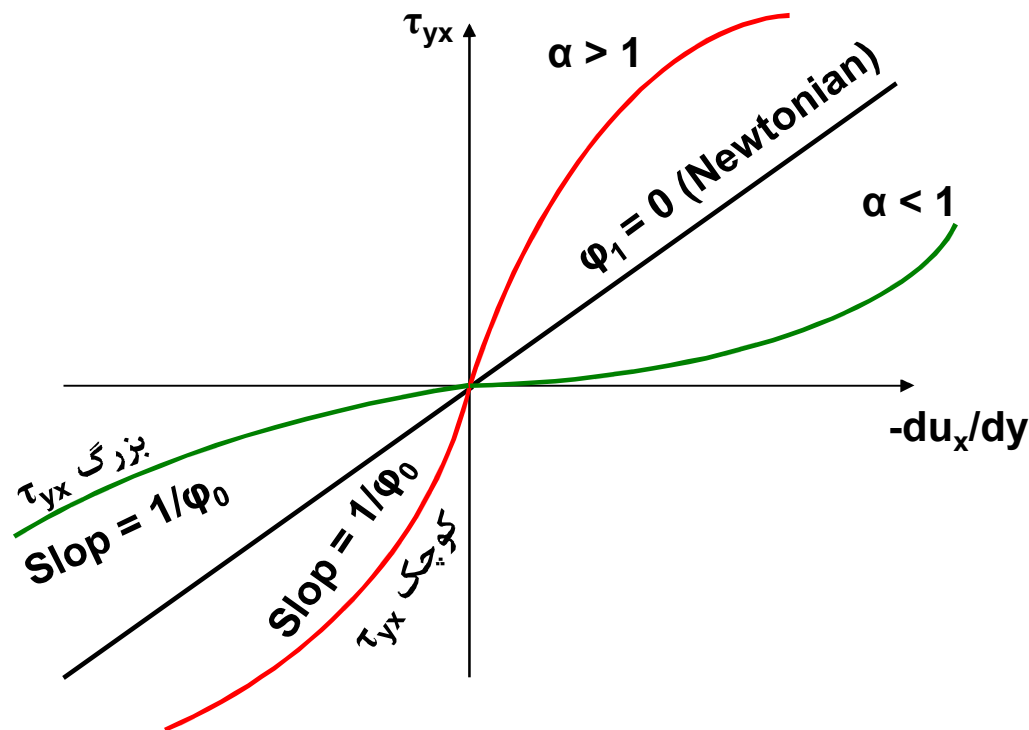
$$-\frac{du_x}{dy} = \left(\varphi_0 + \varphi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1} \right) \tau_{yx}$$

➤ اگر $\alpha > 1$ باشد و نیز τ_{yx} کوچک باشد، این مدل به سوی مدل سیال نیوتنی (قانون ویسکوزیته نیوتن) با $\mu = 1/\varphi_0$ میل می‌کند. همچنین اگر $\alpha < 1$ باشد و نیز τ_{yx} بزرگ باشد، باز مدل به سوی سیال نیوتنی با $\mu = 1/\varphi_0$

می‌رود.

نمونه مدل‌های غیر نیوتنی (سه پارامتری)

در این مدل اگر $\varphi_1 = 0$ باشد، مدل همان مدل قانون ویسکوزیته نیوتن است و اگر $\varphi_0 = 0$ باشد، مدل به مدل قانون نما (Power Law) ساده می شود.



نمونه مدل‌های غیر نیوتنی (سه پارامتری)

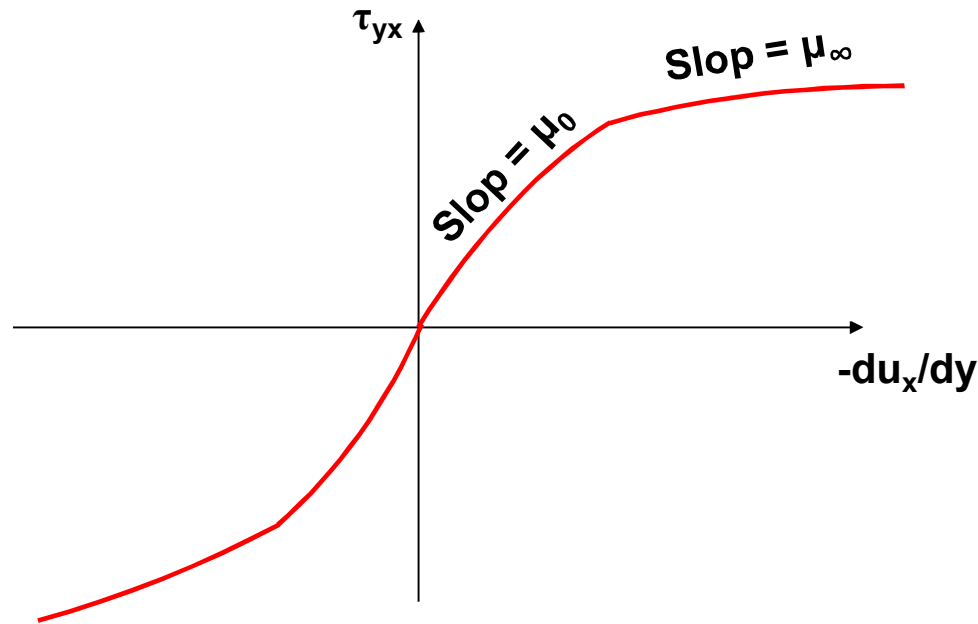
➤ Reiner-Philippoff Model

$$-\frac{du_x}{dy} = \left(\frac{1}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau_{yx}/\tau_s)^2}} \right) \tau_{yx}, \quad \mu_\infty < \mu_0$$

➤ از آنجاییکه سیالها در Shear Rate های خیلی کوچک و خیلی بزرگ رفتار نیوتنی از خود نشان می دهند، این مدل برای Shear Rate های خیلی کوچک ($\mu = \mu_0$) و خیلی بزرگ ($\mu = \mu_\infty$) همان رفتار را پیش بینی می کند.

نمونه مدل‌های غیر نیوتنی (سه پارامتری)

در این مدل در نرخ برشی (Shear Rate) های کوچک و بزرگ سیال نیوتنی می شود. ➤



➤ در این بخش با مدل های تشریح کننده رفتار ویسکوزیته سیال های غیر نیوتنی آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ دستگاه های گوناگون اندازه گیری ویسکوزیته سیالهای غیر نیوتنی را از دید ساختار و تئوری حاکم بر شیوه اندازه گیری آنها بشناسد.

➤ از آن رو که رفتار سیال های غیر نیوتنی در بیشتر موارد غیر خطیست، برای اندازه گیری ویسکوزیته این سیال ها و به دست آوردن داده های مورد نیاز در مدل های گوناگونی که در بخش پیش بررسی شد، دستگاه های ویژه ای طراحی شده اند که در این بخش با برخی از آنها آشنا می شویم.

کاربرد



دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

1) Falling Sphere

همانگونه که پیش از این نیز دیده شد، در این روش برای اندازه گیری ویسکوزیته با فرض آنکه شرایط جریان خرسی برقرار باشد ($N_R < 0.1$) ضریب دراگ با رابطه $C_D = 24 / N_R$ تعیین می شود و نیروی دراگ با رابطه:

Drag Force: $F = 6\pi\mu V_t R$ Stock's Law

$$\sum F = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$$

$$-6\pi\mu V_t R = 0 \Rightarrow \mu = \frac{2}{9} \frac{gR^2}{V_t} (\rho_s - \rho)$$

که در این رابطه ها V_t سرعت پایانی (سرعت حد Terminal Velocity)، شعاع کره ای سقوط کننده در سیال، ρ_s و ρ به ترتیب دانسیته کره و سیال هستند.

تمرین ۱

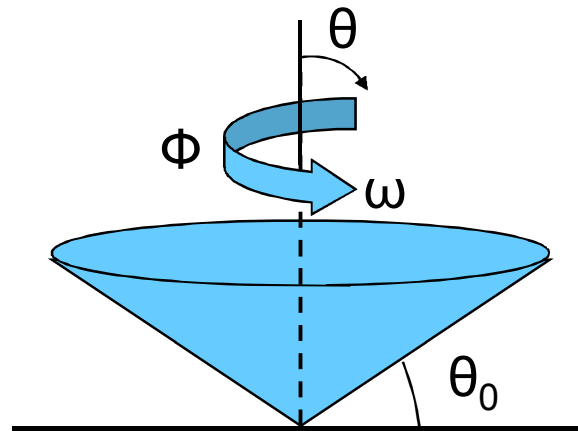
➤ یک گلوله با شعاع ۱۰ cm در یک نمونه نفت با درجه API برابر ۵۰ به سوی پایین حرکت می کند. سرعت پایانی و نیز کمینه شعاع گلوله برای برقراری قانون استاکس را بیابید.

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته


2) Cone and Plate Viscometer

این دستگاه در برگیرنده صفحه تخت ساکن و یک مخروط وارونه دوار می باشد و برای تغییر شکلهای میانه به کار می رود.

مخروط با سرعت زاویه ای معینی می چرخد. با داشتن گشتاور وارده می توان ویسکوزیته سیال را به دست آورد.



دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

با ساده کردن معادله حرکت در راستاهای r ، θ و Φ می توان نوشت: 

$$r \text{ direction: } -\rho \frac{V_\phi^2}{r} = -\frac{dP}{dr}$$

$$\theta \text{ direction: } -\rho \cot \theta \frac{V_\phi^2}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dP}{d\theta}$$

$$0 = -\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + 2 \cot \theta \frac{\tau_{\theta\phi}}{r} \right)$$

جریان خزشی (Creeping Flow) فرض می شود.

$$B.C.s : V_r = V_\theta = 0 \Rightarrow V_\phi = V(r, \theta)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \Rightarrow \tau_{r\phi}, \tau_{\theta\phi} \neq 0$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$V_\phi \cong 0 \Rightarrow V_\phi^2 = 0$$

➤ بنابراین معادله در راستای Φ باقی می ماند.

$$V_\phi = V(r, \theta) = rf(\theta)$$

➤ علت انتخاب این شکل آن است که شرایط مرزی را در بر می گیرد.

$$\text{at } \theta = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \Rightarrow V_\phi = r\omega$$

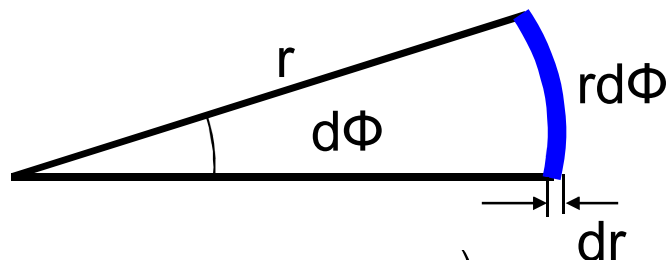
$$\text{at } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V_\phi = 0$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$\frac{V_\phi}{r} = f(\theta) \neq g(r) \Rightarrow \tau_{r\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau_{\theta\phi}}{d\theta} = -2 \cot \theta \tau_{\theta\phi} \Rightarrow \tau_{\theta\phi} = \frac{A}{\sin^2 \theta}$$

برای محاسبه A فرض می شود که گشتاور وارد شده به صفحه ثابت (τ) معلوم باشد: ➤



$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \times \left(\tau_{\theta\phi} \Big|_{\theta=\pi/2} \times r \times dr \times d\phi \right)$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$A = \frac{3T}{2\pi R^3} \Rightarrow \tau_{\theta\phi} = \frac{3T}{2\pi R^3 \sin^2 \theta}$$

در سیستم مختصات کروی ➤

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right]$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$\Rightarrow \frac{3T}{2\pi R^3 \sin^2 \theta} = -\mu \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\frac{V_\phi / r}{\sin \theta} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{3T}{2\pi R^3} = A$$

$$\frac{V_\phi}{r} = f(\theta)$$

$$\frac{A}{\sin^2 \theta} = -\mu \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\frac{f(\theta)}{\sin \theta} \right)$$

$$\Rightarrow f'(\theta) \sin \theta - f(\theta) \cos \theta + \frac{A}{\mu \sin \theta} = 0$$

$$\Rightarrow f'(\theta) - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} f(\theta) + \frac{A}{\mu \sin^2 \theta} = 0$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$f(\theta) = U(\theta) \times V(\theta)$$

$$V(\theta) = \exp\left[-\int\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta\right] = \sin\theta$$

$$U(\theta) = \int\left(\frac{-A/\mu \sin\theta}{\sin\theta}\right)d\theta + B$$

$$U(\theta) = \frac{A}{\mu} \cot\theta + B$$

$$f(\theta) = \sin\theta \left[\frac{A}{\mu} \cot\theta + B \right]$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$\frac{V_\phi}{r} = \sin \theta \left[\frac{A}{\mu} \cot \theta + B \right]$$

$$B.C.1: \text{at } \theta = \frac{\pi}{2} : V_\phi = 0$$

$$B.C.2: \text{at } \theta = \frac{\pi}{2} - \theta_0 : V_\phi = r\omega \Rightarrow B = 0$$

$$\omega = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \left[\frac{A}{\mu} \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right]$$

$$\omega = \cos \theta_0 \left[\frac{A}{\mu} \operatorname{tg} \theta_0 \right] = \frac{A}{\mu} \sin \theta_0$$


دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$\Rightarrow \frac{V_\phi}{r} = \sin \theta \frac{\omega}{\sin \theta_0} \cot \theta_0 = \omega \frac{\cos \theta}{\sin \theta_0}$$

$$\Rightarrow \frac{V_\phi}{r} = \omega \frac{\cos \theta}{\sin \theta_0}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{A \sin \theta_0}{\omega} = \frac{3T \sin \theta_0}{2\pi R^3 \omega}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{3T \sin \theta_0}{2\pi R^3 \omega}$$

برای هر مقدار معین τ (که در حقیقت گشتاور لازم برای ثابت نگه داشتن صفحه زیرین می باشد) مقادیر $\tau_{\theta\phi}$ بر حسب μ رسم می شود. 

تمرین ۲:

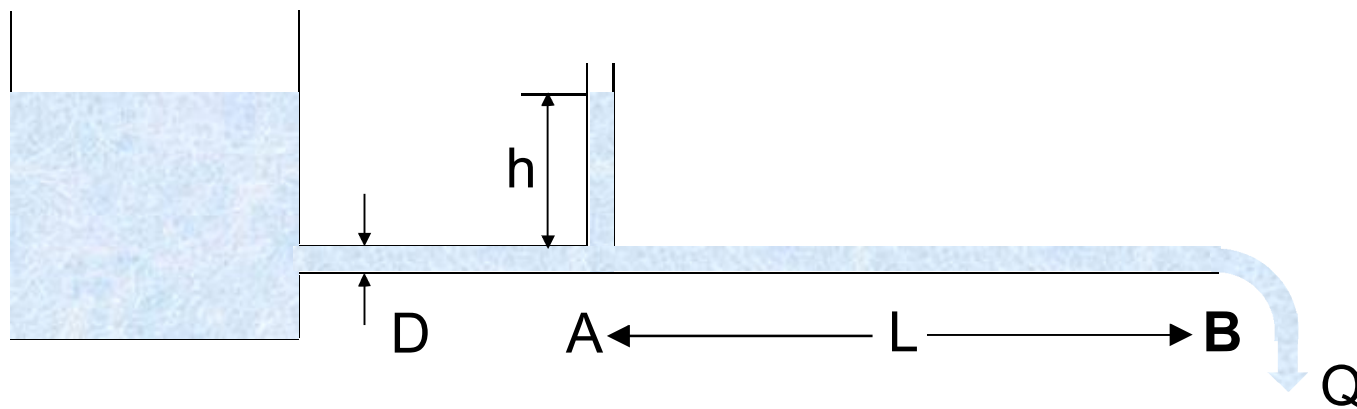
داده های زیر با به کار گیری یک Cone and Plate Viscometer (با $\theta_0 = 0.1 \text{ rad}$ & $R = 2.5 \text{ cm}$) برای یک سیال به دست آمده است. با مدل‌های موجود سیال و ویژگی‌های آن را بررسی نمایید.

| ω (rad / s) | T (N. m) |
|--------------------|----------|
| 0.0001 | 0.0033 |
| 0.001 | 0.03 |
| 0.01 | 0.26 |
| 0.1 | 1 |
| 1 | 2.2 |
| 10 | 9.3 |
| 100 | 66 |

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

3) Capillary rheometer (Viscometer)

این دستگاه شامل یک تانک، یک لوله افقی، و یک لوله عمودی متصل به لوله افقی باز به اتمسفر، برابر شکل زیر، است. از این دستگاه برای نرخ بالای تنش برشی (High Shear Rates) بهره گرفته می شود.



دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

➤ با توجه به نمای شماتیک این دستگاه و با فرض جریان آرام، می توان معادله Hagen – Poiseuille را نوشت:

$$P_A - P_B = \frac{128 QL \mu}{\pi D^4}$$

➤ از دیگر سو تفاوت فشار دو نقطه A و B را می توان برابر ارتفاع ستون مایع دانست:

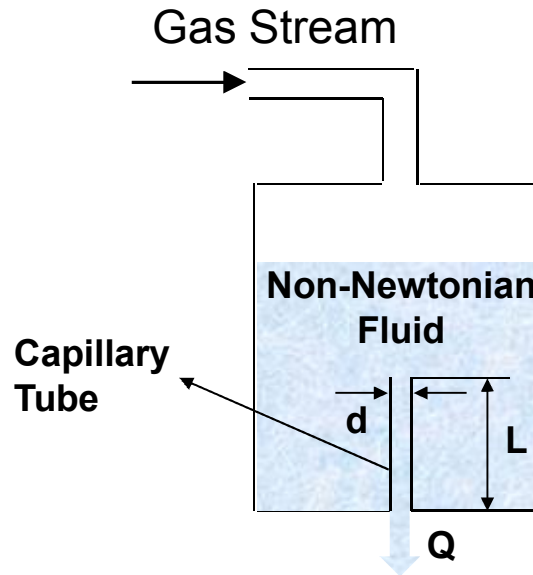
$$P_A - P_B = \rho gh$$

➤ با برابر قرار دادن این دو رابطه، می توان نوشت:

$$\Rightarrow \mu = \frac{\pi D^4 \rho g \left(\frac{h}{L} \right)}{128 Q}$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

چنین ویسکوزیته سنجی را با نام **Oswald Viscometer** نیز می شناسند. همین دستگاه را می توان برابر شکل زیر به صورت عمودی نیز ساخت:



دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

➤ با در نظر گرفتن ویژگی های زیر برای جریان، می توان رابطه تئوری محاسبه ویسکوزیته را با موازنه نیروها در راستای محور لوله موئینه به دست آورد:

✓ توسعه یافته

✓ پایا

✓ آرام

$$\Delta P \pi \frac{d^2}{4} = \tau_0 \pi d L \Rightarrow \tau_0 = \frac{\Delta P d}{4L}$$

➤ در راستای شعاعی نیز می توان نوشت:

$$\tau_{rx} = \frac{\Delta P r}{2L} \Rightarrow \tau_{rx} = \tau_0 \frac{r}{R}$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

المان دبی حجمی را می توان به صورت زیر نوشت: ➤

$$dQ = U(2\pi r)dr \Rightarrow Q = \int_0^R U(2\pi r)dr$$

$$\int_0^R d(Ur^2) = \int_0^R U d(r^2) + \int_0^R r^2 dU$$

$$Ur^2 \Big|_0^R = \int_0^R U d(r^2) + \int_0^R r^2 \frac{dU}{dr} dr$$

$$Q = \frac{\pi r^2 U \Big|_0^R}{\text{No Slip}=0} - \pi \int_0^R \frac{dU}{dr} r^2 dr = \pi \int_0^R \gamma r^2 dr$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$Q = \pi \int_0^{\tau_0} \gamma \left(\frac{\tau_{rx} R}{\tau_0} \right)^2 \frac{R}{\tau_0} d\tau_{rx}$$

$$Q = \pi \int_0^{\tau_0} \gamma \tau_{rx}^2 \frac{R^2}{\left(\frac{\Delta P d}{4L} \right)^2} \frac{R}{4L} d\tau_{rx}$$

$$Q = \frac{\pi R^3}{(\Delta P d)^3} 64L^3 \int_0^{\tau_0} \gamma \tau_{rx}^2 d\tau_{rx}$$

$$Q = \frac{8\pi R^3}{\Delta P^3} \int_0^{\tau_0} \gamma \tau_{rx}^2 d\tau_{rx}$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

با نوآرایی معادله پایانی، می توان نوشت: ➤

$$\gamma = \frac{Q}{\pi R^3} \left[3 + \frac{d(\ln Q)}{d(\ln \Delta P)} \right]$$

$$\tau = \frac{\Delta P}{\Delta L} \frac{R}{2}$$

$$U = 2V \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

$$-\frac{dU}{dr} = 2V \frac{2r}{R^2} \Big|_{r=R} = \frac{4V}{R} = \frac{8V}{D}$$


دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$\left(-\frac{dU}{dr}\right)_{w(r=R)} = \frac{3}{4}\left(\frac{8V}{D}\right) + \frac{8V}{D} \frac{d\left[\frac{1}{4}\left(\frac{8V}{D}\right)\right]}{d\left[\frac{D\Delta P}{4L}\right]} \bigg/ \left(\frac{8V}{D}\right) \bigg/ \left(\frac{D\Delta P}{4L}\right)$$

$$\left(-\frac{dU}{dr}\right)_{w(r=R)} = \frac{8V}{D} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{d \ln\left(\frac{8V}{D}\right)}{d \ln\left(\frac{D\Delta P}{4L}\right)} \right]$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$n = \frac{d \ln\left(\frac{D\Delta P}{4L}\right)}{d \ln\left(\frac{8V}{D}\right)} \Rightarrow \left(-\frac{dU}{dr}\right)_w = \frac{3n+1}{4n} \frac{8V}{D}$$

برای جریان آرام سیال نیوتنی می توان معادله Poiseuille را نوشت: 

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{32\mu V}{D^2} \Rightarrow \frac{D\Delta P}{4L} = \frac{8V}{D} \mu$$

$$\Rightarrow \ln \frac{D\Delta P}{4L} = \ln \frac{8V}{D} + \ln \mu$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

➤ از آنجایی که ویسکوزیته سیال نیوتنی ثابت است ($\mu = cte$):

$$\frac{d \ln\left(\frac{D\Delta P}{4L}\right)}{d \ln\left(\frac{8V}{D}\right)} = n = 1$$

➤ بنابراین برای سیال نیوتنی:

$$\left(-\frac{dU}{dr}\right) = \frac{8V}{D}$$

➤ اما در حالت کلی مقدار n ثابت نیست و منحنی نمایی $8V/D$ بر حسب $D\Delta P/4L$ به صورت خط راست نمی باشد.

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

با استفاده از رابطه های به دست آمده می توان نوشت: ➤

$$n = \frac{d \ln\left(\frac{D\Delta P}{4L}\right)}{d \ln\left(\frac{8V}{D}\right)} \Rightarrow \tau_w = \frac{D\Delta P}{4L} = K\left(\frac{8V}{D}\right)^n$$

این معادله مانند معادله قانون نما (Power Law) است: ➤

$$A = \frac{D\Delta P}{4L} \text{ \& } B = \frac{8V}{D} \Rightarrow d \ln A = nd \ln B$$

$$\ln A = n \ln B + \ln K$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

➤ در هنگام به دست آوردن این معادله ها فرض بر آن شد که جریان سیال آرام است. برای سنجیدن درستی این فرض باید برآوردی از عدد رینولدز عمومی شده (Generalized Reynolds Number) به دست آورد:

$$R_{eg} = \frac{D^n V^{2-n} \rho}{K 8^{n-1}} < 2100$$

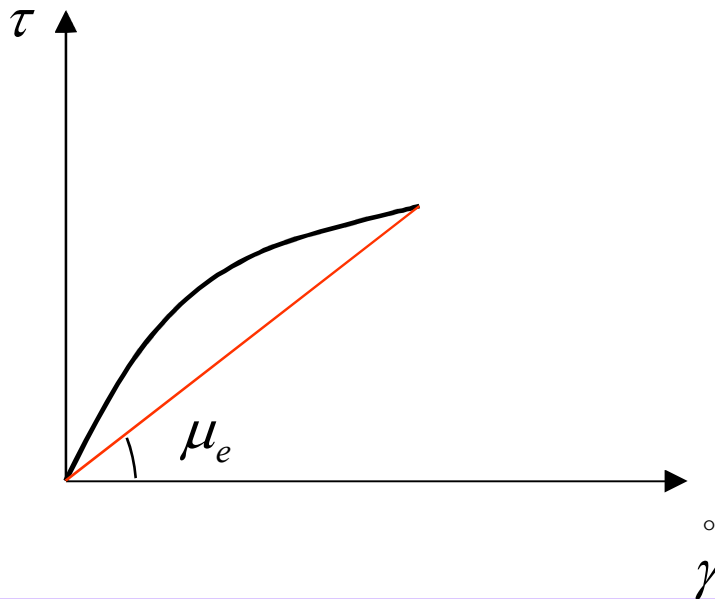
$$R_{eg} = \frac{\rho V D}{\mu_e}$$

➤ که در این رابطه μ_e ویسکوزیته موثر است:

$$\mu_e = \frac{\tau_w}{\left(\frac{8V}{D}\right)} g_c$$

ویسکوزیته موثر (*Effective Viscosity*)

در هر نرخ تنش (Shear Rate) اگر خطی از مبدا مختصات به منحنی تنش برشی (Shear Stress) وصل شود، شیب خط برابر همان ویسکوزیته موثر (μ_e) می باشد.



$$\mu_e = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

تمرین ۳

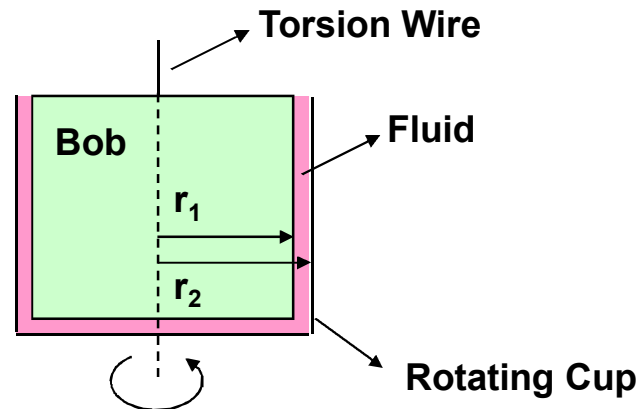
داده های زیر برای سیالی با دانسیته 70 lbm/ft^3 در دمای 70°F با دستگاه اندازه گیری ویسکوزیته موئینه (Capillary Rheometer) به دست آمده است. در مورد این سیال چه چیزی می توان گفت؟

| افت فشار (psi) | دبی جرمی (lbm/hr) | طول لوله (in) | قطر لوله (in) |
|----------------|-------------------|---------------|---------------|
| ۴۴۵ | ۸۹۴/۰ | ۵ | ۰.۵/۰ |
| ۱۶۷ | ۱۲۹/۰ | ۵ | ۰.۵/۰ |
| ۳۳۳ | ۴۳۵/۳ | ۱۰ | ۱.۰/۰ |
| ۱۲۵ | ۶۴۲/۰ | ۱۰ | ۱.۰/۰ |
| ۱۸۵ | ۲۱/۸ | ۱۰ | ۱.۵/۰ |
| ۵/۵۵ | ۱۶/۱ | ۱۰ | ۱.۵/۰ |

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

4) Concentric Cylinder Rotary Viscometer

نمای این دستگاه در شکل زیر نمایش داده شده است. ➤



در این دستگاه، استوانه بیرونی (Rotating Cap) با سرعت زاویه ای ω دوران می کند و گشتاور وارد شده بر استوانه درونی (Bob) اندازه گیری می شود. ➤

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

➤ در این دستگاه می توان نوشت:

$$\text{Bob: } r = r_1,$$

$$\text{Cup: } r = r_2 (\omega),$$

➤ در این شرایط، معادله حرکت در راستای θ به صورت زیر نوشته می شود:

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}) \Rightarrow r^2 \tau_{r\theta} = C \Rightarrow \tau_{r\theta} = \frac{C}{r^2}$$

$$\text{at } r = r_1, \tau_{r\theta} = \frac{C}{r_1^2}$$

$$M = \frac{C}{r_1^2} \times 2\pi r_1 \times 1 \times r_1 = 2\pi C \Rightarrow C = \frac{M}{2\pi} \Rightarrow \tau_{r\theta} = \frac{M}{2\pi r^2}$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$\dot{\gamma} = \frac{dV_{\theta}}{dr} \Rightarrow \dot{\gamma} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{V_{\theta}}{r} \right) \quad \left(\dot{\gamma} = r \frac{d\omega}{dr} \right)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{V_{\theta}}{r} \right) = f(\tau_{r\theta}) = f\left(\frac{M}{2\pi r^2} \right)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{V_{\theta}}{r} \right) = \frac{1}{r} f\left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) \Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} d\left(\frac{V_{\theta}}{r} \right) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} f\left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) dr$$

$$\left. \frac{V_{\theta}}{r} \right|_{r_2} - \left. \frac{V_{\theta}}{r} \right|_{r_1} = \int_{r_1}^{r_2} f\left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) \frac{dr}{r}$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$\frac{r_2 \omega}{r_2} - 0 = \omega = \int_{r_1}^{r_2} f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right) \frac{dr}{r}$$

$$\omega = \int_{r_1}^{r_2} f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right) \frac{dr}{r}$$

$$\text{Power Law: } \tau = k \dot{\gamma}^n \Rightarrow \dot{\gamma} = \left(\frac{\tau}{k}\right)^{1/n}$$

$$\Rightarrow \omega = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\tau_{r\theta}}{k}\right)^{1/n} \frac{dr}{r}$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$\omega = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{M}{2\pi r^2 k} \right)^{1/n} \frac{dr}{r}$$

$$\omega = \frac{n}{2} \left[\frac{M}{2\pi k} \right]^{1/n} \left[\left(\frac{1}{r_1^2} \right)^{1/n} - \left(\frac{1}{r_2^2} \right)^{1/n} \right]$$

$$\gamma^\circ = \left(\frac{\tau}{k} \right)^{1/n} = \left(\frac{M}{2\pi r^2 k} \right)^{1/n}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{n}{2} \gamma^\circ r^{2/n} \left[\left(\frac{1}{r_1^2} \right)^{1/n} - \left(\frac{1}{r_2^2} \right)^{1/n} \right]$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$\dot{\gamma} = \frac{2\omega}{nr^{2/n} \left(\left(\frac{1}{r_1^2} \right)^{1/n} - \left(\frac{1}{r_2^2} \right)^{1/n} \right)}$$

با تعریف ویسکوزیته ظاهری (Appearance Viscosity) برابر: 

$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

$$\mu_a = \frac{(r_2^2 - r_1^2)M}{4\pi\omega r_1^2 n r_2^2} \left(n \frac{\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{2/n} \right]}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{\frac{2}{n-2}} \right)$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

➤ هر گاه $r_1 \approx r_2$ باشد، آنگاه:

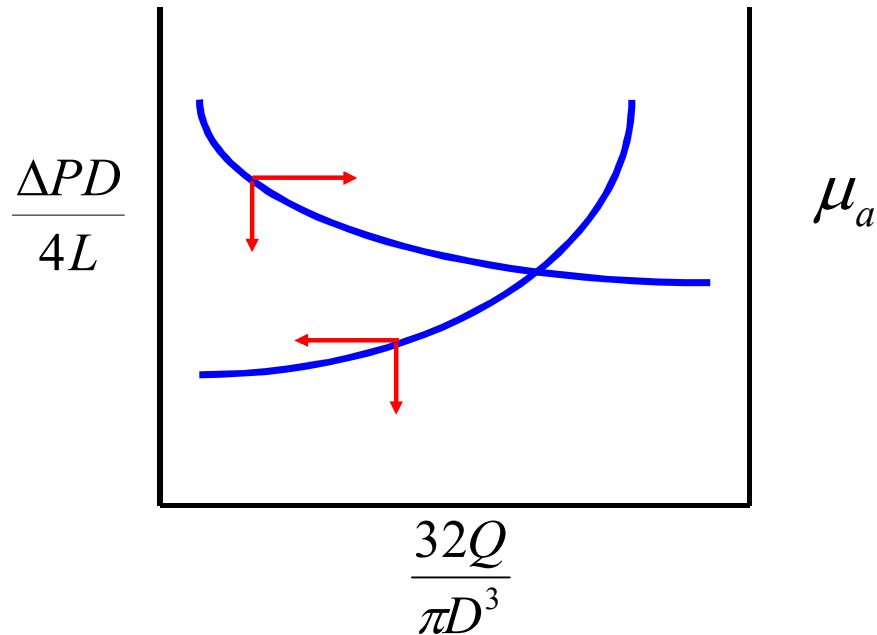
$$\text{if } r_1 \approx r_2 \Rightarrow \frac{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2/n}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \rightarrow 1$$

➤ در جریان آرام می توان نوشت:

$$\pi \frac{D^2}{4} \Delta P = \pi DL \tau \Rightarrow \tau = \frac{\Delta PD}{4L}$$
$$U = 2V \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \Rightarrow \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=R} = \frac{8V}{D}$$

دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

$$\frac{8V}{D} = \frac{Q}{\pi D^3} \Rightarrow \tau = \mu_a \left. \frac{dU}{dr} \right|_R$$



دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

➤ به منظور ارزیابی ویژگی های سیال، باید منحنی تنش برشی و نرخ تنش رسم شود. این منحنی را هر نقطه ای در فاصله Bob تا Cap می توان رسم کرد، اما به صورت معمول روی دیواره استوانه درونی ایستا، رسم می شود. بر روی دیواره استوانه درونی می توان نوشت:

$$\tau_{r_1} = \frac{M}{2\pi r_1^2}$$

➤ با بهره گیری از سری ها می توان نوشت:

$$\dot{\gamma}_{r_1} = \frac{4\pi a^2 \omega}{a^2 - 1} \left[1 + k_1 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) + k_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)^2 \right]$$

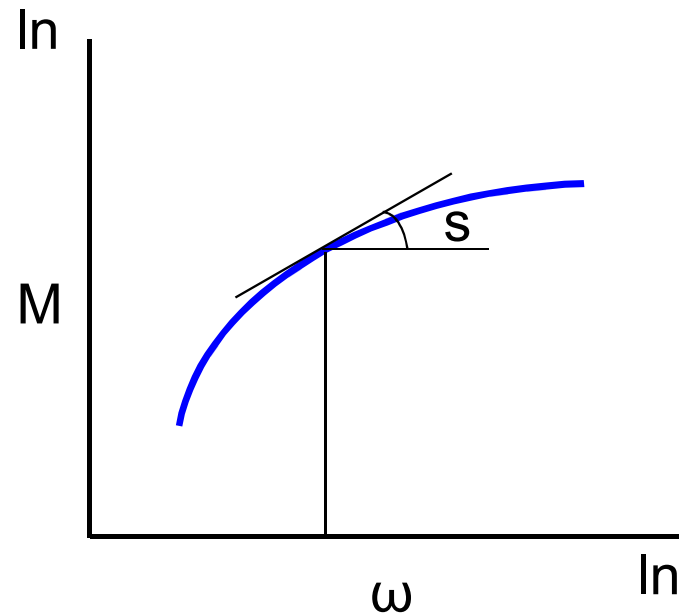
دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

در این معادله: ➤

$$a = \frac{r_2}{r_1}$$

$$k_1 = \frac{a^2 - 1}{2a^2} \left(1 + \frac{2}{3} \ln a \right)$$

$$k_2 = \frac{a^2 - 1}{6a^2} \ln a$$



دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته

- در این نمودار M بر حسب ω در یک مختصات $\log\text{-}\log$ رسم می شود.
- همان گونه که از شکل پیش پیداست، در هر ω ، S شیب منحنی گشتاور (M) در برابر سرعت زاویه ای (ω) است.

تمرین ۵

➤ با یک ویسکوزیته سنج هم مرکز (Concentric Viscometer) با قطر استوانه درونی و بیرونی به ترتیب برابر ۱ و ۱۵/۱ cm سیالی مورد بررسی قرار گرفته شده است. درباره این سیال چه می توان گفت؟

➤ در این بخش با برخی از دستگاه های اندازه گیری ویسکوزیته سیالهای غیرنیوتنی و تئوری حاکم بر شیوه کار آنها آشنا شدیم.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:
✓ در موارد واقعی رفتار سیال ها غیر نیوتنی را مدل نماید.

کاربرد

➤ هر چه مدل های بیان کننده رفتار سیال واقعی تر باشند، دقت بیشتری در پیش بینی رفتار سیال در دنیای واقعی دارند. در این بخش با حل چند تمرین کاربردی به این مهم پرداخته می شود.

کاربرد



مکانیک سیالات پیشرفته

سیالهای غیر نیوتنی

تمرین ۱

مطلوب است محاسبه توزیع سرعت جریان Couette Flow (جریان بین دو صفحه موازی) ➤

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = H \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = 0 \\ u_x = V \end{cases}$$

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = 0$$

1) Newtonian Fluid

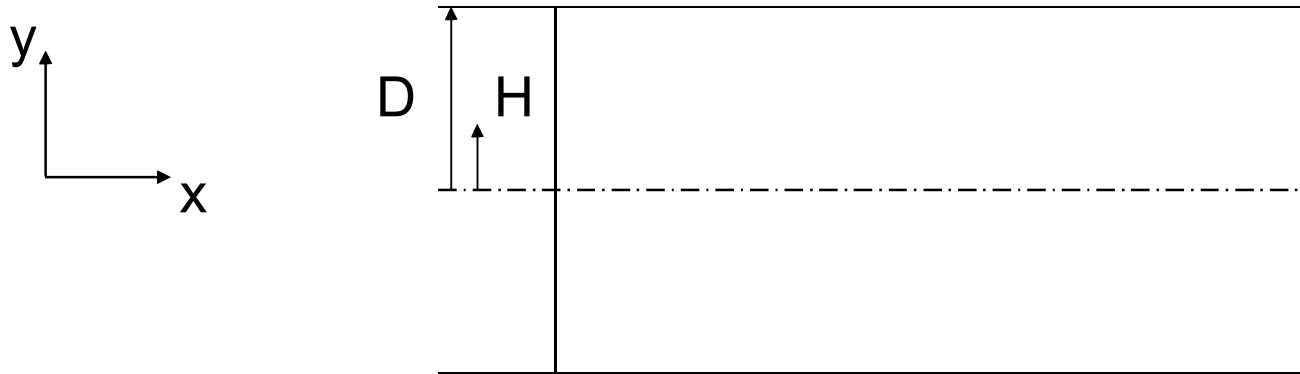
$$\tau_{yx} = \mu \frac{dU_x}{dy} \Rightarrow \frac{d^2U_x}{dy^2} = 0$$

تمرین ۲

➤ جریانی از یک سیال غیر نیوتنی در درون لوله جاریست، توزیع سرعت و فشار آنرا به دست آورید.

تمرین ۳

مطلوب است تعیین سرعت سیال بینگهام (Bingham) در داخل یک کانال (Channel Flow) ➤



$$\frac{dP}{dx} = \frac{d\tau_{yx}}{dy}$$

$$\text{at } y = 0, \tau_{yx} = 0$$

➤ Bingham Plastic

$$\tau_{yx} > \tau_0 : \tau_{yx} = -\tau_0 + \mu \frac{dU_x}{dy}$$

$$\tau_{yx} \leq \tau_0 : \frac{dU_x}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow -\tau_0 + \mu \frac{dU_x}{dy} = \frac{dP}{dx} y$$

$$\mu \frac{dU_x}{dy} = \frac{dP}{dx} y + \tau_0$$

$$\frac{dU_x}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} y + \frac{\tau_0}{\mu}$$

➤ در این بخش رفتار واقعی تر سیالهای غیرنیوتنی بررسی شد.



با نام خدا
عنوان درس:
مکانیک

سیالات پیشرفته

تورج محمدی
استاد دانشکده مهندسی شیمی
دانشگاه علم و صنعت ایران
تابستان ۱۳۸۷



هدف بخش

➤ پس از این بخش دانشجو باید بتواند:

✓ جریان سیال های غیر نیوتنی را در محیط های همگرا و واگرا مدل نماید.

✓ برای یکی سیال غیر نیوتنی قطر لوله های مناسب را برگزیند.

کاربرد

➤ از آنجایی رفتار (ویسکوزیته) سیالهای غیر نیوتنی از قانون ویسکوزیته نیوتن پیروی نمی کند، بنابراین باید بتوان دستور کاری برای تعیین اندازه دستگاه ها و لوله هایی که این سیالها در آنها به حرکت در می آیند، در دست داشت. در این بخش با تعیین اندازه قطر لوله های در برگیرنده سیال غیر نیوتنی آشنا می شویم.

کاربرد

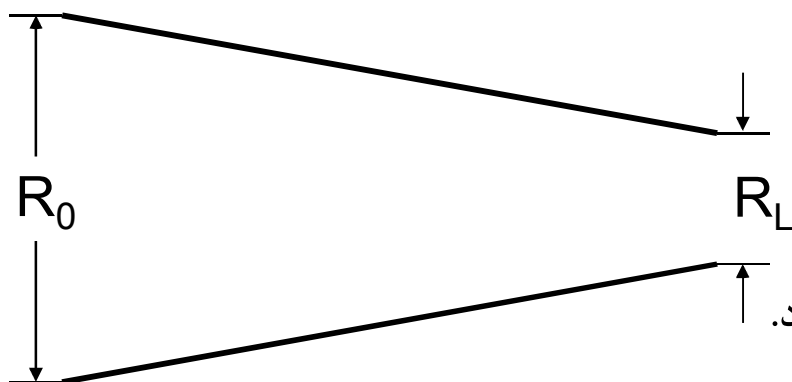


جریان روان سازهای غیرنیوتنی

➤ می خواهیم توزیع سرعت و تنش در جریان روان سازهای غیر نیوتنی در لوله های همگرا (Converging) یا واگرا (Diverging) را بررسی کنیم. با نوشتن معادله حرکت که و ساده سازی آن خواهیم داشت:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz})$$

➤ در این لوله ها، سیال در راستایی که سطح مقطع لوله با شیب کم در حال افزایش یا کاهش است، جاری می شود. با فرض آن که جریان یک بعدی باشد، می توان سرعت را که تابع r و z است، به دست آورد.



جریان روان سازهای غیرنیوتنی

$$\Rightarrow \tau_{rz} = \frac{dP}{dz} \frac{r}{2}$$

► Power Law

$$\Rightarrow \frac{dU_z}{dr} < 0$$

$$\mu \left| \frac{dU_z}{dr} \right|^n \frac{dU_z}{dr} = -\mu \left(-\frac{dU_z}{dr} \right)^{n+1} = \frac{dP}{dz} \frac{r}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{dU_z}{dr} = \left(-\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \frac{r}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

جریان روان سازهای غیرنیوتنی

$$\Rightarrow U_z = \int \left(-\frac{r}{2\mu} \frac{dP}{dz} \right)^{\frac{1}{n+1}} dr + C$$

$$R(z) = R_0 - (R_0 - R_L) \frac{z}{L}$$

B.C.: at $r = R(z)$, $U_z = 0$

$$\Rightarrow U_z = \left(-\frac{r}{2\mu} \frac{dP}{dz} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{R(z)^{\frac{n+1}{n+1}} - r^{\frac{n+1}{n+1}}}{\frac{n+1}{n+1}}, \quad \frac{1}{n+1} = n'$$

$$Q = \int_0^{R(z)} 2\pi r U_z dr = \frac{\pi}{n'+3} \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dz} \right)^{\frac{1}{n+1}} R(z)^{\frac{n+1}{n+1} + 3}$$

جریان روان سازهای غیرنیوتنی

$$\Rightarrow \frac{dP}{dz} = -2\mu \left[\frac{(n' + 3)Q}{\pi R(z)^{n'+3}} \right]^{\frac{1}{n'}}$$

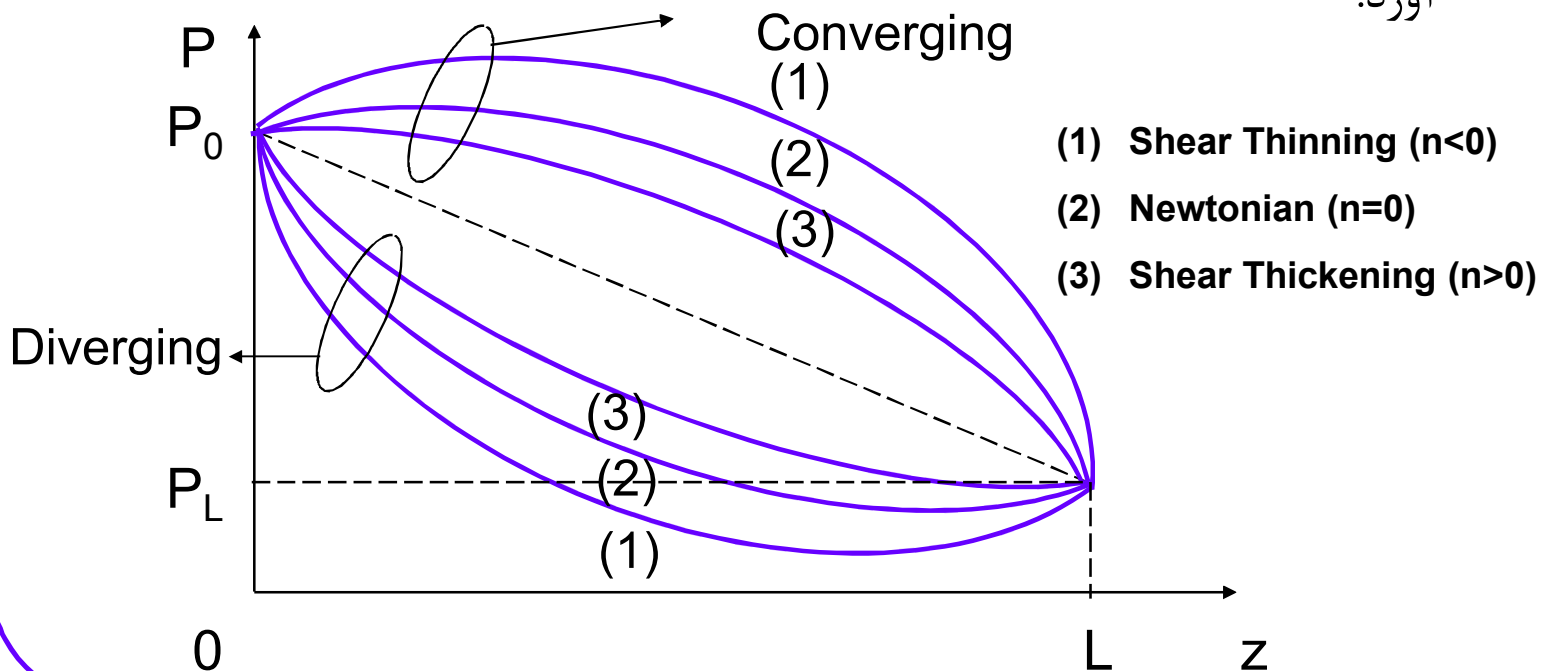
$$\Rightarrow P(z) = P_0 - 2\mu \left(\frac{(n' + 3)Q}{\pi} \right)^{\frac{1}{n'}} \frac{n'}{3} \left(R(z)^{-\frac{n'}{3}} - R_0^{-\frac{n'}{3}} \right) \frac{L}{R_0 - R_L}$$

$$Q = \frac{\pi}{n' + 3} \left[\frac{3(R_0 - R_L)(P_0 - P_L)}{2n' \mu L (R_L^{-3/n'} - R_0^{-3/n'})} \right]^{n'}$$

$$P(z) = P_0 + \frac{P_L - P_0}{R_L^{-3/n'} - R_0^{-3/n'}} \left[R(z)^{-3/n'} - R_0^{-3/n'} \right]$$

جریان روان سازهای غیرنیوتنی

با به کار گیری این معادله ها می توان در صورت در دست داشتن P_0 و P_L ، مقدار Q را محاسبه کرد و یا با معلوم بودن Q و P_0 میزان P_L را به دست آورد.



جریان روان سازهای غیرنیوتنی

➤ Total Friction

$$F = \int_0^L 2\pi R(z) \tau_{rz}|_w dz$$

$$\tau_{rz}|_w = -\mu \left(-\frac{dU_z}{dr} \right)_{r=R(z)}^{n+1}$$

$$\tau_{rz}|_w = -\frac{3(R_0 - R_L)(P_0 - P_L)}{2n' R(z)^{3/n'} L}$$

$$\times \frac{1}{R_L^{-3/n'} - R_0^{-3/n'}} \left(\frac{1}{R_L^{3/n'-2}} - \frac{1}{R_0^{3/n'-2}} \right)$$

تعیین قطر لوله برای سیالهای غیرنیوتنی

(۱) روش نخست:

تعیین قطر لوله مناسب (Sizing) برای جریان سیال غیرنیوتنی، با فرض جریان آرام می توان نوشت:

$$\tau_{rz} = \frac{D\Delta P}{4L}$$

$$\text{Newtonian Fluid} : -\left. \frac{dU_z}{dr} \right|_w = \frac{8V}{D}$$

$$\text{Non - Newtonian Fluid} : \frac{3n+1}{4n} \left(\frac{8V}{D} \right)$$

در این رابطه n شیب منحنی نمایی $D\Delta P/4L$ در برابر $8V/D$ است.

تعیین قطر لوله برای سیالهای غیرنیوتنی

$$\mu_e = \frac{D\Delta P/4L}{8V/D} = \frac{D^2\Delta P}{32VL}$$

داده های تغییرات τ_w در برابر $8V/D$ (تنش برشی و نرخ تنش) از دستگاه های ویسکوزیته سنج به دست می آیند. ➤

تمرین ۱

➤ در یک رئومتر اکستروژنی (Extrusion Rheometer) داده های زیر از یک سیال غیر نیوتنی در دو لوله A و B به دست آمده است. در مورد این سیال چه می توان گفت؟

| Q ($\times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$) | | ΔP (Pa) |
|---|----------|-----------------|
| B | A | |
| ۳۵۹۳/۳۱ | ۹۲۷۶/۳ | ۶۶۱۹۲ |
| ۱۷۵۲/۹۱ | ۸۵۹۵/۱۱ | ۱۳۲۳۸۴ |
| ۲۶۷۲/۳۰۹ | ۳۳۶۶/۸۹ | ۳۲۳۶۸۶ |
| ۸۷۱۸/۹۱۹ | ۶۲۳۰/۱۱۷ | ۸۲۷۴۰۰ |

| (m) L | (m) D | |
|--------|-----------|--------|
| ۱۵۲۴/۰ | ۰۰۱۵۸۷۵/۰ | لوله A |
| ۳۰۴۸/۰ | ۰۰۳۱۷۵۰/۰ | لوله B |

$$\rho = 74/1393 \text{ kg/m}^3$$

تعیین قطر لوله برای سیال های غیرنیوتنی

(۲) روش دوم (با فرض قانون نما)

➤ می خواهیم قطر لوله ای را برای سیالی که از قانون نما پیروی می کند، به دست بیاوریم. برای بسیاری از سیال ها منحنی نمایی تنش برشی در برابر نرخ تنش در گسترده ای معین از نرخ تنش (S^{-1}) خطیست.

$$\tau_w = \frac{D\Delta P}{4L} = k \left(\frac{8V}{D} \right)^n$$

➤ n شیب منحنی نمایی $\Delta P/4L$ در برابر $8V/D$ است. k اندازه τ_w در $8V/D = 1$ می باشد.

تمرین ۲

➤ با داده های زیر، به دست آمده از یک محلول پلیمری، اندازه k و n به ترتیب برابر Pa $۶۵۰/۱۴۳$ و $۵۸۶/۰$ برآورد شده اند. افت فشار در واحد طول یک خط لوله $۶''$ را به دست آورید.

تعیین قطر لوله برای سیال های غیرنیوتنی

(۳) روش سوم (روش Metzner – Reed)

➤ تعیین اندازه قطر لوله با روش Metzner – Reed

الف) جریان آرام

۱- به کار گیری رابطه رینولدز اصلاح شده با شرط $Re \leq 2100$

$$Re = \frac{D^n V^{2-n} \rho}{k 8^{n-1}}$$

$$f = \frac{64}{Re}$$

۲- به کار گیری رابطه ضریب اصطکاک

$$\frac{\Delta P}{L} = f \frac{1}{D} \rho \frac{V^2}{2}$$

۳- به کار گیری رابطه جریان

روش دوم تعیین اندازه لوله

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{L} = 32k8^{n-1} \frac{V^n}{D^{n+1}}$$

نکته: اگر داده های نمودار روی یک خط نیفتند، از مقدارهای محلی (Local) k و n استفاده می شود. ➤

تمرین ۳

➤ تمرین شماره ۲ را با این روش حل نمایید.

تعیین قطر لوله برای سیال های غیرنیوتنی

ب) جریان آشفته

در جریان آشفته، رابطه زیر برای لوله های نرم به کار گرفته می شود:

$$f = \frac{0.316}{\text{Re}^{0.25}}$$

$$\text{Re} = \frac{D^n V^{2-n} \rho}{k 8^{n-1} g_c}, 4000 < \text{Re} < 100000$$

تمرین ۳

➤ داده های زیر برای سیالی با استفاده از یک رئومتر موینه به دست آمده است.
افت فشار بر واحد طول را محاسبه نمایید.

$$m = 940 \text{ lbm/hr}, D = 12", \rho = 60 \text{ lbm/ft}^3$$

$$D = 0.25", L = 125"$$

| ΔP (lbf/in ²) | \dot{m} (lbm/hr) |
|-----------------------------------|--------------------|
| ۹۵/۳ | ۴۰ |
| ۲۱/۵ | ۱۰۰ |
| ۴۱/۶ | ۲۰۰ |
| ۸۸/۷ | ۴۰۰ |
| ۸۵/۸ | ۶۰۰ |

➤ در این بخش با رفتار سیال های غیرنیوتنی و تعیین قطر لوله و همچنین جریان آنها در کانالهای واگرا و همگرا آشنا شدیم.