بسم الله الرحمن الرحیم

و صل الله علی محمد و آل محمد

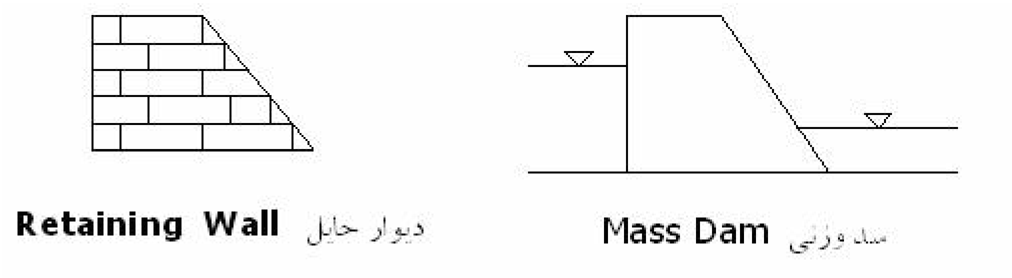
تحلیل سازه ها

میثم آزادمنش

دانشجوی عمران دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان

انواع سازه ها

1- سازه های وزنی Mass Structures : دیوارهای حایل ، سدهای وزنی آجری ، سنگی و یا بتنی و ... مثالهایی از این سازه ها می باشند. مقاومت در برابر بارهای وارده به وزن این سازه ها بستگی دارد .



2- سازه های قاب بندی شده Framed Structures : قابهای چوبی ، فلزی ، بتنی ، قاب بندی بدنه کشتی ها ، قوس ها ، بدنه هواپیما و ... مثالهایی از سازه های قاب بندی شده می باشند .

3- سازه های پوسته ای Shell Structures : منابع ذخیره مایعات ، مخازن تحت فشار ، سیلوها ، سدهای پوسته ای ، دالهای بتنی تحت فشار و تاشده (folded) مثالهایی از این نوع سازه می باشند . در اعضای این سازه ها نیروی محوری وجود دارد .

4- سازه های کششی (کابلها) : مصالح این نوع سازه ها باید مقاومت کششی زیادی داشته باشند یک سازه کششی بارهای وارده را تنها از طریق کشش در اعضای اصلی سازه به تکیه گاه منتقل می کند .

تعریف سازه

عبارتست از جسم و یا مجموعه ای از مصالح و اجسام که به منظور تحمل و انتقال نیرو به کار می رود

تحلیل سازه

علمی است که عمل نیروها را روی مجموعه های ساختمانی بررسی می نماید یعنی تاثیر و نحوه انتقال نیروهای موثر به سازه ها که توسط اجزای سازه از نقاط تاثیر به تکیه گاه هدایت می گردند در علم تحلیل سازه مورد بحث و مطالعه قرار می گیرند .

تحلیل سازه شامل موارد زیر می باشد : 1- بررسی پایداری و ناپایداری سازه ها 2- تعیین واکنشهای تکیه گاهی 3- تعیین نیروهای داخلی و محاسبه تغییر شکلها

پایه های اصلی تحلیل سازه ها

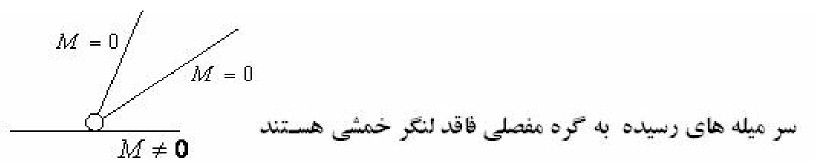
- معادلات تعادل Equilibrium Equations
- رفتار مصالح Material Behavior
- معادلات سازگاری Compatibility Equations

گره

یک نقطه هندسی از سازه است که به طور معمول در محل برخورد دو یا چند عضو واقع می شود بر اساس این تعریف یک عضو بخشی از سازه است که بین دو گره متوالی از سازه قرار می گیرد .

تقسیم بندی گره ها

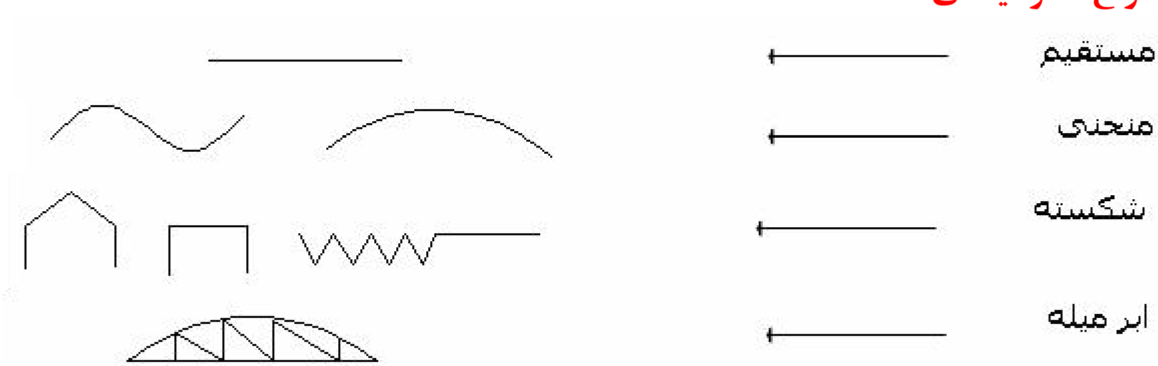
- **عادی**
  - گره مفصلی
  - گره صلب
  - گره نیمه صلب یا نسبتا صلب
  - گره قیچی سان
- **تکیه گاهی**
  - تکیه گاه مفصلی
  - تکیه گاه صلب
  - تکیه گاه نیمه صلب یا نسبتا صلب



معادلات شرط (درجه آزادی)

روابطی که در صورت وجود ناپیوستگی در سازه های میله ای نوشته می شود معادلات شرط نامیده می شود . ناپیوستگی در هر نقطه از سازه ناتوانی در انتقال نیروی داخلی خاصی از یک مقطع به مقطع دیگر است و در نتیجه نوعی آزادی حرکت یک مقطع به مقطع پهلویی است .

انواع عضو میله ای



تکیه گاه Support

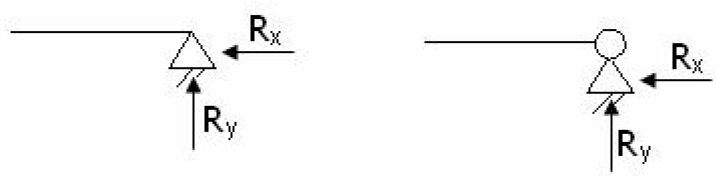
محل اتصال سازه به پی و یا سازه ای دیگر را تکیه گاه گویند

انواع تکیه گاهها

- **تکیه گاه مفصلی ثابت Hinged Support**
- **تکیه گاه مفصلی متحرک (غلطکی) Roller Support**
- **تکیه گاه گیردار Fixed Support**
- **تکیه گاه فنری یا ارتجاعی Elastic support**
- **تکیه گاه گیردار هدایت شده یا ریل دار (گیردار غلطکی)**

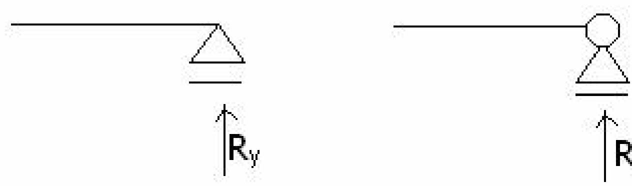
1 – تکیه گاه مفصلی ثابت

این تکیه گاه دارای دو عکس العمل یکی در جهت افق و دیگری در جهت قائم می باشد . تکیه گاه می تواند دوران نماید (دارای درجه آزادی واحد است)



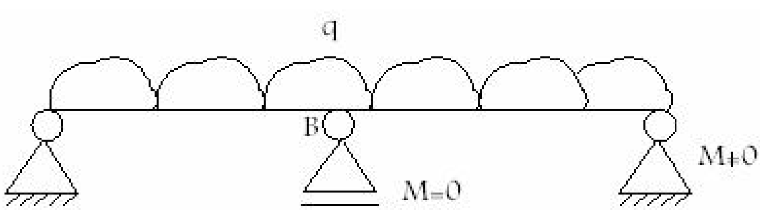
2- تکیه گاه مفصلی متحرک (غلطکی)

در این نوع تکیه گاه آزادی حرکت در امتداد چرخش غلطکها وجود دارد و دارای درجه آزادی 2 می باشد (یک درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی چرخشی) . این تکیه گاه یک عکس العمل در جهت عمود بر جهت لغزش غلطکها تولید می کند



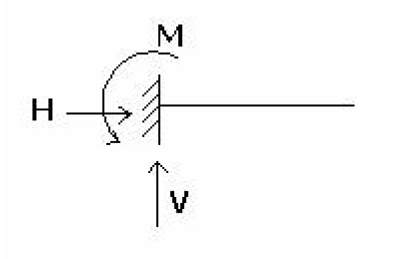
نکته 1) تکیه گاه انتهای تیر نقش مفصل خالص را دارد .

نکته 2) در تکیه گاه غلطکی میانی تیرهای سرتاسری لنگر خمشی تیر مخالف صفر است .



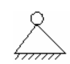
3- تکیه گاه گیردار

در این نوع تکیه گاه هیچ گونه درجه آزادی وجود ندارد به عبارت دیگر در محل تکیه گاه حرکت انتقالی و چرخشی وجود ندارد یعنی هر دو مؤلفه تغییر مکان انتقالی و چرخشی صفر می باشد .

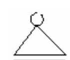


4- تکیه گاه فنری یا ارتجاعی

اگر تکیه گاه میله با فنر خطی یا پیچشی (خمشی) مدل گردد مقدار تغییر مکان و نیز مقدار واکنشهای وارده متناسب با سختی فنرها می باشد اگر بجای تکیه گاه غلطکی فنری با ضریب سختی K قرار داده شود و در محل اتکا تغییر مکانی برابر Δ در امتداد فنر ایجاد نماید مقدار واکنش وارده بر سازه در آن نقطه $R = K \cdot \Delta$ خواهد بود و در فنر پیچشی تکیه گاهی با رابطه $M = K_t \cdot \theta$ بدست می آید.
گاهی فنری با سختی K می تواند بیانگر اصطکاک تکیه گاه غلطکی باشد که تاحدودی مانع حرکت آزاد است

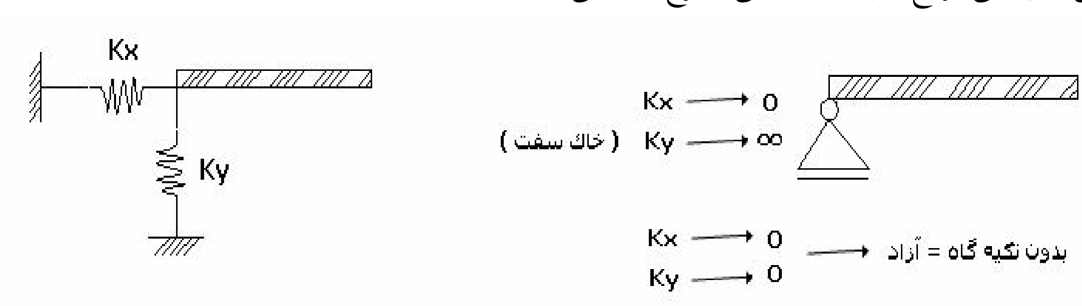


$$K \rightarrow \infty \rightarrow \quad : R_k = R_H$$

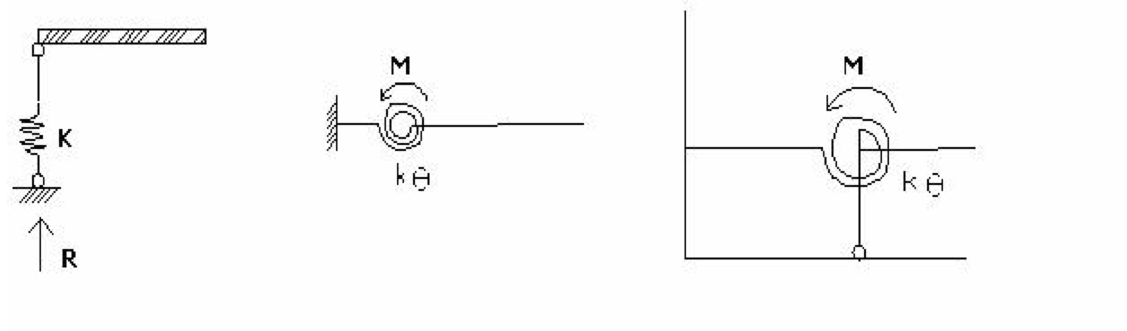


$$K \rightarrow 0 \rightarrow \quad : R_k = 0$$

یعنی در بعضی مواقع تکیه گاه غلطکی از نوع ارتجاعی است

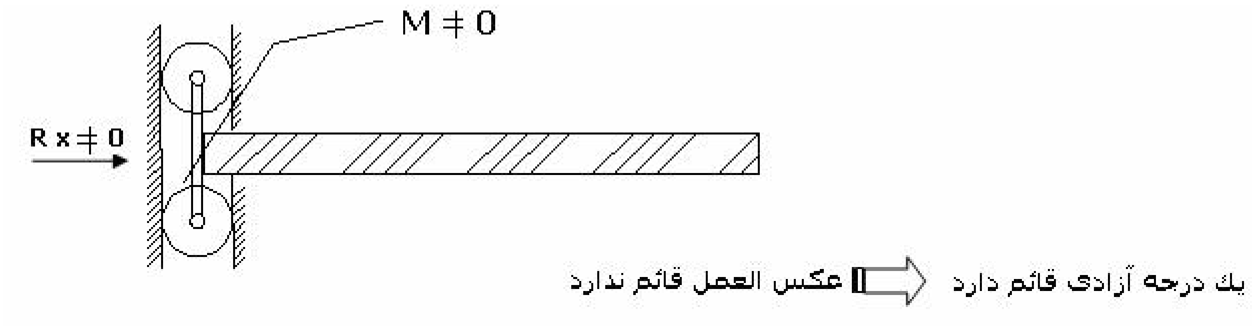


فنر می تواند نماینده زمین باشد زیرا زمین دارای یک ضریب کشسانی است و نمودار تنش – کرنش دارد.



5- تکیه گاه هدایت شده یا ریل دار (گیردار غلطکی)

در این نوع تکیه گاه حرکت در جهت هدایت شده بصورت آزادانه صورت می گیرد و از چرخش آن جلوگیری به عمل می آید این تکیه گاه قابلیت پایداری در برابر نیروی برشی قائم را ندارد .



ویژگی های تکیه گاهها از نظر تغییر مکان

سه واکنش دارد	$\delta_x = 0, \delta_y = 0, \theta = 0$	تکیه گاه گیردار
یک واکنش دارد	$\delta_x \neq 0, \delta_y = 0, \theta \neq 0$	تکیه گاه غلطکی
دو واکنش دارد	$\delta_x = 0, \delta_y = 0, \theta \neq 0$	تکیه گاه مفصلی ثابت
دو واکنش دارد	$\delta_x = 0, \delta_y \neq 0, \theta = 0$	تکیه گاه ریل دار افقی

نکاتی در مورد تکیه گاهها

1- همه تکیه گاههای گفته شده می توانند نسبی باشند (تکیه گاه مفصلی نسبتا ثابت = تا حدودی ثابت)

2- در عمل از تکیه گاه ایده آل یا مطلق استفاده می کنیم و تجربه و محاسبات نشان داده است که تکیه گاههای ایده آل که مدلی از واقعیتند ، اگر خوب انتخاب شوند مخاطره ای برای ما ایجاد نخواهد کرد .

3- ممکن است تکیه گاه گیردار چنان ساخته شود که یک یا دو واکنش را نداشته باشد .

روشهای تعیین درجه نامعینی Degree of indeterminacy

تعیین درجه نامعینی یک گام مهم در تحلیل سازه به روش نیرو می باشد در اینجا پنج روش برای تعیین درجه نامعینی گفته می شود که در اصل همه یک روش زیر هستند :

درجه نامعینی (در همه روش ها) = تعداد مجهولات - تعداد معادلات

معادلات:
- تعادل (Equilibrium)
- شرط (Condition)

مجهولات:
- مجهولات واکنشهای تکیه گاهی یا مجهولات نیرویی تکیه گاهی
- مجهولات نیرویی داخلی

چهار روش زیر درجه نامعینی استاتیکی را به ما خواهد داد که مربوط به روش نیرو در تحلیل سازه های نامعین است

در همه روشهای محاسبه X : 1- می توان میله شکسته ای را که هیچ شاخه ای از ابتدا و انتهای آن منشعب نشده باشد ، یک میله محسوب کرد. 2 - طره ها (کنسول ها یا پیش آمدگی ها) در محاسبه X تاثیری ندارند زیرا معین هستند یعنی در محاسبه X طره ها را حذف می کنیم و پس از محاسبه X آنها را در جای خود قرار می دهیم . 3 – اگر سازه ای بدون تکیه گاه باشد به فرمولهای زیر (3+) افزوده می شود .

– فرمولی که در استاتیک برای محاسبه درجه نامعینی خرپای ایده آل یاد گرفتیم بصورت زیر است

m : تعداد اعضای خرپا

r : تعداد عکس العملهای تکیه گاهی

j : تعداد گرههای عادی و تکیه گاهی خرپای ایده آل

$$X = (m + r) - 2j$$

روش اول (mrnc)

درجه نامعینی در این روش با فرمول زیر تعیین می شود :

$$X = (3m + r) - (3n + c)$$

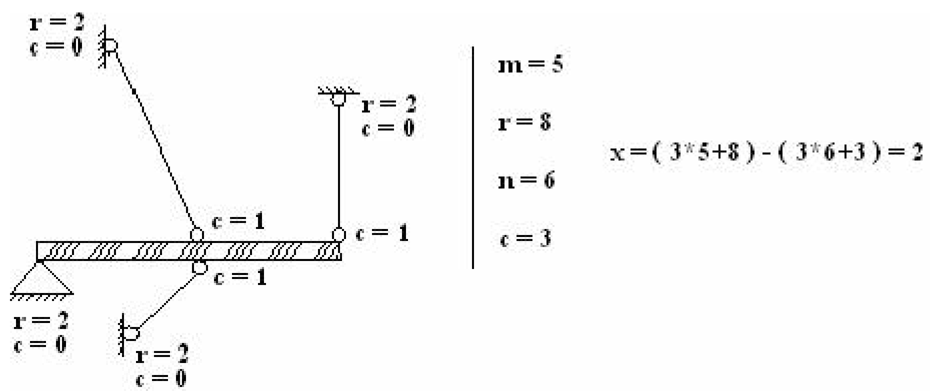
m : تعداد اعضا (فاصله گره تا گره)

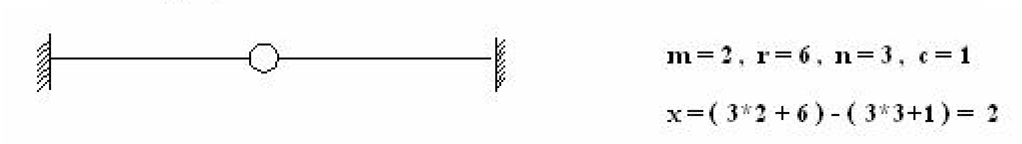
r : تعداد عکس العمل های تکیه گاهی

n : تعداد گرههای تکیه گاهی و غیر تکیه گاهی

c : تعداد معادلات شرط

مثال : با استفاده از روش اول X را تعیین کنید .





روش دوم : روش اسفنجی (اس اف ان جی) (s f n g) :

فرمول کلی این روش بصورت زیر است :

$$s\ X = (3s - f) - (3n - G)$$

:

تعداد میله ها

f : تعداد سر میله های منتهی به مفصل عادی و تکیه گاهی

n : تعداد گرههای غیر تکیه گاهی

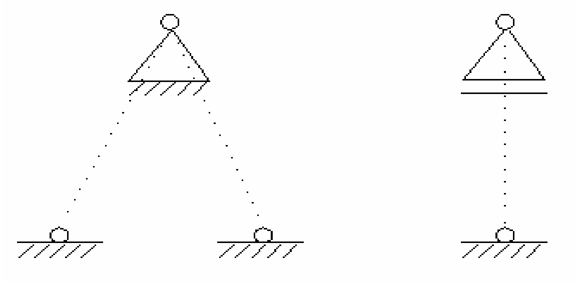
G : تعداد مفصلهای خالص سازه

نکاتی در مورد این روش:

1 – در محاسبه x به روش sfng باید همه تکیه گاهها گیردار باشد در غیر اینصورت با تغییرات زیر آنرا به شکل گیردار در می آوریم :

تکیه گاه مفصلی ثابت را با دو میله به دو تکیه گاه مفصلی گیردارکه خودمان رسم می کنیم ، وصل می کنیم و محل تکیه گاه مفصلی ثابت تبدیل به یک مفصل می شود

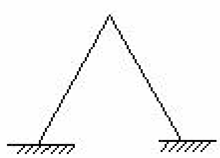
تکیه گاه مفصلی متحرک یا غلطکی را بایک میله به یک تکیه گاه مفصلی گیردار که خودمان رسم می کنیم ، وصل می کنیم و محل تکیه گاه مفصلی متحرک تبدیل به یک مفصل می شود



2 – در سازه های صلب دو بعدی چون مفصل ندارد پس f و G برابر صفر هستند پس برای محاسبه x این سازه ها می توان از فرمول زیر استفاده کرد

$$\mathbf{X = (3s - f) - (3n - G) \longrightarrow X = 3s - 3n}$$

مثال : درجه نامعینی سازه های زیر را تعیین کنید .



$x = 3s - 3n = 3*2 - 3*1 = 3$

(1) $S = 0 , n = 0 , x = 3*0 - 3*0 = 0$

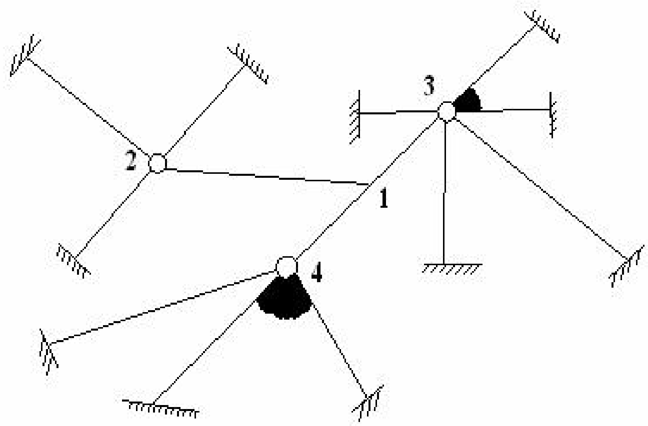
(2) $S = 1 , n = 1 , x = 3*1 - 3*1 = 0$

(3) $S = 1 , n = 0 , x = 3*1 - 3*0 = 1$

حالت 3 نادرست است زیرا طره ها همواره معین هستند در محاسبه درجه نامعینی اگر میله طره را عضو در نظر بگیریم باید نوک آنرا گره بشماریم ولی بهتر است ابتدا طره ها را حذف کرده و سپس x را تعیین کنیم .

و حال محاسبه درجه نامعینی سازه های دارای گرههای متنوع صلب و غیر صلب

نکته مهم : در محاسبه f و G در گرههای بصورت مثال زیر که یک گروه میله جوشی دارند اگر مفصل را خالص در نظر بگیریم دو میله جوش خورده یک میله به حساب می آید و اگر مفصل را غیر خالص در نظر بگیریم گروه میله جوشی را حساب نمی کنیم بنابر این با فرض خالص بودن و غیر خالص بودن f-G عدد ثابتی می آید پس می توان مفصل را خالص یا غیر خالص تلقی کرد. بطور کلی هر گروه میله جوشی می تواند یک f داشته باشد با حفظ تعداد میله هایش در شمارش s . در اینصورت می توان مفصل را خالص تلقی کرد (G = 1 و s = مجموع میله های هر گروه + میله های منفرد) .



گره ۱ : $G=0, n=1, f=0$

گره ۲ : $G=1, n=1, f=4$

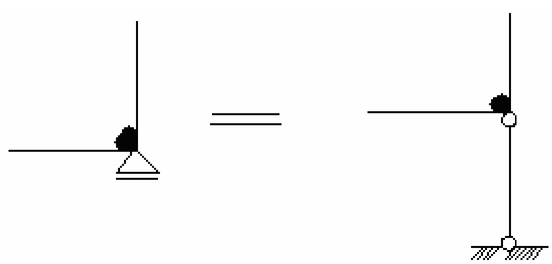
گره ۳ : $G=0, n=1, f=4$

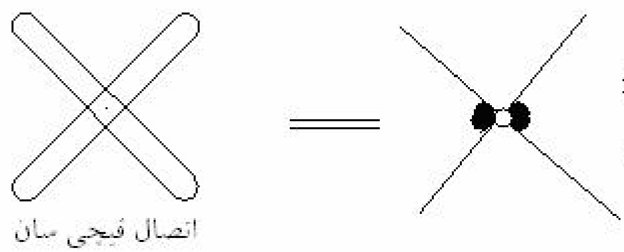
گره ۴ : $G=0, n=1, f=2$

$s=14, f=10, n=4, G=1$

$x=(3s-f)-(3n-G)=(3*14-10)-(3*4-1)=21$

مثالهایی از تبدیلات در روش sfng

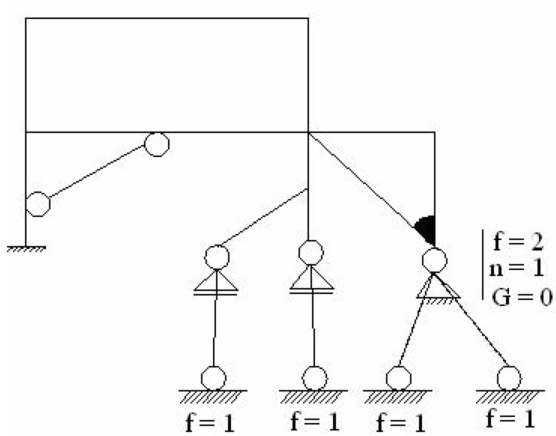




$f=1$ تعداد خوشه ها منهای یک

$G=0$ $f\text{-}G=1$

مثال 5:



$s=17, n=9, f=22, G=4$

$s=19, n=11, f=22, G=4$

$X=(3s-f)-(3n-G)=6$

کاربرد روش sfng برای خرپای ایده آل دو بعدی (حالت خاص):

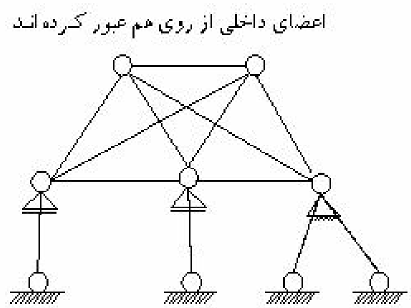
در یک خرپای ایده ال داریم :

$f = 2s$ زیرا هر دو انتهای میله مفصل است

$G = n$ زیرا همه گرهها مفصلی خالص هستند

$$X=(3s-f)-(3n-G)=(3s-2s)-(3n-n) \qquad X = s - 2$$

مثال 6 :

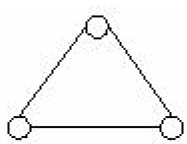


$S = 13 \quad n = 5$

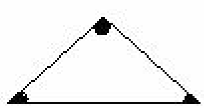
$X = s - 2n = 13 - 2*5 = 3$

محل عبور یک میله از روی میله دیگر گره نیست و اگر گره در نظر بگیریم تاثیری در محاسبه x نخواهد داشت ولی در حالت کلی برای تحلیل سازه پذیرفته نیست .

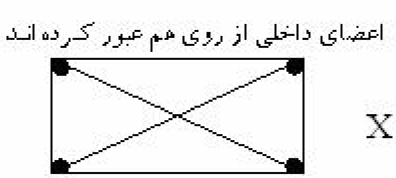
چند نمونه از محاسبه x برای سازه های بی تکیه گاه و صلب بدون تکیه گاه



$X = s - 2n + 3 = 3 - 2(3) + 3 = 0$



$X = 3s - 3n + 3 = 3(3) - 3(3) + 3 = 3$



$X = 3s - 3n + 3 = 3(6) - 3(4) + 3 = 9$

روش سوم : روش درختی برای تعیین درجه نامعینی سازه های دوبعدی

ویژگی های درخت :

1- مدار (کادر = سلول = مسیر) بسته ندارند.

2- مسیر رفت و برگشت بدون پریدن بر هم منطبق است (نتیجه ویژگی اول)

3- مفصل خالص و غیر خالص ندارد .

4- ایزواستاتیک می باشد .

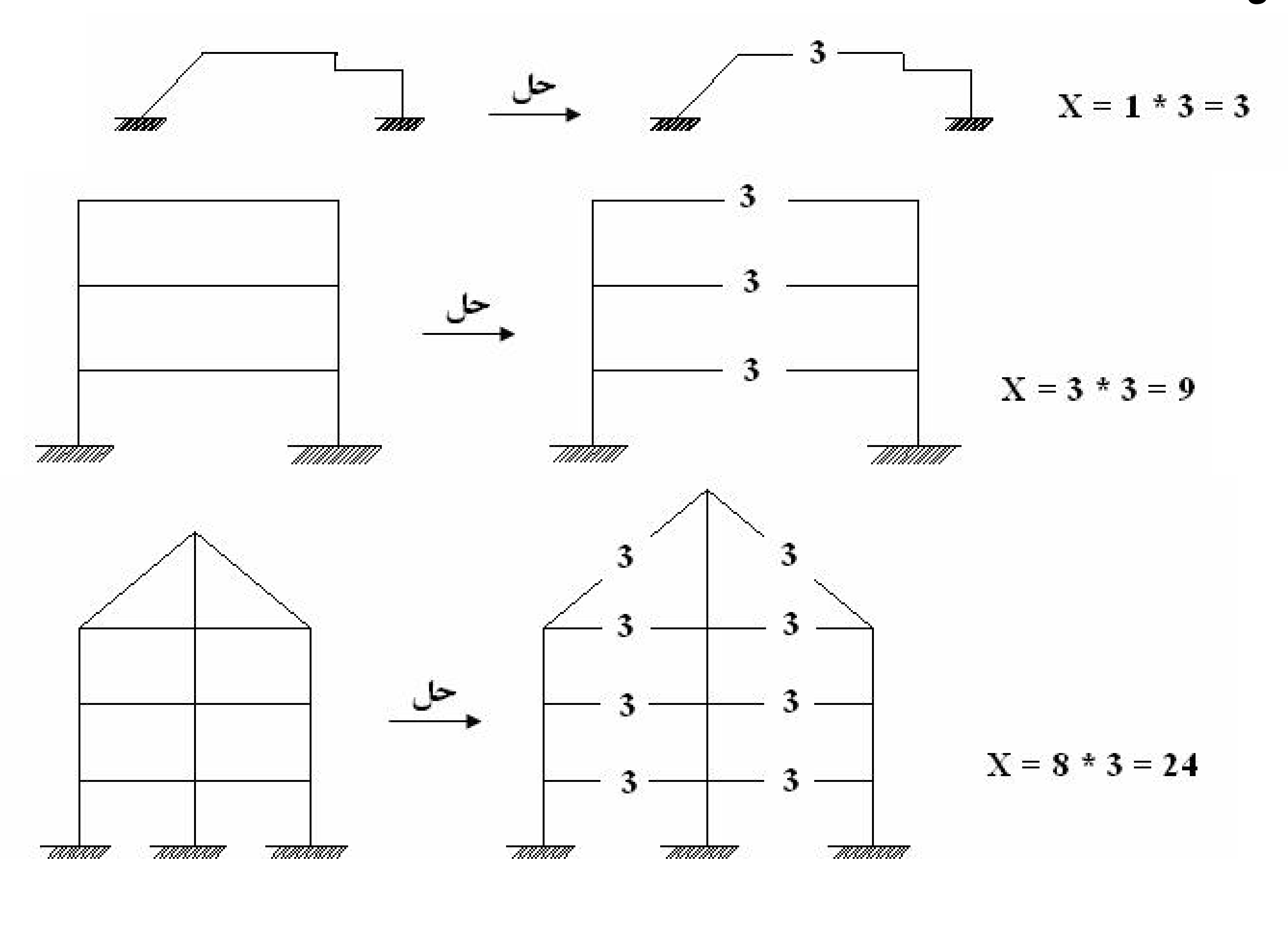
اساس کار روش درختی بویژه در سازه های صلب تبدیل سازه به درخت یا جنگل است .و در سازه های دارای گره های متنوع و مختلط (غیر خالص) از تبدیل به قلمه یا قطعه درخت استفاده می کنیم .

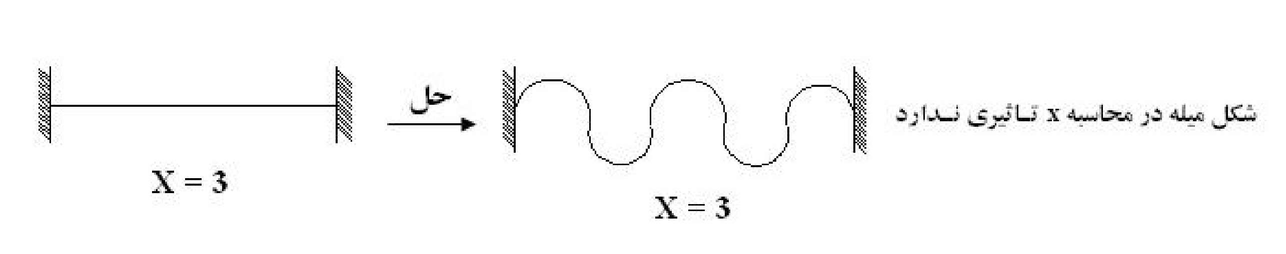
الف) روش درختی در سازه های صلب دوبعدی :

سازه را چنان می بریم که تبدیل به درخت یا جنگل شود در این صورت از محل هر بریدگی سه مجهول ظاهر خواهد شد این مجهولات همان مجهولات زاید در حالت درختی یا جنگلی ایزواستاتیک هستند ، بنابراین تعداد آن ها همان درجه نا معینی سازه است .

3 * تعداد بریدگی های لازم برای رسیدن به درخت یا جنگل = x

مثال:





تبصره: اگر در حین ایجاد درخت اتفاقا قلمه یا قطعه درخت نیز تولید شود دیگر نمی توان محاسبه x را صرفا با شمارش مجهولات ظاهر شده مشخص کرد زیرا قطعه درخت سازه ایزواستاتیک نیست (بر خلاف درخت و جنگل) در این حالت باید تکیه گاه ها را هم برید تا مثلا از هر بریدگی تکیه گاهی گیردار سه مجهول ، تکیه گاه غلطکی یک مجهول، تکیه گاه مفصلی ثابت دو مجهول ظاهر شود . آن گاه خواهیم داشت :

x = تعداد مجهولات − تعداد معادلات $\qquad x = m - 3T$

m : تعداد مجهولات ظاهر شده تکیه گاهی و غیر تکیه گاهی

T : تعداد قلمه های تولید شده

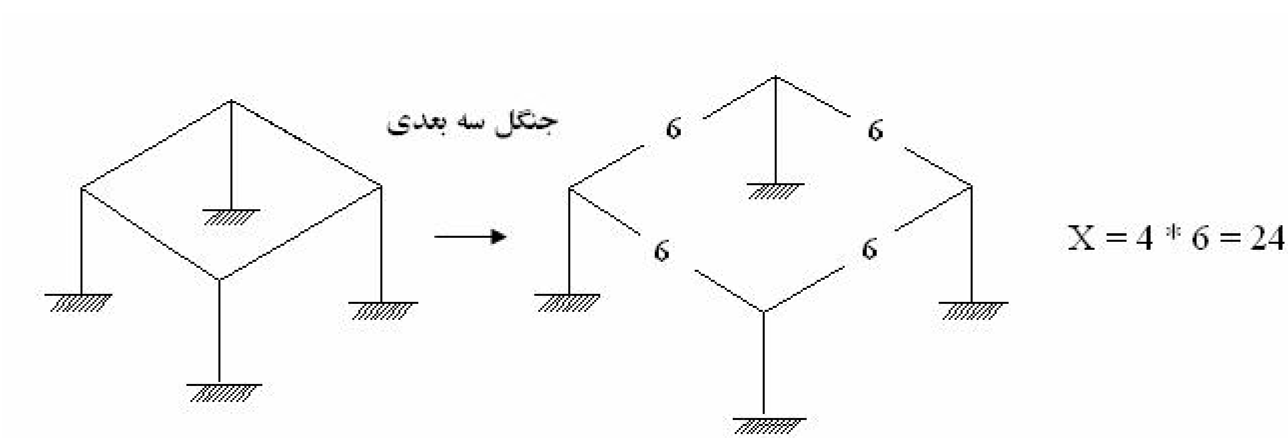
ب) تعمیم روش درختی برای سازه های صلب سه بعدی :

تنها تفاوت عبارت محاسبه x نسبت به حالت قبل این است که در سازه های سه بعدی از محل هر بریدگی 6 مجهول ظاهر می شود چه در نقاط عادی و چه در تکیه گاه ها (چون سازه صلب است تکیه گاه ها گیردار می باشند) بنابراین:

ب 1) اگر بریدن سازه منجر به تشکیل درخت یا جنگل شود $\qquad$ x = تعداد بریدگی * 6

ب 2) اگر در حین بریدن قطعه درخت نیز تولید شود باید تکیه گاه ها را نیز ببریم ، 6 مجهول هر تکیه گاه را در محل آن بنویسیم آن گاه خواهیم داشت $\qquad x = m - 6T$

مثال :

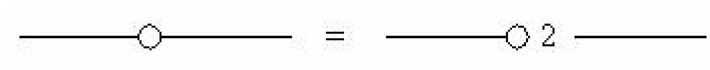


ج) حالت کلی روش درختی برای سازه های دو بعدی با گره های مختلط و متنوع

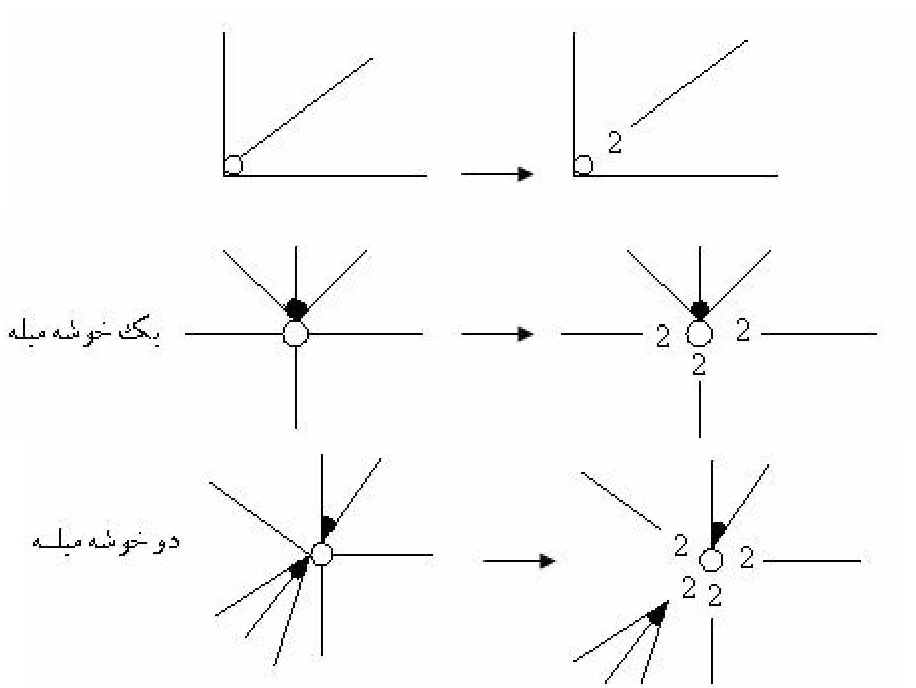
گام 1) حذف تکیه گاه ها و نوشتن مجهولات هر تکیه گاه در محل آن . بدیهی است در تکیه گاه غلطکی عدد 1 ، در تکیه گاه مفصلی ثابت عدد 2 و در تکیه گاه گیردار عدد 3 را خواهیم نوشت .

گام 2) بریدن مفصل های خالص و غیر خالص

2-1) بریدن مفصل های خالص : اگر n میله به گره مفصلی خالص رسیده باشد (n-1) میله را می بریم تا از محل هر بریدگی 2 مجهول ظاهر گردد .



2 – 2) بریدن مفصل های غیر خالص : در این گره ها اگر فقط یک خوشه میله وجود داشته باشد ، سر میله منتهی به مفصل بریده می شود تا از محل هر بریدگی 2 مجهول ظاهر شود . و اگر تعداد خوشه میله ها بیش از یکی باشد ، به جز یکی بقیه را باید برید تا از هر بریدگی 2 مجهول ظاهر شود .



گام 3) حذف کادرهای بسته (گشودن یا بازکردن کادرهای بسته) از طریق بریدن آن ها و نوشتن عدد 3 در محل هر بریدگی .

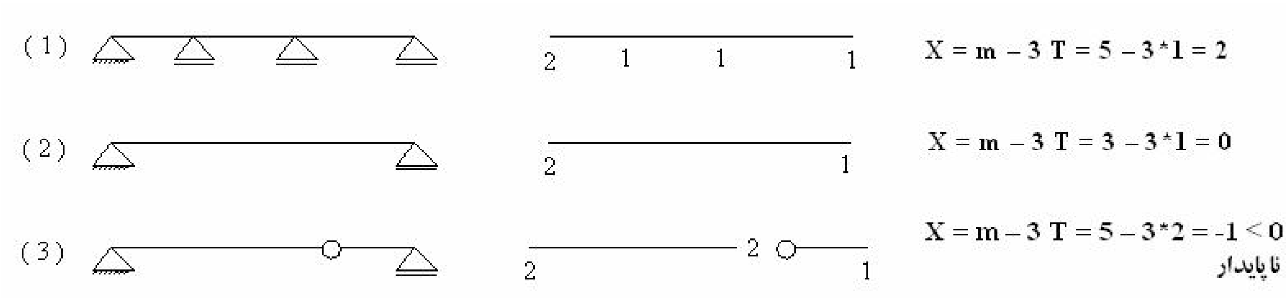
گام 4) کنترل باقی نماندن قطعه درخت مفصل دار و مدار بسته و تکیه گاه حذف نشده

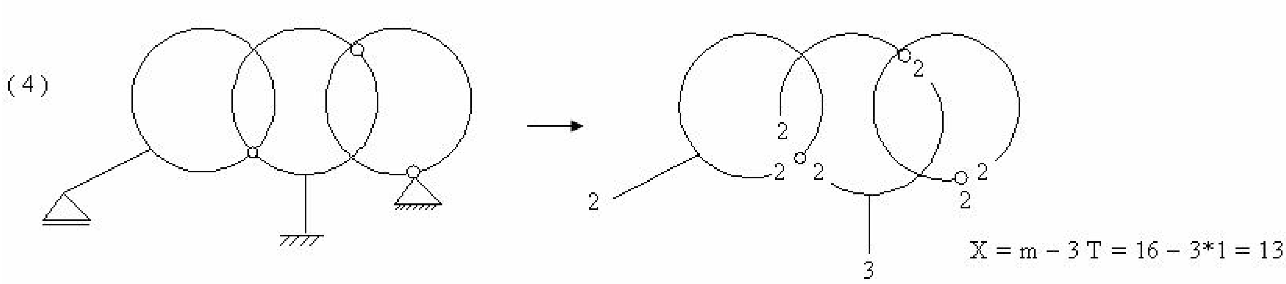
گام 5) شمارش قطعه درخت های بدست آمده (T)

گام 6) شمارش مجهولات ظاهر شده (m)

گام 7) محاسبه x از رابطه : $X = m - 3T$

مثال





روش چهارم : روش کادر بسته برای تعیین درجه نامعینی

الف) در سازه های صلب : (حالت خاص)

$$X = 3k + r - 3$$

K:تعداد کادرهای بسته (مداری که با زمین بسته شود شمرده نمی شود)

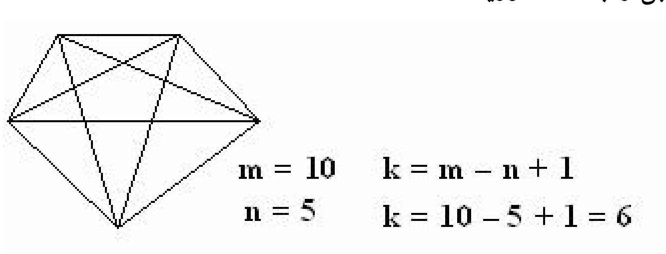
r : تعداد واکنش های تکیه گاهی

m : تعداد اعضای سازه

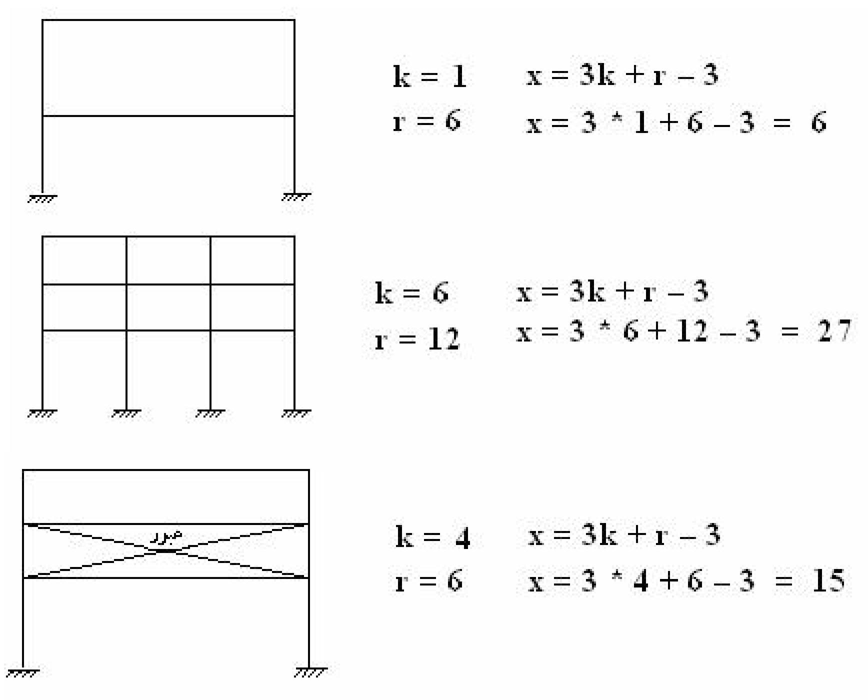
n : تعداد همه گره های عادی و تکیه گاهی سازه

$$k = m - n + 1$$

مثال : تعداد کادر بسته (k) سازه مقابل را بدست آورید



مثال :



ب) حالت کلی روش کادر بسته :

$$X = (3k + r) - (c + 3)$$

c : تعداد معادلات شرط سازه

برای سازه های صلب چهار روش تعیین درجه نامعینی را می توان به حالت سه بعدی تعمیم داد

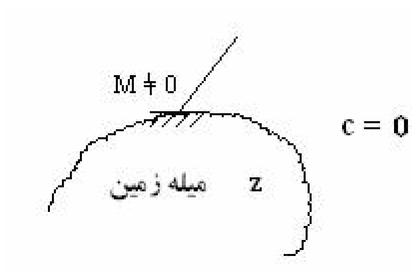
سازه سه بعدی صلب	سازه دو بعدی صلب
x = 6 (m – n) + r x = 6s – 6n x = m – 6 T x = 6 k + r – 6	x = 3 (m – n) + r x = 3s -3n x = m – 3 T x = 3k + r – 3

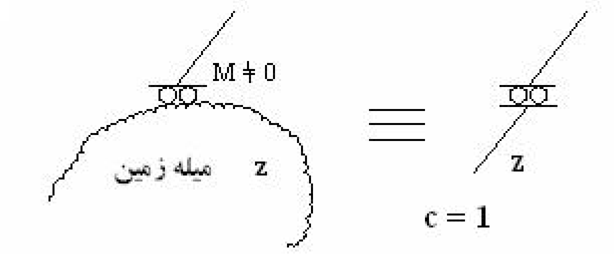
روش پنجم : روش ساختارگرا

$$x = 3k_1 - c$$

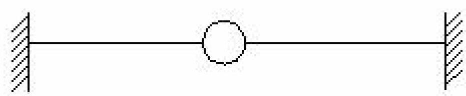
در این نگرش ، زمین به عنوان یک عضو ممتد به سازه ملحق می شود و تکیه گاه به عنوان رابط میله زمین با میله های سوپراستراکچر هویت (حضور انتهایی) خود را از دست می دهند و در حلقه به مثابه مکانیزم ساده (منفرد) نقش رهاساز خود را در پیوندها ایفا می کنند .

محاسبه c در این روش





مثال های متنوع (حل با پنج روش گفته شده)



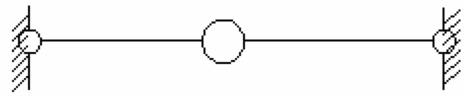
$$\text{mrnc}\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ r = 6 \\ c = 1 \end{cases} \quad x = (3*2 + 6) - (3*3 + 1) = 2$$

$$\text{sfng}\begin{cases} s = 2 \\ f = 2 \\ n = 1 \\ G = 1 \end{cases} \quad x = (3*2 - 2) - (3*1 - 1) = 2$$

$$\text{درختی}\begin{cases} m = 8 \\ \\ T = 2 \end{cases} \quad x = 8 - 3*2 = 2$$

$$\text{krc}\begin{cases} k = 0 \\ r = 6 \\ c = 1 \end{cases} \quad x = 0 + 6 - 1 - 3 = 2$$

$$\text{ساختارگرا kc}\begin{cases} k = 1 \\ \\ c = 1 \end{cases} \quad x = 3*1 - 1 = 2$$



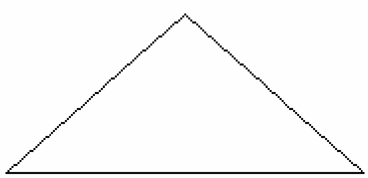
mrnc $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ r = 4 \\ c = 1 \end{cases}$ $x = (3*2 + 4) - (3*3 + 1) = 0$

sfng $\begin{cases} s = 2 \\ f = 4 \\ n = 1 \\ G = 1 \end{cases}$ $x = (3*2 - 4) - (3*1 - 1) = 0$

درختی $\begin{cases} m = 6 \\ T = 2 \end{cases}$ $x = 6 - 3*2 = 0$

krc $\begin{cases} k = 0 \\ r = 4 \\ c = 1 \end{cases}$ $x = 0 + 4 - 1 - 3 = 0$

ساختارگرا kc $\begin{cases} k = 1 \\ c = 3 \end{cases}$ $x = 3*1 - 3 = 0$



mrnc $\begin{cases} m = 3 \\ n = 3 \\ r = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ $x = (3*3 + 0) - (3*3 + 0) + 3 = 3$

بی تکیه گاه

sfng $\begin{cases} s = 3 \\ f = 0 \\ n = 3 \end{cases}$ $x = (3*3 - 0) - (3*3 - 0) + 3 = 3$

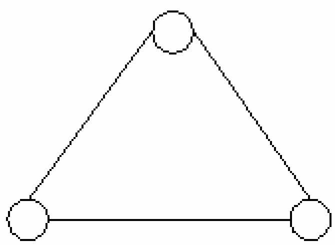
بی تکیه گاه

درختی $\begin{cases} m = 3 \\ & x = 3 - 3*1 + 3 = 3 \\ T = 1 \end{cases}$ بی تکیه گاه

krc $\begin{cases} k = 1 \\ r = 0 & x = 3*1 + 0 - 3 + 3 = 3 \\ c = 0 \end{cases}$ بی تکیه گاه

ساختار گرا kc $\begin{cases} k = 1 \\ & x = 3*1 - 0 = 3 \\ c = 0 \end{cases}$

برای سازه های بی تکیه گاه فقط در روش kc، (+3) اضافه نمی کنیم



mrnc $\begin{cases} m = 3 \\ n = 3 & x = (3*3 + 0) - (3*3 + 3) + 3 = 0 \\ r = 0 \end{cases}$ بی تکیه گاه

sfng $\begin{cases} s = 3 \\ f = 6 & x = (3*3 - 6) - (3*3 - 3) + 3 = 0 \\ n = 3 \\ G = 3 \end{cases}$ بی تکیه گاه

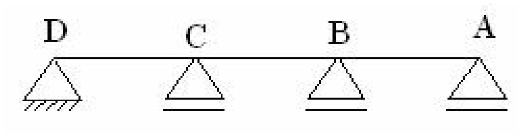
درختی $\begin{cases} m = 6 \\ & x = 6 - 3*3 + 3 = 0 \\ T = 3 \end{cases}$ بی تکیه گاه

$$krc \begin{cases} k = 1 \\ r = 0 \\ c = 3 \end{cases} \quad x = 3*1 + 0 - 3 - 3 + 3 = 0$$

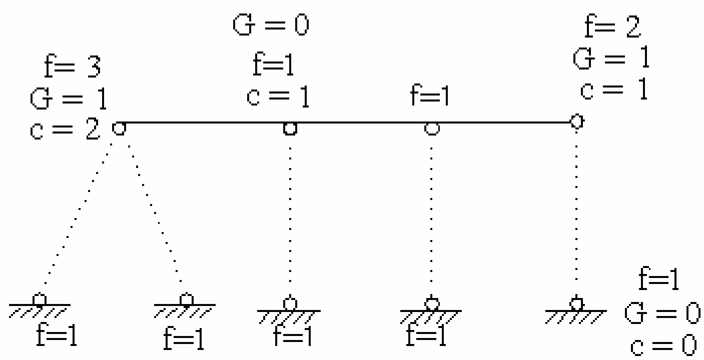
بی تکیه گاه

$$\text{ساختار گرا } kc \begin{cases} k = 1 \\ \\ c = 3 \end{cases} \quad x = 3*1 - 3 = 0$$

برای سازه های بی تکیه گاه فقط در روش kc، (+3) اضافه نمی کنیم



نکته ای که در مورد تکیه گاه مفصلی انتهایی گفتیم در این قسمت مورد استفاده قرار می گیرد به تبدیل سازه به میله پاندولی دقت کنید



$$mrnc \begin{cases} m = 3 \\ n = 4 \\ r = 5 \\ c = 0 \end{cases} \quad x = (3*3 + 5) - (3*4 + 0) = 2$$

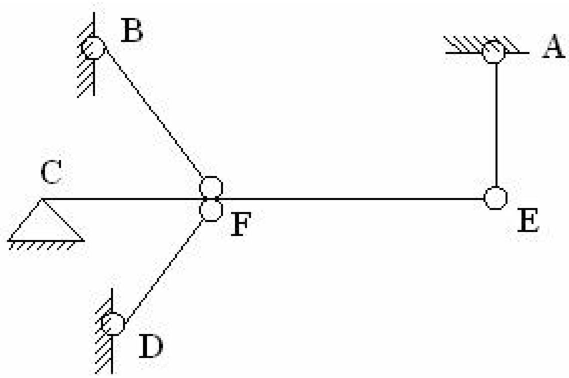
$$sfng \begin{cases} s = 8 \\ f = 12 \\ n = 4 \\ G = 2 \end{cases} \quad x = (3*8 - 12) - (3*4 - 2) = 2$$

$$\text{درختی} \begin{cases} m = 5 \\ \\ T = 1 \end{cases} \quad x = 5 - 3*1 = 2$$

$$\text{krc}\quad \begin{cases} k = 0 \\ r = 5 \\ c = 0 \end{cases} \quad x = 0 + 5 - 0 - 3 = 2$$

ساختارگرا kc

$$\begin{cases} k = 6 - 4 + 1 = 3 \\ \\ c = \underset{A}{2} + \underset{B}{2} + \underset{C}{2} + \underset{D}{1} = 7 \end{cases} \qquad x = 3*3 - 7 = 2$$



$$\text{mrnc}\quad \begin{cases} m = 5 \\ n = 6 \\ r = 8 \\ c = 3 \end{cases} \quad x = (3*5 + 8) - (3*6 + 3) = 2$$

$$\text{sfng}\quad \begin{cases} s = 7 \\ f = 11 \\ n = 3 \\ G = 1 \end{cases} \quad x = (3*7 - 11) - (3*3 - 1) = 2$$

درختی

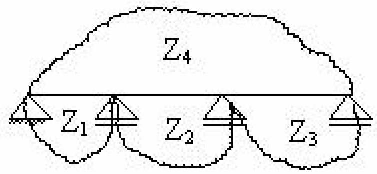
$$\begin{cases} m = 8 + 2 + 4 = 14 \\ \\ T = 4 \end{cases} \qquad x = 14 - 3*4 = 2$$

می توانیم تکیه گاه مفصلی را به میله پاندولی تبدیل کرده ، بعد حل کنیم

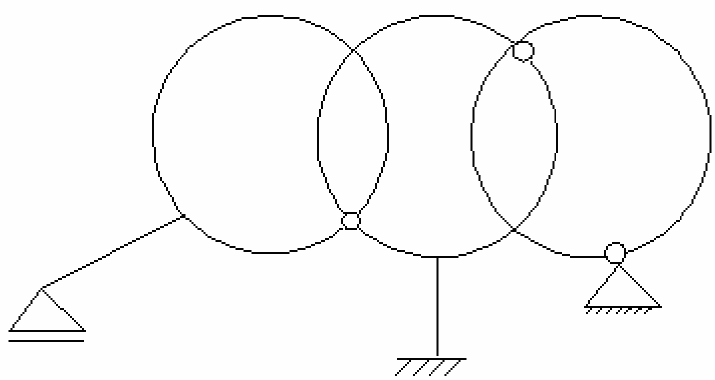
$$\text{krc}\begin{cases} k = 0 \\ r = 8 \quad x = 0 + 8 - 3 - 3 = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{ساختار گرا kc}\begin{cases} k = 8 - 6 + 1 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad x = 3*3 - 7 = 2 \\ c = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 7 \end{cases}$$

در محاسبه باید خیلی دقت شود ، نمی توان تکیه گاه را هم از بالا و هم از پایین به هم وصل کرد



Z_4 اشتباه است



$$\text{mrnc}\begin{cases} m = 13 \\ n = 9 \quad x = (3*13 + 6) - (3*9 + 5) = 13 \\ r = 6 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$\text{sfng}\begin{cases} s = 16 \\ f = 14 \quad x = (3*16 - 14) - (3*8 - 3) = 13 \\ n = 8 \\ G = 3 \end{cases}$$

$$\text{درختی}\begin{cases} m = 2 + 3 + 1 + 2 + 2 + 6 = 16 \\ T = 1 \qquad x = 16 - 3*1 = 13 \end{cases}$$

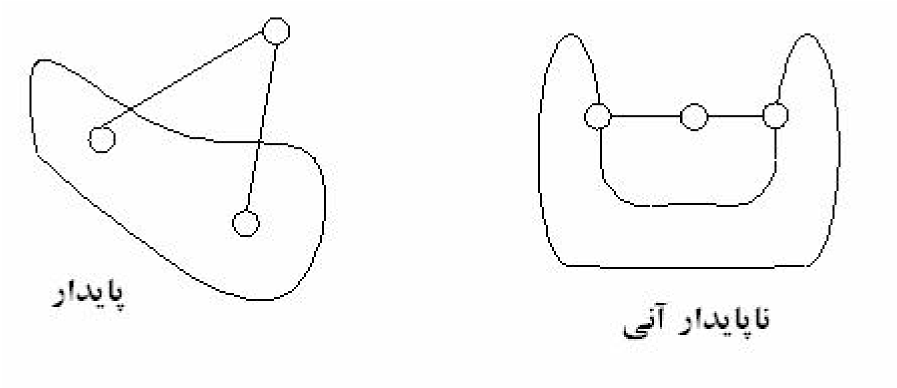
$$\text{krc}\quad \begin{cases} k = 5 \\ r = 6 \\ c = 5 \end{cases} \quad x = 3*5 + 6 - 5 - 3 = 13$$

$$\text{ساختار گرا}\ \text{kc}\quad \begin{cases} k = 7 \\ \\ c = 8 \end{cases} \quad x = 3*7 - 8 = 13$$

قوانین ترکیب پایدار اجسام صلب در صفحه

الف) ترکیب یک گره و یک جسم صلب

سیستمی که از ترکیب یک جسم صلب و یک گره تشکیل یافته ، وقتی پایدار است که گره حداقل توسط دو میله که محورهای آنها در یک امتداد نمی باشند ، به جسم صلب متصل شده باشد . اگر گره توسط دو میله هم امتداد به جسم صلب متصل شده باشد سیستم حاصل ناپایدار آنی خواهد بود .



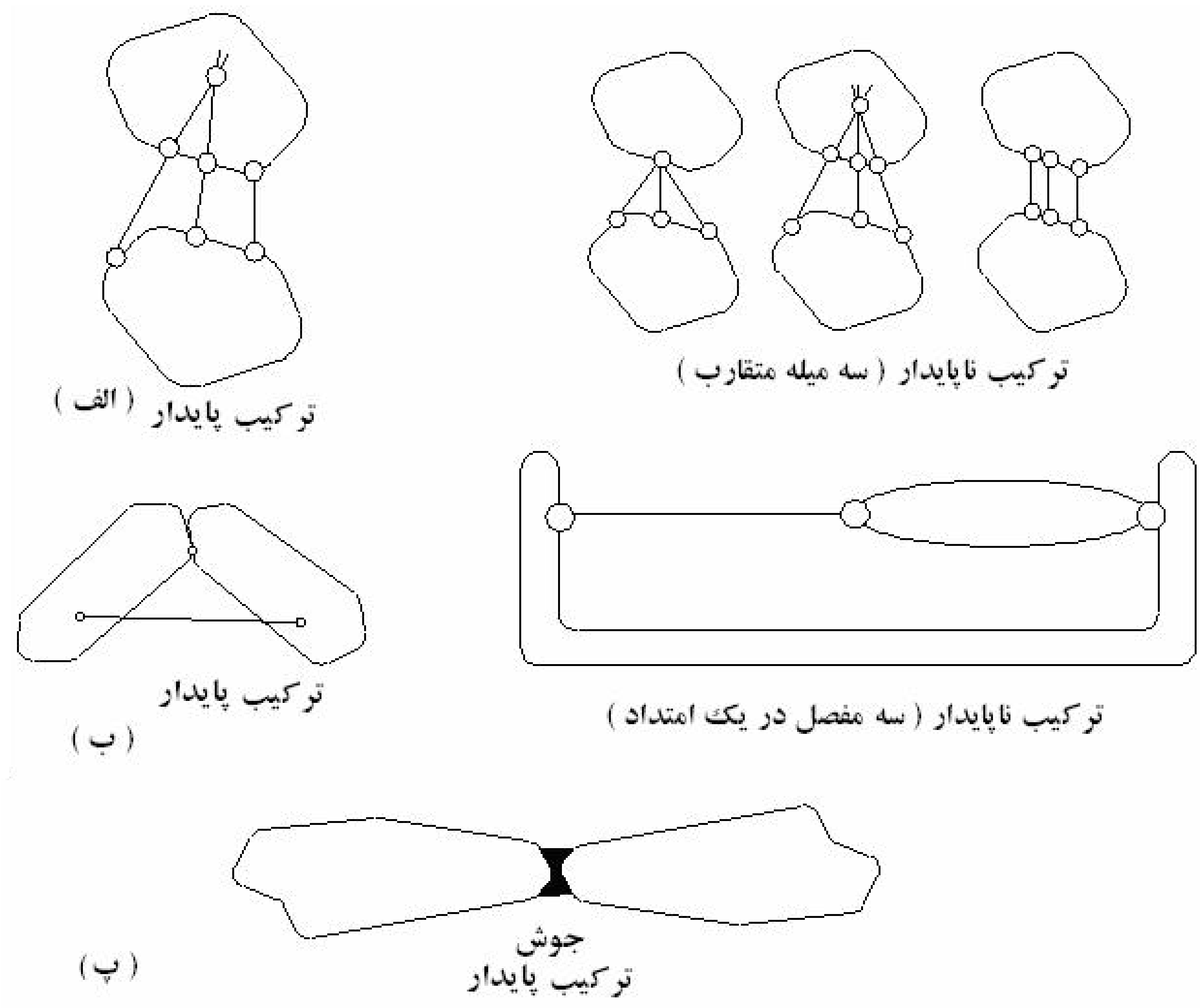
ب) ترکیب پایدار دو جسم صلب

ترکیب دو جسم صلب وقتی تشکیل سیستم صلبی را می دهند که به یکی از روش های زیر به یکدیگر متصل شده باشند :

1 – توسط سه میله غیر موازی و غیر متقارب (شکل الف)

2 – توسط یک مفصل و یک میله رابط که محور میله از مفصل عبور نمی کند (شکل ب)

3 – توسط یک اتصال صلب (شکل پ)



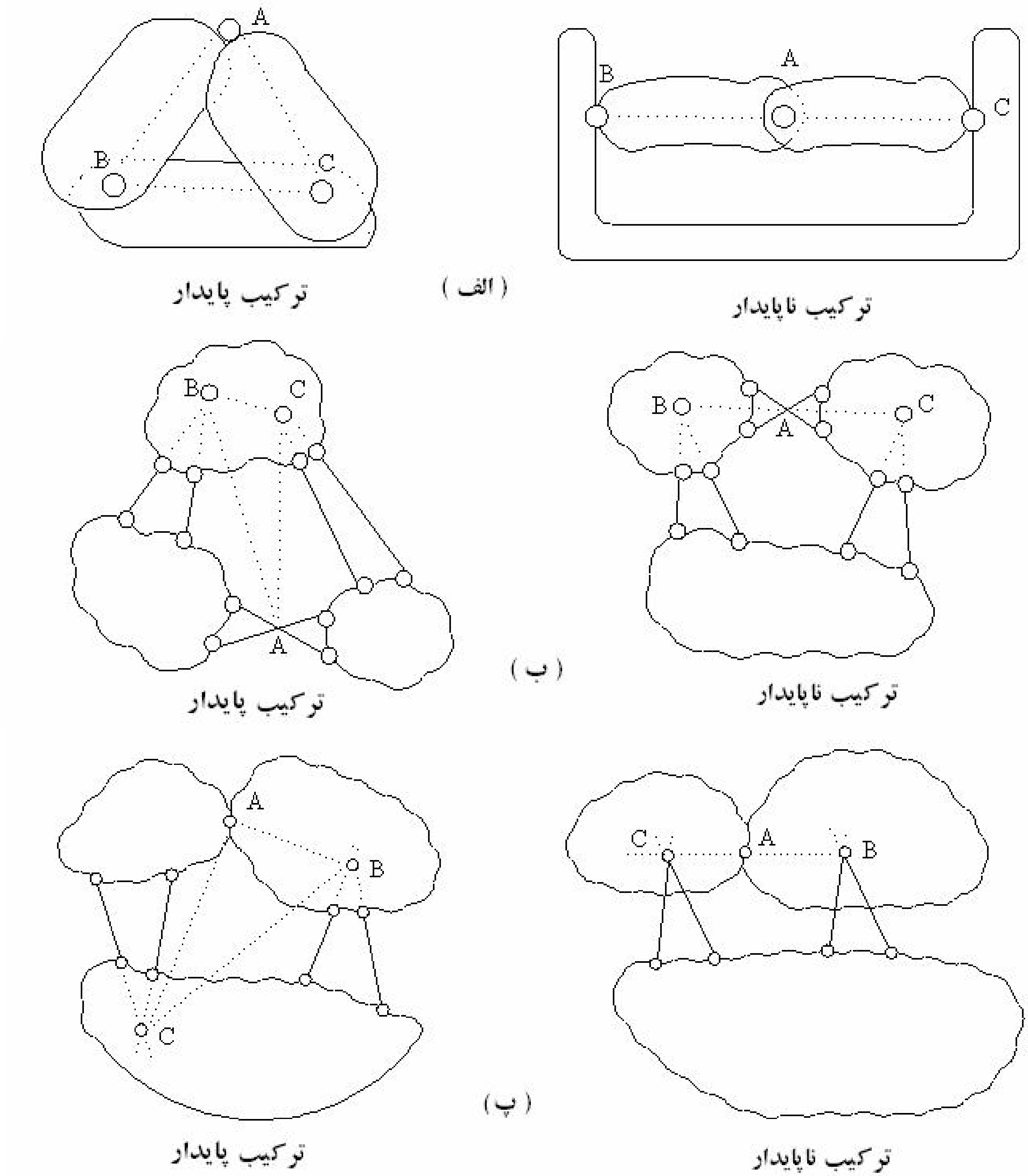
پ) ترکیب پایدار سه جسم صلب

سه جسم صلب وقتی تشکیل یک سیستم صلب می دهند که به یکی از روش های زیر به یکدیگر متصل شده باشند :

1- توسط سه مفصل که در یک امتداد قرار ندارند (شکل الف)

2- توسط شش میله که هر دو میله ، دو جسم صلب را به یکدیگر متصل نمایند و محل های تقاطع دو به دوی این میله ها اعم از این که مفصل مفصل حقیقی باشند یا موهومی (A,B,C در شکل ب) در روی یک خط مستقیم قرار نداشته باشند و تشکیل مثلث بدهند .

3- توسط ترکیبی از مفصل ها و میله ها به نحوی که مفصل های واقعی و موهومی در روی یک خط مستقیم قرار نگرفته باشند (شکل پ) با توجه به این که هر پیوند مفصل معادل ((پیوند با دو میله متلاقی)) است بنابراین در حالت اخیر هم ، پیوند سه جسم در واقع با شش میله صورت گرفته است .



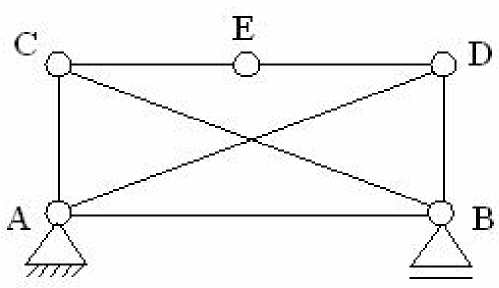
آزمون بار صفر برای تشخیص پایداری و ناپایداری خرپاها

آزمون بار صفر یکی از روش های ناپایداری خرپای معین ($x = 0$) است . اساس این روش بر این قاعده بدیهی فلسفی است که وجود علت بدون معلول محال است اگر بار خارجی علت باشد نیروی داخلی از جمله معلول ها می باشد اگر در یک خرپا که بار خارجی

ندارد و بنابراین عکس العمل های تکیه گاهی آن صفر است به یکی از میله ها نیرویی مانند S نسبت دهیم سپس با استفاده از معادلات تعادل نیروهای داخلی بقیه میله ها را بر حسب S بدست آوریم بدون آنکه هیچ کدام از معادلات تعادل نقض شود بدست آودن چنین نتیجه ای به این معناست که این خرپای بی آزرم توانسته است در غیاب بار خارجی نه یک دسته جواب بلکه جواب های بیشمار داشته باشد که خود نشانه پایداری است

مثال

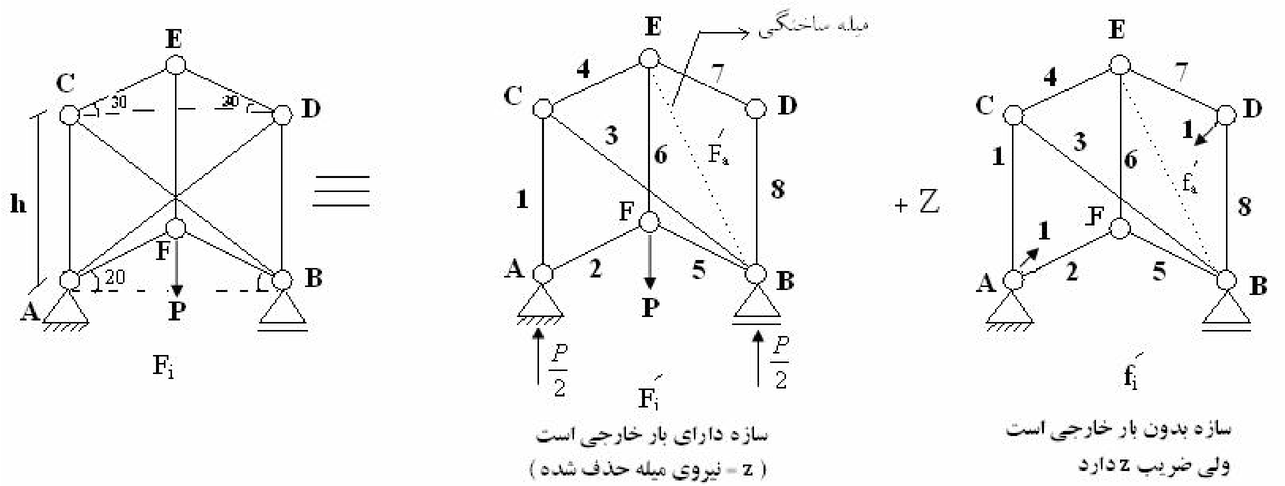
اگرچه این خرپا به دلیل وجود زنجیر سینمانیکی آشکارا ناپایدار است ولی در اینجا می خواهیم آزمون بار صفر را به کار ببریم .



$$F_{AC} = +s \Rightarrow \begin{cases} F_{ED} = F_{CE} = F_{BD} = +S \\ F_{AD} = F_{CB} = -\sqrt{2}\,S \end{cases}$$

اگر سازه پایدار باشد باید $s = 0$ باشد وجود این جواب ها در حکم ناپایداری سازه است .

روش هنبرگ در آنالیز خرپاهای پیچیده



1 – یک عضو خرپا را طوری جابجا می کنیم که خرپای حاصل یک خرپای پایدار ساده یا مرکب شود . باید توجه کرد که شرایط تکیه گاهی و بارگذاری تغییر نمی کند .

2 – خرپای حاصل را با بارگذاری واقعی اولیه حل می کنیم (نیروی داخلی اعضا در این مرحله با F_i' و نیروی میله ساختگی را با F_a' نشان می دهیم .

3 – در خرپای مرحله 2 بارهای خارجی را بر می داریم و در محل عضو جابجا شده یک جفت نیروی واحد قرار می دهیم و این خرپا را آنالیز می کنیم (نیروی داخلی اعضا در این حالت با F_i' نشان داده می شود (عکس العمل های تکیه گاهی در این حالت مساوی صفر است.)

$F_i = F_i' + Zf_i'$ نیروی هر میله خرپای واقعی با جمع آثار (1)

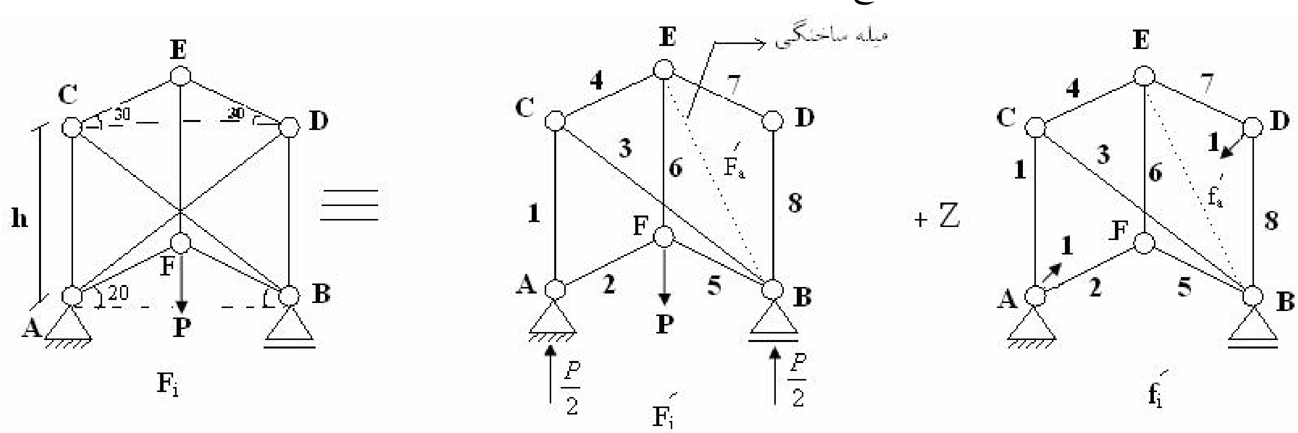
$$F_a = 0 \Rightarrow F_a' + Zf_a' = 0 \Rightarrow Z = -\frac{F_a'}{f_a'} \quad (2)$$

کاربرد رابطه 1 برای میله a (چون میله ساختگی a در واقع وجود ندارد) پس نیرویش مساوی صفر است

با معلوم شدن مقدار Z ، نیروی داخلی هریک از اعضا خرپا با رابطه جمع آثار مرحله ای $F_i = F_i' + f_i'$ بدست می آید.

توجه : دیده می شود که روش هنبرگ ضمن حل خرپای بغرنج پایداری و ناپایداریش را هم مشخص می کند .

مثال : نیروی داخلی اعضای خرپای بغرنج زیر را با فرض a = 1.5 m ، h = 2.7 m و p = 1000 kg محاسبه کنید .



ابتدا عضو AD خرپا را برداشته و به جای آن عضو BE را قرار می دهیم تا خرپای ساده F_i' به دست آید این خرپا را می توانیم برای بارهای خارجی و همچنین نیروهای واحد در امتداد خط AD خرپای f_i' با روش مفاصل به راحتی حل کنیم . نتایج بدست آمده در ستون های 2 و 3 جدول زیر ثبت شده اند . با استفاده از رابطه (2) مقدار Z را محاسبه کرده و ستون 4 جدول زیر را پر می کنیم و سپس نیروهای داخلی اعضای دیگر را از معادله (1) محاسبه می کنیم و نتایج را در ستون 5 می نویسیم . در ستون 5 نیروی عضو جعلی a صفر است از این نکته می توان برای کنترل جواب ها استفاده کرد .

شماره میله (1)	(2) F_i'	(3) f_i'	(4) Zf_i'	(5) $F_i = F_i' + Zf_i'$
1	-500 kg	- 0.547	- 546	- 1046
2	0	- 0.749	- 714	- 714
3	+ 455	+ 0.522	+ 498	+ 953
4	- 391	- 0.488	- 427	- 818
5	0	- 0.749	- 714	- 714
6	+ 1000	- 0.191	- 182	+ 818
7	0	- 0.858	- 818	+ 818
8	0	- 1.098	- 1046	- 1046
a	-872	+ 0.915	+ 872	0

اصل تغییر مکان های مجازی

اگر جسم صلبی در حال تعادل باشد و این تعادل را حین وقوع تغییر مکان کوچک مجازی حفظ کند کار مجازی خارجی انجام یافته بوسیله نیروها در همه حالت ها صفر خواهد بود .

$$\sum W_{ext} = 0$$

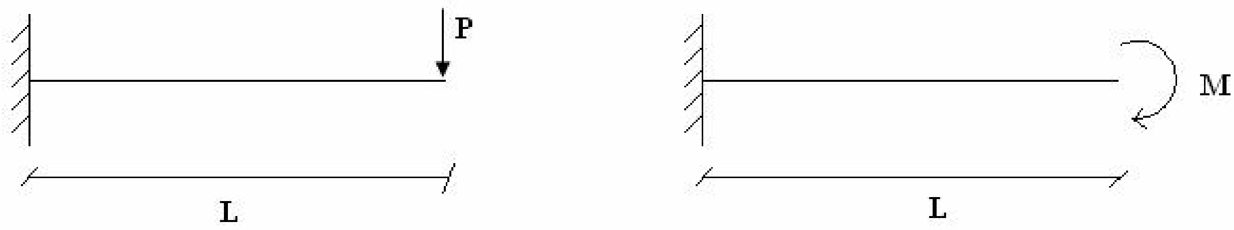
W_{ext} = تغییر مکان مجازی در امتداد نیرو × نیروی حقیقی

توجه : برای سازه های غیر صلب یا تغییر شکل پذیر علاوه بر کار مجازی نیروهای خارجی ، کار مجازی نیروهای داخلی یا برآیندهای تنش نیز باید محاسبه شود .

کار نیرو = نیرو × جابجایی در امتداد نیرو $= P.\bar{\delta}$

کار لنگر = لنگر × تغییر زاویه (رادیان) $= M.\bar{\theta}$

مثال : واکنش های تکیه گاهی تیرهای زیر را با استفاده از اصل تغییر مکان های مجازی محاسبه کنید.



بیان اصل نیروهای مجازی (که برای محاسبه تغییر مکان ها به کار می رود) :

اگر به سازه شکل پذیری که تحت اثر مقداری بار در حال تعادل است تغییر شکل مجازی کوچکی داده شود در این صورت کار مجازی انجام شده به وسیله نیروهای خارجی (بارها) برابر با کار مجازی انجام شده به وسیله نیروهای داخلی یا برآیندهای تنش می باشد :

$$\sum W_{ext}^{\text{مجازی}} = \sum W_{int}^{\text{مجازی}}$$

لفظ کار مجازی به این دلیل به کار می رود که یا نیرو و یا تغییر مکان مجازی می باشند .

نکته : در مکانیک ، انرژی ، ظرفیت انجام کار تعریف می شود و کار نیز حاصل ضرب نیرو در تصویر تغییر مکان در امتداد نیرو می باشد در اجسام جامد شکل پذیر حاصل ضرب تنش در سطح مربوطه تشکیل نیرو و تغییر شکل ها ، تشکیل تغییر مکان ها را می دهند . حاصل ضرب این دو کار داخلی انجام شده در جسم توسط نیروهای موثر خارجی می باشد و این کار داخلی در جسم به صورت انرژی کرنشی الاستیک (انرژی کرنشی داخلی) ذخیره می شود .

گام های محاسبه δ^{i}_{m} در خرپا (محاسبه تغییر مکان نقطه گرهی m در امتداد دلخواه)

گام 1) خرپا را تحت اثر عامل خارجی حل می کنیم (نظیر حرارت یا بار خارجی P) نیروهای این مرحله را با N نشان می دهیم

گام 2) خرپا را در غیاب بار خارجی تحت اثر نیروی واحد در نقطه m (نقطه مورد نظر) و در امتداد $\bar{i}$ (که توسط صورت مسئله مشخص می شود) حل می کنیم. نیروهای داخلی در این مرحله با $\bar{N}$ ($\bar{N}_1$ ، $\bar{N}_2$ و ...) نشان می دهیم

گام 3) تغییر مکان های حقیقی مجهول سازه را به سازه گام 2 نسبت می دهیم (اهدا یا تحمیل تغییر مکان) از آن جا که این تغییر مکان ها با نیروهای مجازی هیچ نسبتی (خویشاوندی) ندارند یعنی $\bar{N}$ ، δ را تولید نمی کند بنابراین کار داخلی انجام شده حاصل از مستطیل کار

است و ضریب $\frac{1}{2}$ نخواهد داشت (زیرا کار مجازی است و کار مجازی ضریب $\frac{1}{2}$ ندارد)یعنی به جای مثلث کار مستطیل کار داریم یعنی کار داخلی عبارت است از :

$$W_{\text{int}} = \sum_{j=1}^{n} \overline{N}.(\Delta L_{red}) = \sum_{j=1}^{n} \overline{N_j} \cdot \frac{N_j \ell_j}{(EA)_j}$$

(ΔL_{red}) : تغییر مکان های حقیقی گام 1 می باشد .

گام 4) محاسبه کار خارجی انجام شده : تنها کا خارجی انجام شده در حالتی که نشست نداریم برابر است با :

$$\sum \overline{W}_{ext} = \bar{1} * \delta_m^{\ i}$$

$$\sum \overline{W}_{ext} = \bar{1} * \delta_m^{\ i} + \overbrace{\overline{W}_R}^{0}$$ کار خارجی در حالتی که نشست داریم

$\overline{W}_R$: کار عکس العمل در حین نشست (به فرض وجود)

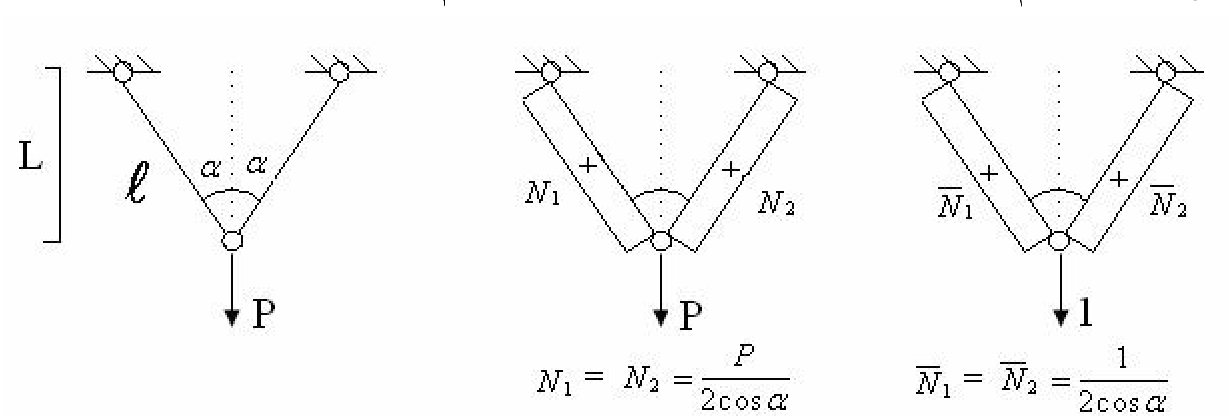
گام 5) تساوی کار داخلی و کار خارجی را می نویسیم :

$$\bar{1} * \delta_m^{\ i} = \sum_{j=1}^{n} \overline{N_j} \cdot \frac{N_j \ell_j}{(EA)_j}$$

گام 6) اگر $\delta_m^{\ i}$ مثبت باشد به این معناست که تغییر مکان واقعی نقطه m در امتداد $\bar{i}$ در جهت بار واحد است و اگر $\delta_m^{\ i}$ منفی باشد تغییر مکان نقطه m در امتداد $\bar{i}$ در خلاف جهت بار واحد است .

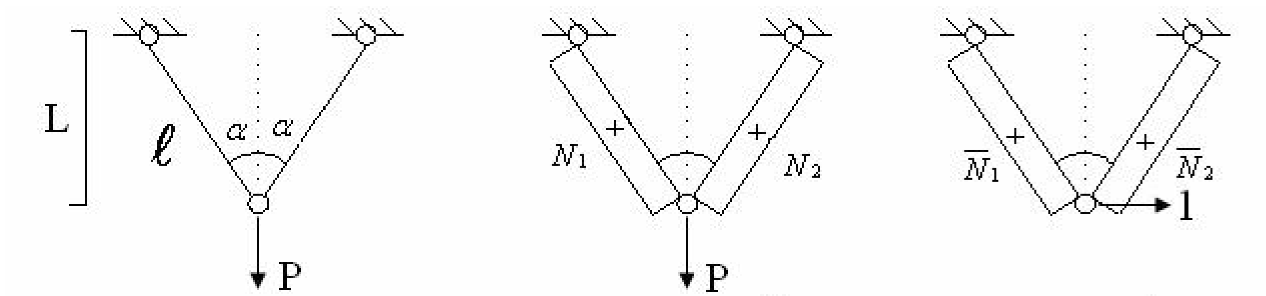
تبصره: علت وارد کردن بار واحد و نه لنگر واحد این است که هر تغییر مکانی با نیروی واحد مجازی متناظر با آن می تواند محاسبه شود یعنی کسی که قصد محاسبه δ را دارد بار متمرکز واحد در امتداد $\bar{i}$ وارد می کند و برای محاسبه دوران نقطه m باید لنگر واحد را در نقطه m وارد کنیم .دوران گره در خرپا و اعمال لنگر در خرپا منتفی است .

مثال: تغییر مکان قائم نقطه m را در خرپای زیر محاسبه کنید .(تغییر مکان قائم m در امتداد $\bar{i}$)



$$\bar{1} * \delta_m^{\,i} = \sum_{j=1}^{2} \bar{N}_j \frac{N_j \ell_j}{(EA)_j} = \frac{2}{EA}\left(\frac{1}{2\cos\alpha} * \frac{P}{2\cos\alpha} * \frac{L}{\cos\alpha}\right) = \frac{PL}{2EA\cos^3\alpha}$$

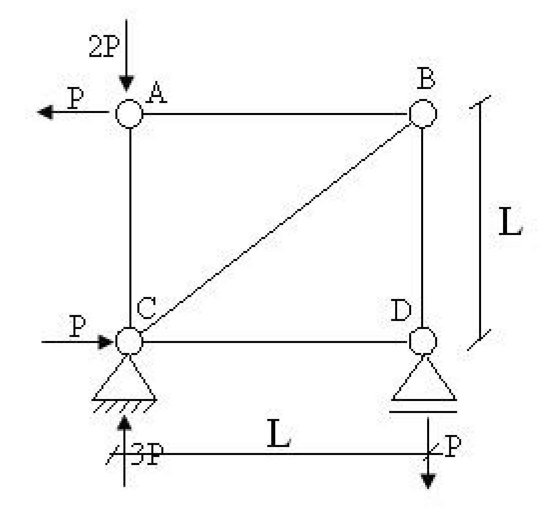
در مثال بالا ثابت کنید که تغییر مکان نقطه m در امتداد عمود بر $\bar{i}$ صفر است .



$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2\cos\alpha} \qquad \bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

$$\bar{1} * \delta_m^{\,j} = \sum_{j=1}^{2} \bar{N}_j \frac{N_j \ell_j}{(EA)_j} = \frac{1}{EA}\left(\frac{1}{2\sin\alpha} * \frac{P}{2\cos\alpha} * \frac{L}{\cos\alpha} - \frac{1}{2\sin\alpha} * \frac{P}{2\cos\alpha} * \frac{L}{\cos\alpha}\right) = 0$$

مثال : تغییر مکان افقی نقطه B را در خرپای زیر محاسبه کنید .



حل : ابتدا تحت اثر بار خارجی نیروی داخلی اعضا را بدست می آوریم .

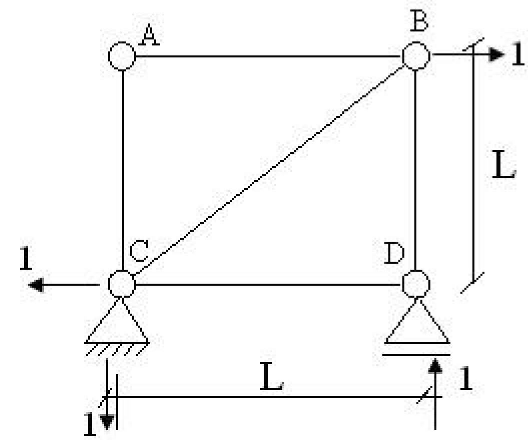
محاسبه عکس العمل ها
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow R_D = P \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow R_C = 3P \end{cases}$$

گره A
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = P \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC} = -2P \end{cases}$$

$$
\text{B گره}\begin{cases}\sum F_x=0\Rightarrow P+\frac{1}{\sqrt{2}}F_{BC}=0\Rightarrow F_{BC}=-P\sqrt{2}\\ \sum F_y=0\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}P)=F_{BD}\Rightarrow F_{BD}=P\end{cases}
$$

$$
\text{C گره}\begin{cases}\sum F_x=0\Rightarrow F_{CD}+P=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}P)\Rightarrow F_{CD}=0\\ \sum F_y=0\Rightarrow ok\end{cases}
$$

حال بار واحد را در نقطه B در امتداد افق وارد کرده و نیروهای داخلی را محاسبه می کنیم .



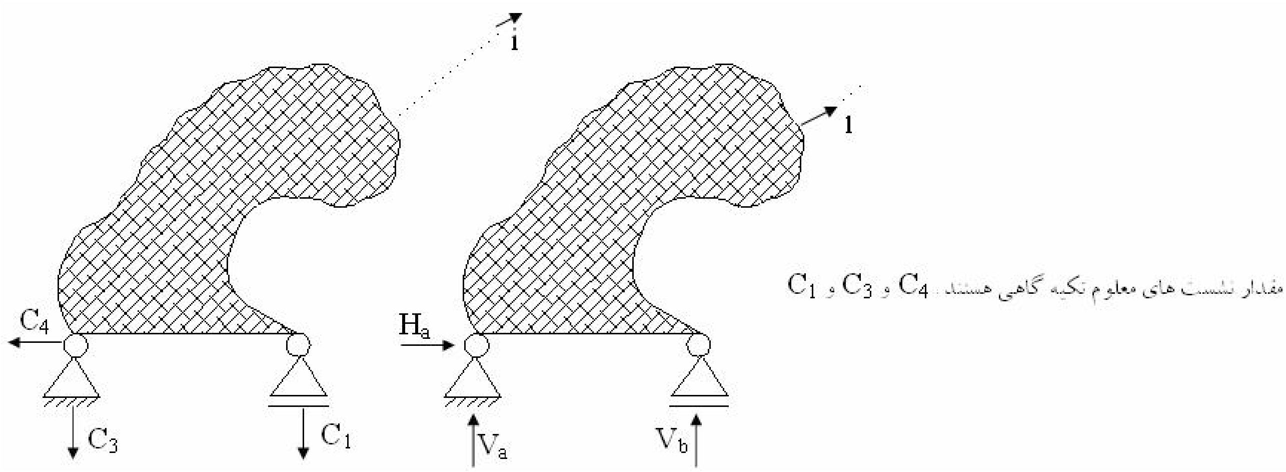
$$
\text{محاسبه عکس العمل ها}\begin{cases}\sum F_x=0\Rightarrow R_{CX}=1\\ \sum M_D=0\Rightarrow R_{CY}=1\\ \sum F_Y=0\Rightarrow R_{DY}=1\end{cases}
\qquad
\text{A گره}\begin{cases}\sum F_x=0\Rightarrow F_{AB}=0\\ \sum F_y=0\Rightarrow F_{AC}=0\end{cases}
$$

$$
\text{D گره}\begin{cases}\sum F_x=0\Rightarrow F_{DC}=0\\ \sum F_y=0\Rightarrow F_{BD}=-1\end{cases}
\qquad
\text{C گره}\begin{cases}\sum F_x=0\Rightarrow F_{BC}*\frac{1}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow F_{BC}=\sqrt{2}\\ \sum F_y=0\Rightarrow ok\end{cases}
$$

$\overline{N}NL$	N	$\overline{N}$	طول	عضو
0	P	0	L	AB
0	-2P	0	L	AC
-PL	P	-1	L	BD
0	0	0	L	CD
-2.828 PL	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}L$	CB

$$\sum=-3.828PL$$

گام های محاسبه $\delta_m{}^i$ در اثر نشست تکیه گاهی



گام 1) در اینجا گام اول سابق را نداریم چون بار خارجی نداریم .

گام 2) محاسبه عکس العمل های مجازی ناشی از بار واحد ی که در نقطه مورد نظر اعمال کرده ایم .

گام 3) مجموع کارهای خارجی را مساوی صفر قرار می دهیم زیرا در این حالت کار خارجی نداریم . کار عکس العمل هایی که با نشست مربوطه هم جهت باشند ، مثبت منظور می شود و کار عکس العمل هایی که با نشست مربوطه هم جهت نباشند منفی در نظر گرفته می شود .

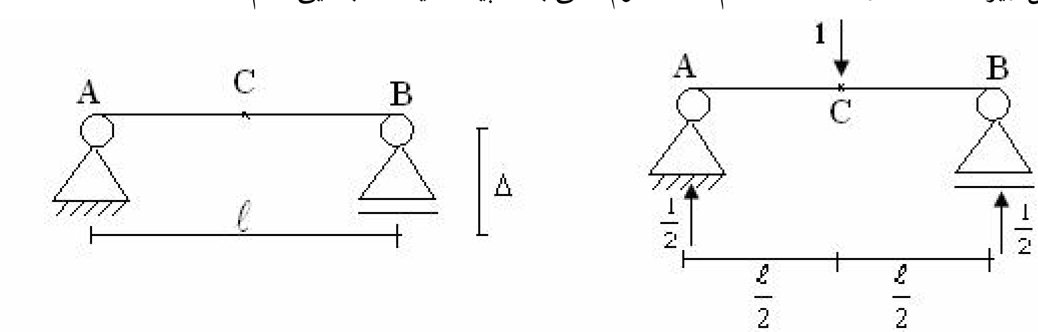
$$W_{ext}=0 \Rightarrow \bar{1}*\delta_i^m - V_B*C_1-\overline{V_a}*C_3-H_a*C_4=0$$

$$1*\delta^i{}_m=-\sum_{j=1}^{n}\overline{C_j}C_j$$

C_j : نشست متناظر با نیروی تکیه گاهی

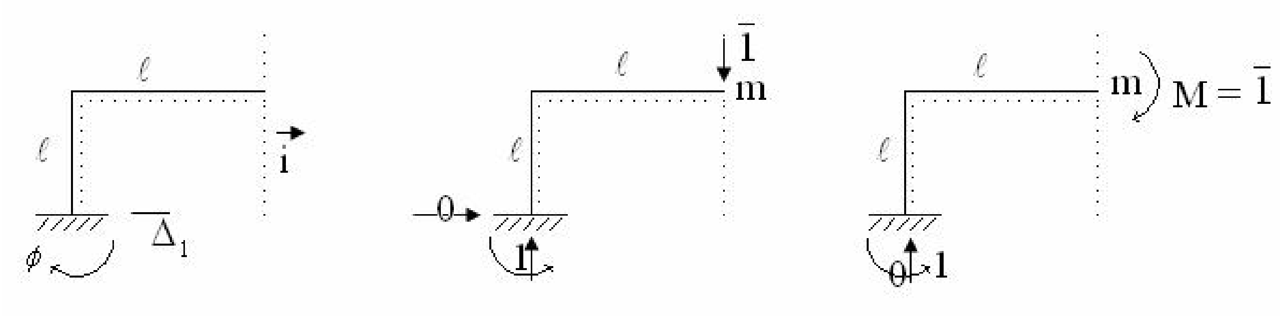
$\overline{C_j}$: عکس العمل مجازی ناشی از بار واحد

مثال : در تیر شکل زیر نقطه B دارای نشست قائم Δ (معلوم) می باشد پیدا کنید : جابجایی قائم نقطه C ؟



$$1*\delta_c{}^v=\sum_{j=1}^{2}\overline{C}_jC_j=-\left[(-\frac{1}{2})(\Delta)+(\frac{1}{2})(0)\right]=\frac{\Delta}{2}$$

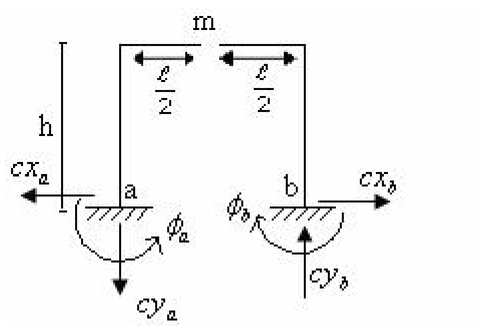
مثال : در قاب شکل زیر تکیه گاه A دارای دوران ϕ و تغییر مکان افقی Δ_1 می باشد مطلوبست محاسبه $\delta_m{}^i$ و θ_m.

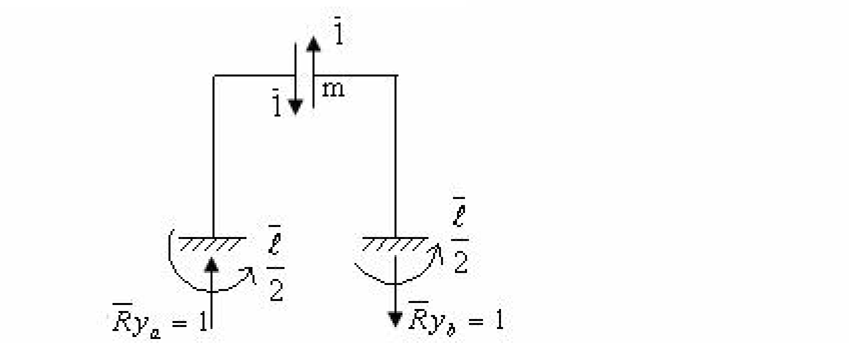


$$1*\delta_m{}^i=-[0+\Delta_1+(1)(0)-(\ell)(\phi)]$$
$$\Rightarrow \delta_m{}^i=\phi\ell>0$$

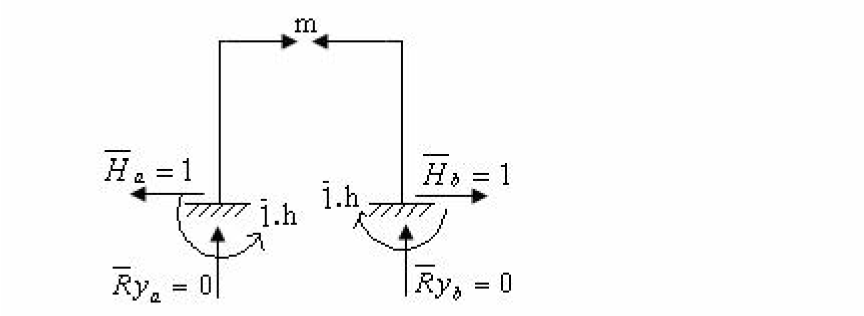
$$1*\theta_m=-[(-1)(\phi)]=\phi\theta_m$$
$$\Rightarrow \theta_m=+\phi$$

مثال: تغییر مکان نقطه m در اثر نشست های تکیه گاهی C_{xa} و C_{xb} و C_{ya} و C_{xb} و ϕ_a و ϕ_b محاسبه کنید (تغییر مکان نسبی افقی و قائم نقطه m)





$$\bar{1}*\delta^v{}_m=-\left\{-1*Cy_a+\frac{\ell}{2}*\phi_a-1*Cy_b-\frac{\ell}{2}*\phi_b\right\}$$
$$\Rightarrow \delta^v{}_m=Cy_a-\frac{\ell}{2}\phi_a+Cy_b+\frac{\ell}{2}\phi_b$$



$$\bar{1}*\delta^H_m = -\{0*Cy_a + \bar{1}*Cx_a + \bar{1}*h*\phi_a + 0*Cy_b + \bar{1}*Cx_b + \bar{1}*h*\phi_b\}$$

$$\Rightarrow \delta^H_m = -Cx_a - h\phi_a - Cx_b - h\phi_b$$

نکته: ما در اینجا سازه را برای عواقب نشست آماده می کنیم نه اینکه از نشست جلوگیری کنیم

- هرگونه تغییر وضعیت در تکیه گاه به عنوان نشست در نظر گرفته می شود
- جابجایی در حین اثر توام بارگذاری و نشست به کمک جمع آثار محاسبه می شود .

δ (بارگذاری) + δ (نشست) = δ(بارگذاری + نشست)

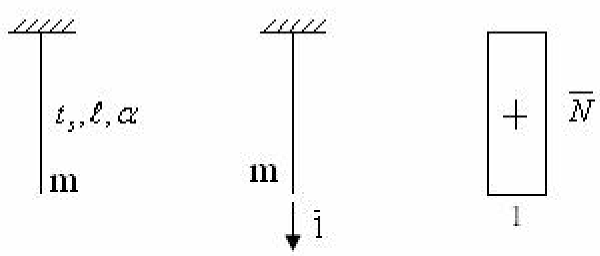
محاسبه $\delta^i{}_m$ سازه معین (خرپایی ، خمشی ، مختلط) به کمک اصل کار مجازی در اثر وجود t_s:

t_s: تغییر یکنواخت دمای یک یا چند عضو یا همه اعضا نسبت به زمان نصب .

$t_s > 0$: عضو مورد نظر گرم شده $t_s = t_1 - t_0$ t_0: دما در زمان نصب

$t_s < 0$: عضو مورد نظر سرد شده t_1: دما در زمان مورد مطالعه

مثال : تغییر مکان قائم نقطه m را در اثر وجود t_s به دست آورید .



$\Delta_{حقیقی} = \alpha.t_s.\ell$

گام 1) اثر بار خارجی (حرارت) و محاسبه Δ حقیقی

گام 2) حل سازه تحت اثر بار واحد در امتداد قائم در نقطه m

گام 3) نوشتن رابطه تساوی کار خارجی و کار داخلی

$$W_{ext} = W_{\text{int}}$$

$$\Rightarrow 1*\delta^v{}_m = \overline{N}\Delta_{real} \Rightarrow \overline{N}\alpha\ell t_s = \alpha\ell t_s$$

بنابراین تغییر مکان نقطه m ناشی از حرارت t_s به صورت زیر محاسبه می شود .

$$1*\delta^{i}{}_{m}=\sum_{j=1}^{n}\overline{N_j}(\Delta_{real})_j=\sum_{j=1}^{n}\overline{N_j}(\alpha\ell t_s)_j=\int\overline{N}(x)\alpha t_s dx$$

نکته: سازه معین تحت اثر افزایش دما تغییر مکان دارد اما هیچ نیروی داخلی ندارد (به علت سازگاری اعضا و عدم ممانعت از تغییر شکل محوری اعضا نسبت به همدیگر)

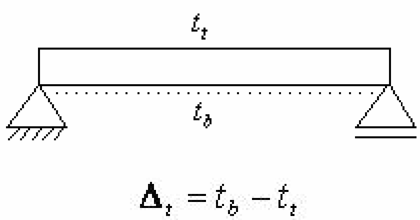
محاسبه $\delta^{i}{}_{m}$ در اثر تغییر دمای غیر یکنواخت (Δt) : (در سازه های خمشی)

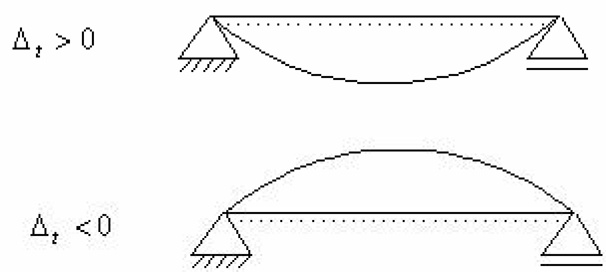
Δt **:** تغییر غیر یکنواخت دما با گرادیان خطی در ارتفاع عضو در سازه های خمشی (Δt در خرپای ایده آل مطرح نیست)

Δt و t_s در سازه های معین فقط ایجاد تغییر شکل می کنند ولی در سازه های نامعین تنش نیز تولید می کنند و معمولا تغییر شکل هم به وجود می آورند ولی استثنا هم وجود دارد

سازه معین تحت اثر تغییر غیر یکنواخت درجه حرارت ، نیروی داخلی نخواهد داشت این اختلاف درجه حرارت بین تار بالا و تار پایین منجر به انحنای محور تیر می گردد و این به معنای به وجود آمدن تغییر شکل جانبی است .

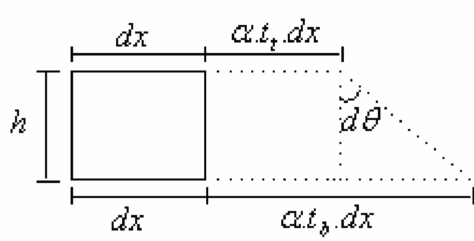
ضمنا شرط وجود گرادیان خطی دما بین تار بالا و تار پایین ضروری است تا مقاطع تیر که مسطح می باشند بعد از تغییر شکل نیز مسطح باقی بمانند . (فرض اساسی در مبحث خمش تیر در مقاومت مصالح)





اثر Δt عملا در خرپا بررسی نمی شود چون در خرپای ایده آل لنگر نداریم و در محاسبه کار مجازی داخلی دچار مشکل می شویم :

**برای محاسبه $\delta^{i}{}_{m}$ در اثر Δt یک المان به طول dx از تیر را در نظر می گیریم



$$\tan d\theta \cong d\theta = \frac{\alpha t_b.dx - \alpha t_t.dx}{h} = \frac{\alpha(t_b - t_t)dx}{h} = \frac{\alpha \Delta t dx}{h}$$

انحنا = K

$$\Rightarrow d\theta = \frac{\alpha \Delta t dx}{h} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha \Delta t}{h} = \frac{M}{EI} = K$$

گام های محاسبه $\delta^i{}_m$ در حالت وجود Δt :

گام 1) حل سازه تحت اثر بار خارجی (حرارت غیر یکنواخت) و رسم دیاگرام $\frac{\alpha\Delta t}{h}$ و یا محاسبه مقدار آن . چون $\frac{\alpha\Delta t}{h}$ عدد ثابتی است پس دیاگرام آن مستطیل و دارای علامت است اگر $\Delta t > 0$ در این صورت مستطیل مثبت و اگر $\Delta t < 0$ مستطیل منفی خواهیم داشت .

گام 2) اعمال بار واحد متناظر با تغییر مکان مطلوب و نوشتن معادلات $\overline{M}$ و رسم دیاگرام آن ها

گام 3) نوشتن رابطه کار مجازی

$$\overline{W}_{ext} = \overline{W}_{\text{int}} \Rightarrow \bar{1} * \delta^i{}_m = \sum \int_0^\ell \overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}dx$$

نکته : در صورتی که بار واحد در سازه $\overline{N}$ تولید نماید با توجه به این که تار خنثی نسبت به زمان نصب افزایش دما داشته است می توان کار داخلی ناشی از آن را هم در عبارت کار داخلی مجازی منظور کرد :

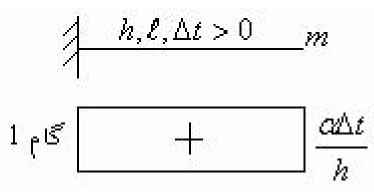
$$\bar{1} * \delta^i{}_m = \sum_{j=1}^{n} \int_0^\ell \overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}dx + \sum \int_0^\ell \overline{N}\alpha t_s dx$$

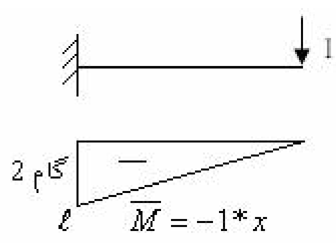
t_s : عبارت از تغییر دمای تراز تار خنثی است

ولی اگر در مسئله ای فقط Δt داده شود یا موقعیت تار خنثی قابل تشخیص نباشد نمی دانیم در تار وسط چه می گذرد پس $\overline{N}$ را منظور نمی کنیم و اگر t_s داده شده باشد و یا بتوان آنرا بدست آورد ، نمی توان از اثر آن صرف نظر کرد .

مثال : تغییر مکان قائم نقطه m را در اثر حرارت غیر یکنواخت Δt تعیین کنید (بروش کار مجازی)

حل : در این مسئله $\overline{N}$ تولید نمی شود و بنابراین عبارت کار مجازی فقط حاوی اثر M است و جمله $\int_0^\ell \overline{N}\alpha t dx$ را ندارد





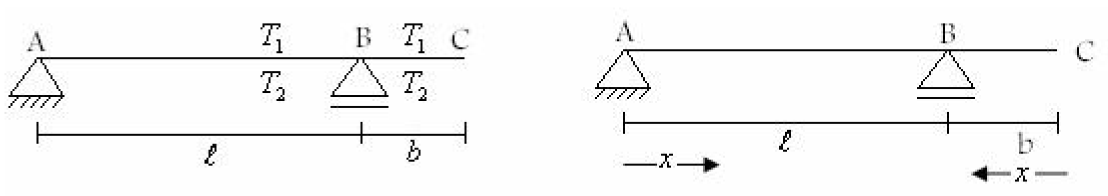
$$1 * \delta_m{}^v = \int_0^\ell \overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}dx = \int_0^\ell (-1 * x)\frac{\alpha\Delta t}{h}dx = \frac{\ell^2}{2} * \frac{\alpha\Delta t}{h} = -\frac{\alpha\Delta t\ell^2}{2h}$$

$$\Rightarrow \delta_m{}^v = -\frac{\alpha\Delta t\ell^2}{2h}$$

علامت منفی نشان می دهد که جهت m رو به بالا و مخالف بار واحد است

مثال : خیز انتهای آزاد سمت پیش آمده تیر ($\delta^{v}{}_{c}$) را محاسبه کنید (بارگذاری حرارتی در روی تیر نشان داده شده است)

حل : در این مسئله هم تحت اثر بار واحد نیروی محوری $\overline{N}$ تولید نمی شود ، علاوه بر این موقعیت تار خنثی هم معلوم نیست بنابراین در عبارت کار مجازی جمله $\sum\int_0^{\ell}\overline{N}\alpha t_s dx$ وجود ندارد .



$$\begin{cases}\sum M_B = 0 \Rightarrow 1*b = R_A*\ell \Rightarrow R_A = \dfrac{b}{\ell} \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow R_B = 1+\dfrac{b}{\ell}\end{cases}$$ عکس العمل های تیر ناشی از بار واحد در نقطه c

$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad \begin{matrix} 0 \le x \le \ell & \overline{M} = -\dfrac{b}{\ell}x \\ 0 \le x \le b & \overline{M} = -x \end{matrix}$$

$$\bar{1}*\delta_c^v = \int \overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}dx = \int_0^{\ell}\overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}dx + \int_0^{b}\overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}dx = \int_0^{\ell}(-\frac{b}{\ell}x)(\frac{\alpha\Delta t}{h})dx + \int_0^{b}(-x)(\frac{\alpha\Delta t}{h})dx$$

$$\Rightarrow \delta_c^v = \frac{-\alpha b\Delta t(\ell+b)}{2h}$$

اگر $\Delta t > 0$ نقطه c رو به بالا می رود و اگر $\Delta t < 0$ نقطه c رو به پایین می رود

محاسبه تغییر مکان های θ_m و θ_{mm} و $\delta^{i}{}_{m}$ و δ_{mm} در سازه های خمشی یا مختلط با روش بار واحد :

مقدمه :

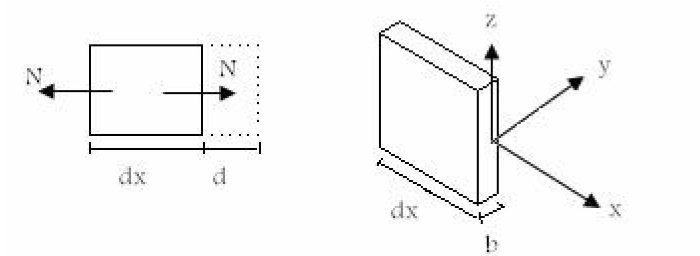
محاسبه کار داخلی در سازه های خمشی ناشی از M ، V ، N ، T

$W_{\text{int}} = W_N + W_V + W_M + W_T$ در سازه های دو بعدی

اغلب مسئله های دو بعدی پیچش ندارند زیرا پیچش مسئله را قدری سه بعدی می کند .

توجه: کار داخلی همان کار تنش هاست وقتی که کرنش ها رخ می دهند .

الف) کار داخلی نیروی محوری



همان کار مجازی است زیرا یکی از دو عامل δ,ε مجازی است $W_{\text{int}} = \int \delta\varepsilon dxdydz$ در عدم تناسب δ,ε

همان کار حقیقی یا انرژی کرنشی یا انرژی تغییر شکل نسبی است $W_{\text{int}} = \int \frac{1}{2}\delta\varepsilon dxdydz$ در حالت متناسب بودن δ,ε

از طرفی می دانیم : $\varepsilon = \frac{N}{EA}, \delta = \frac{N}{A}$

در حالت عدم تناسب δ,ε $\overline{W}_{\text{int}} = \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^{\ell} \frac{\overline{N}}{A} * \frac{N}{EA} dxdydz = \int_0^{\ell} \overline{N}\frac{N}{EA}dx$

در حالت متناسب بودن δ,ε $W_{\text{int}} = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} * \frac{N}{A} * \frac{N}{EA} * Adx = \int_0^{\ell} \frac{N^2 dx}{2EA}$

$$\text{نتیجه} \Rightarrow \begin{cases} \overline{W}_{\text{int}} = \int_0^{\ell} \overline{N}\frac{N}{EA}dx \\ W_{\text{int}} = u = \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2EA}dx \end{cases}$$

کارهای مجازی ممکن است مثبت یا منفی باشند اما انرژی کرنشی به علت وجود توان دوم N هیچگاه منفی نمی شود .

روش دوم : برای محاسبه انرژی کرنشی المان میله ای که تحت اثر بار محوری است :

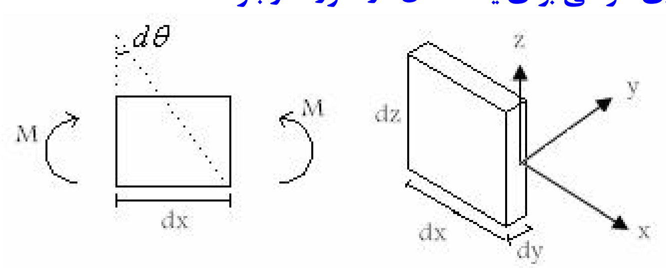
تغییر مکان $\Delta = dx$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\Delta N = \frac{1}{2}\frac{Ndx}{EA}N = \frac{N^2 dx}{2EA}$$

برای المان ، برای یافتن انرژی کرنشی میله باید در طول میله انتگرال بگیریم

$$\Rightarrow W_{\text{int}} = \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2EA}dx$$

ب) محاسبه کار داخلی مجازی و انرژی کرنشی برای یک المان در صورت وجود M :



$W_{\text{int}} = \int \delta\varepsilon dxdydz$ در عدم تناسب δ,ε

$W_{\text{int}} = \int \frac{1}{2}\delta\varepsilon dxdydz$ در حالت متناسب بودن δ,ε

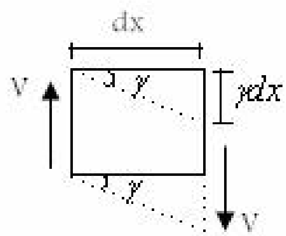
از طرفی می دانیم : $\varepsilon = \dfrac{MZ}{EI}, \delta = \dfrac{MZ}{I}, I_y = \int Z^2 dA$

نتیجه $\Rightarrow \begin{cases} \overline{W}_{\text{int}} = \int_0^{\ell} \overline{M} \dfrac{M}{EI_y} dx \\ W_{\text{int}} = u = \int_0^{\ell} \dfrac{M^2}{2EI_y} dx \end{cases}$

راه دوم $\begin{cases} W_{\text{int}} = \dfrac{1}{2} M d\theta = \dfrac{1}{2} M \dfrac{Mdx}{EI_y} = \dfrac{M^2 dx}{2EI} \\ \Rightarrow W_{\text{int}} = \int_0^{\ell} \dfrac{M^2}{2WI} dx \end{cases}$

برای تعیین انرژی کرنشی کل میله باید در طول میله انتگرال بگیریم

محاسبه کار داخلی مجازی و انرژی کرنشی در حالت وجود نیروی برشی (V) :



انرژی کرنشی برای المان $\begin{cases} W_{\text{int}} = \dfrac{1}{2} V(\gamma dx) = \dfrac{1}{2} V \dfrac{\tau}{G} dx \\ W_{\text{int}} = \dfrac{1}{2} V \dfrac{V}{GA'} dx = \dfrac{V^2 dx}{2GA'} \end{cases}$

علت ظهور A' به جای A این است که $\tau = \dfrac{VQ}{Ib} \neq \dfrac{V}{A}$ است

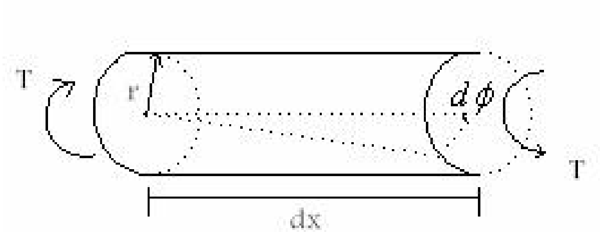
کار داخلی مجازی برای المان $\overline{W}_{\text{int}} = \dfrac{\overline{V} V dx}{GA'}$

کار داخلی عضو در اثر نیروی برشی $W_{\text{int}} = \int_0^{\ell} \dfrac{V^2 dx}{2GA'}$

انرژی کرنشی کل سازه در اثر نیروی برشی $U = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell} \dfrac{V^2 dx}{2GA'}$

مقطع کوچک شده برشی می باشد $A' < A, A' = \dfrac{A}{f_s}, f_s = \dfrac{A}{I^2} \int \dfrac{Q^2}{b^2} dA > 1$

محاسبه کار داخلی و انرژی کرنشی در پیچش :



$$W_{int} = \frac{1}{2}TdQ = \frac{1}{2}T\frac{Tdx}{GJ}$$

المان $W_{int} = \frac{T^2dx}{2GJ}$ عضو $W_{int} = \int\frac{T^2dx}{2GJ}$

کار داخلی مجازی برای المان $= \frac{\overline{T}Tdx}{GJ}$

نتیجه
$$\begin{cases} W_{int} = U = \sum\int_0^{\ell}T^2\frac{dx}{2GJ} \\ W_{int} = \overline{T}T\frac{dx}{GJ} \end{cases}$$

روش کار حقیقی برای محاسبه تغییر مکان ها : (این روش محدود به موارد خاص می باشد و قابلیت تعمیم برای بارگذاری متنوع و متعدد را ندارد)

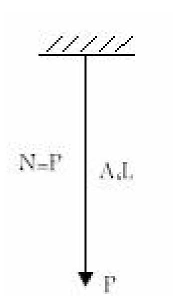
این قسمت بخش فرعی و حاشیه ای در مبحث کار مجازی می باشد روش کار حقیقی بر قاعده زیر استوار است :

$W_{ext} = U$ کار خارجی = انرژی کرنشی داخلی

$$U = W_{int} = U_N + U_M + U_V + U_V$$

$$= \sum\int\frac{N^2dx}{2EA} + \sum\int\frac{M^2dx}{2EI} + \sum\int\frac{V^2dx}{2GA'} + \sum\int\frac{T^2dx}{2GJ}$$

مثال : مطلوبست محاسبه تغییر مکان انتهای آزاد یک میله الاستیک با سطح مقطع A و طول ℓ در اثر نیروی محوری P که بر انتهای آزاد آن وارد می گردد .

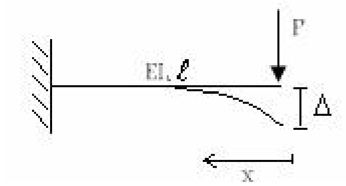


$$W_{ext} = \frac{1}{2}P.\Delta$$

$$U = U_N = \int_0^{\ell}\frac{N^2dx}{2EA} = \frac{P^2\ell}{2EA}$$

$$W_{ext} = U \Rightarrow \frac{1}{2}P.\Delta = \frac{P^2\ell}{2EA} \Rightarrow \Delta = \frac{P\ell}{EA}$$

مثال : مطلوبست محاسبه میزان Δ (تغییر مکان قائم) در تیر زیر با استفاده از کار حقیقی (فقط اثر M منظور شود)



$$M=-P.x$$

$$U=U_M=\int_0^{\ell}\frac{M^2dx}{2EI}=\int_0^{\ell}\frac{(-PX)^2dx}{2EI}=\frac{P^2\ell^3}{6EI}$$

$$W_{ext}=U\Rightarrow\frac{1}{2}p.\Delta=\frac{P^2\ell^3}{6EI}\Rightarrow\Delta=\frac{P^2\ell^3}{3EI}$$

روش های انتگرال گیری برای حل عددی انتگرال $\int\overline{m}\frac{M}{EI}dx$

برای محاسبه تغییر مکان های الاستیک با استفاده از روش کار مجازی ، حل انتگرال $\int\overline{m}\frac{M}{EI}dx$ اغلب پر زحمت و وقت گیر بوده و باعث طولانی شدن محاسبات می گردد . در زیر دو روش که استفاده از آن ها باعث سهولت زیادی در محاسبات و صرفه جویی در وقت می گردد ارائه می شود .

1) روش تحلیلی : در این روش دو تابع زیر انتگرال(مثلا M و $\overline{M}$) را به هم ضرب می کنیم و از حاصل ضرب آن ها با استفاده از قواعد ریاضی انتگرال می گیریم .

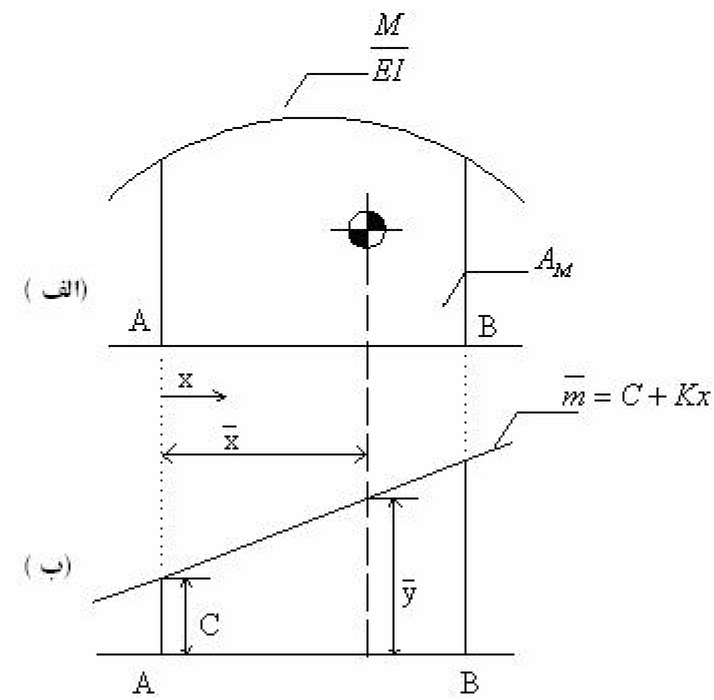
* معادلات هر دو تابع زیر انتگرال باید در دستگاه معادلات یکسانی نوشته شده باشند (وحدت مبدا مختصات)

2) روش استفاده از جدول : استفاده از جدول های موجود در پیوست

3) روش مور : از آن جایی که لنگر $\overline{m}$ همواره از بار واحد مجازی ناشی می شود نمودار آن همواره به صورت تابع خطی از x می باشد . حال شکل زیر را که در آن توابع $\frac{M}{EI}$ و $\overline{m}$ در زیر یکدیگر رسم شده اند ، در نظر بگیرید .توجه شود که هرگاه EI ثابت باشد ، نمودار $\frac{M}{EI}$ همان شکل نمودار M را داراست که عرض های آن بر EI تقسیم گشته اند . نمودار M نیز معمولا بصورت توابع درجه اول ، دوم و یا سوم از x می باشد که در شکل زیر تابع آن دلخواه انتخاب شده است .

چون نمودار $\overline{m}$ یک تابع خطی از x می باشد ، آنرا می توانیم بصورت $\overline{m}$ = C+Kx بنویسیم که در آن C و K مقادیر ثابتی می باشند . با گذاشتن این مقادیر در انتگرال $\int\overline{m}\frac{M}{EI}dx$ می توانیم بنویسیم :

$$\int_A^B\overline{M}\frac{M}{EI}dx=\int_A^B(C+Kx)\frac{M}{EI}dx=C\int_A^B\frac{M}{EI}dx+K\int_A^B\frac{M}{EI}xdx \qquad \textbf{(الف)}$$



انتگرال اول سمت راست معادله فوق ، مساحت نمودار $\frac{M}{EI}$ بین دو حد A و B و اتگرال دوم لنگر اول سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ نسبت به نقطه A می باشد و آن را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\int_A^B \frac{M}{EI} x dx = \bar{x} A_M$$

که در آن A_M سطح زیر نمودار M بین دو حد A و B و $\bar{x}$ فاصله نقطه A تا مرکز هندسی A_M می باشد . با توجه به موارد فوق ، رابطه (الف) به صورت زیر در می آید :

$$\int_A^B \bar{m}\left(\frac{M}{EI}\right) dx = CA_M + K\bar{x}A_M = (C + K\bar{x})A_M$$

لیکن مقدار $(C+K\bar{x})$ در رابطه فوق نشان دهنده مقدار $\bar{m}$ در موقعیت مرکز هندسی سطح A_M می باشد که اگر آن را با $\bar{y}$ نشان دهیم ، رابطه زیر که موسوم به رابطه مور می باشد به دست می آید :

$$\int_A^B \bar{m}\left(\frac{M}{EI}\right) dx = \bar{y} A_M$$

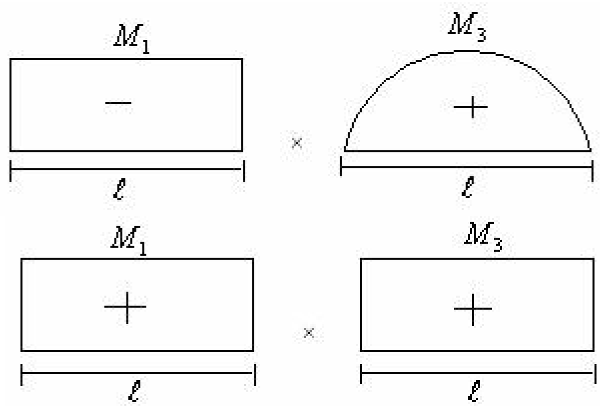
یعنی مقدار انتگرال $\int_A^B \bar{m}(\frac{M}{EI})dx$ مساوی حاصل ضرب سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در مقدار $\bar{m}$ در موقعیت مرکز هندسی سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ می باشد . البته توجه داشته باشید که رابطه فوق وقتی صحیح است که نمودار $\bar{m}$ حتما خطی باشد .

از آن جایی که در استفاده از رابطه مور به استفاده از مرکز هندسی اشکال هندسی زیاد بر می خوریم ، در جدول شکل بالا مرکز هندسی سطوح ساده نشان داده شده است .

توجه نمایید که A_M و $\bar{y}$ را نمی توان در طول یک ناپیوستگی در هریک از توابع $\frac{M}{EI}$ و یا $\bar{m}$ محاسبه نمود . یعنی هر دو تابع برای $\frac{M}{EI}$ و $\bar{m}$ بین نقاط A و B بایستی تابع پیوسته و یکنواختی برحسب x باشند . در صورتی که هریک از توابع غیر پیوسته باشند ، سازه را می توان به قسمت هایی تقسیم نمود که در هریک از آن ها M و m پیوسته باشند . نتایج حاصل از هر قسمت را می توان جمع جبری نمود تا نتیجه نهایی حاصل گردد یعنی :

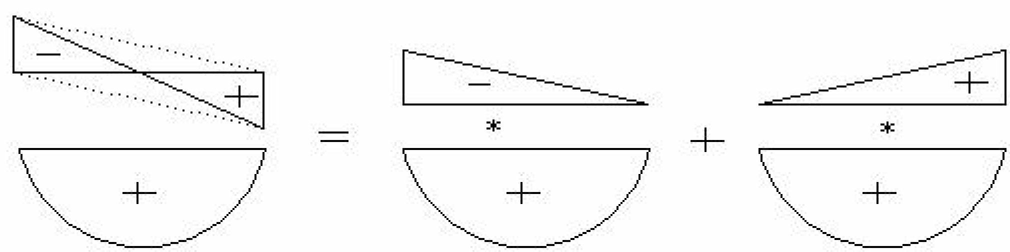
$$\int \bar{m}\frac{M}{EI}dx = \sum \bar{y}A_M$$

مثال بروش جدول

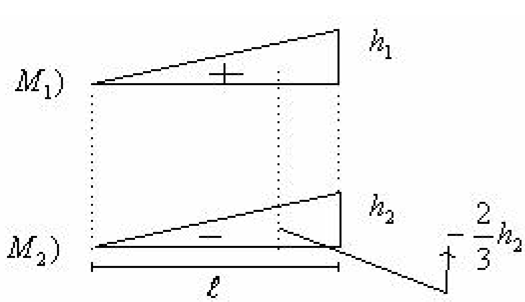


$$\int \overline{M}M\frac{dx}{EI} = \frac{-2\ell}{3EI}M_1M_3 \quad \text{بروش جدول}$$

$$\int \overline{M}M\frac{dx}{EI} = \frac{+\ell}{EI}M_1M_3 \quad \text{از جدول}$$

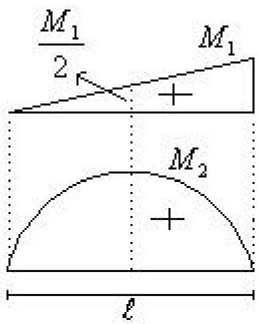


مثال برای روش مور



$$\int M_1M_2\frac{dx}{EI} = A_M\frac{\bar{y}}{EI}$$

$$\int M_1M_2\frac{dx}{EI} = -\frac{\ell}{3EI}h_1h_2$$



$$A_M\bar{y} = (\frac{2}{3}M_2\ell)(\frac{M_1}{2}) = \frac{\ell}{3}M_1M_2$$

$$\int M_1M_2\frac{dx}{EI} = \frac{\ell}{3EI}M_1M_2$$

گام های محاسبه تغییر مکان در سازه های خمشی

گام 1) حل سازه تحت اثر بارهای خارجی برای یافتن M ، V ، N ، T

گام 2) حل سازه تحت اثر بار واحد متناظر با تغییر مکان برای یافتن $\overline{T},\overline{N},\overline{V},\overline{M}$

گام 3) نوشتن رابطه تساوی کار داخلی و کار خارجی :

$$1*\delta_m{}^i = W_{\text{int}}$$

کل سازه $W_{\text{int}} = W^N{}_{\text{int}} + W^M{}_{\text{int}} + W^V{}_{\text{int}} + W^T{}_{\text{int}}$

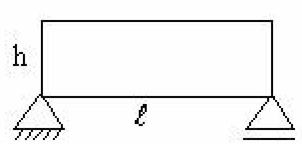
$$1*\delta_m{}^i = \sum_{i=1}^{n}\int_0^\ell \overline{N}N\frac{dx}{EA} + \sum_{i=1}^{n}\int_0^\ell \overline{M}M\frac{dx}{EI} + \sum_{i=1}^{n}\int_0^\ell \overline{V}V\frac{dx}{GA'}$$

چند نکته : 1 – جمله دوم سمت راست تساوی فوق یعنی انتگرال (M) ها در سازه های خمشی اهمیت اساسی دارد

2 – جمله اول سمت راست تساوی (N) در خرپا اهمیت حیاتی دارد در سازه های خمشی کوچک بوده و صرفنظر می شود و این جمله در اغلب تیرها وجود ندارد . 3 – جمله سوم سمت راست تساوی (V) در سازه های طره ای کوتاه ، تیر عمیق ، تیرهای شبکه پی اهمیت اساسی دارد در سازه های خمشی معمولی (تیر و قاب) اهمیت ثانوی دارد و در خرپا اصلا وجود ندارد .

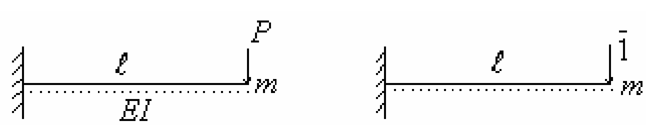
4 – عناصر جملات اول و سوم (N و V) سمت راست تساوی فوق در کار داخلی مجازی و همچنین در انرژی کرنشی سازه خمشی سهم کمتری دارند . 5 – بی نهایت شدن EA مقدار کار نیروی محوری را صفر می کند همچنان که بی نهایت شدن GA' و Gj و EI به ترتیب کار نیروی برشی و لنگر پیچشی و لنگر خمشی را صفر می کند .

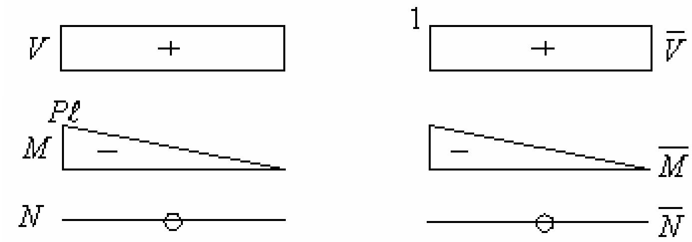
* تیر عمیق تیری است کخ $\frac{\ell}{h} < 4$ باشد در این تیر توزیع تنش خمشی در ارتفاع مقطع از رابطه $E_{(y)} = \frac{M_y}{I}$ تبعیت نمی کند زیرا در دهانه های کوچک ، مقدار خمش کوچک و اثر نیروی برشی بزرگ و غیر قابل صرفنظر کردن می شود .



$$\frac{\ell}{h} < 4$$

مثال : تغییر مکان قائم نقطه m را محاسبه کنید (بروش کار مجازی)





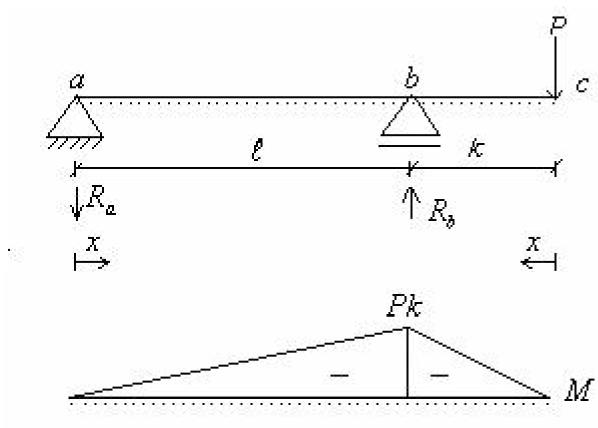
$$1*\delta_m^v=\int_0^\ell \overline{M}M\frac{dx}{EI}+\int_0^\ell \overline{N}N\frac{dx}{EA}+\int_0^\ell \overline{V}V\frac{dx}{GA'}$$

$$1*\delta_m^v=\int_0^\ell \overline{M}M\frac{dx}{EI}=\frac{P\ell^3}{3EI}$$

مثال : در تیر زیر مطلوبست محاسبه $\delta_c{}^v$ (بروش کار مجازی)

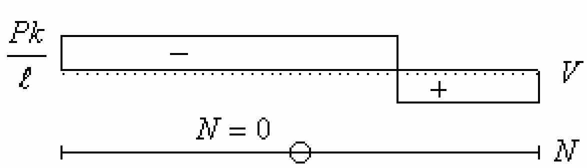
حل:

گام اول:

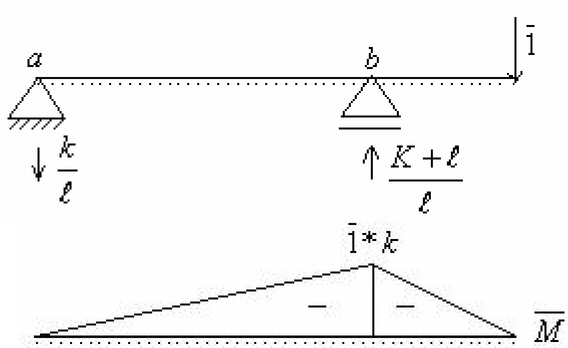


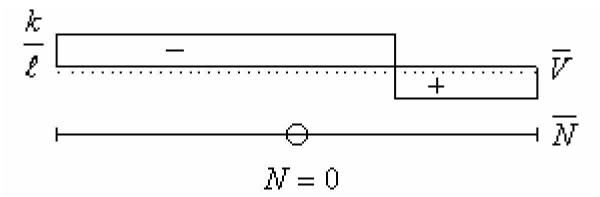
$$\sum M_a=0\Rightarrow R_b=\frac{P(K+\ell)}{\ell}\uparrow$$

$$\sum F_y=0\Rightarrow R_a=\frac{Pk}{\ell}\downarrow$$



گام دوم:





$\overline{M_{ab}}=-1*\frac{k}{\ell}x$ $\qquad\qquad$ $\overline{M_{bc}}=-1*x$

$M_{ab}=-P*\frac{k}{\ell}x$ $\qquad\qquad$ $M_{bc}=-P*x$

$\overline{V_{ab}}=-1*\frac{k}{\ell}$ $\qquad\qquad$ $\overline{V_{bc}}=1$

$V_{ab}=-P*\frac{k}{\ell}$ $\qquad\qquad$ $V_{bc}=P$

$\overline{N_{ab}}=0$ $\qquad\qquad$ $\overline{N_{bc}}=0$

$N_{ab}=0$ $\qquad\qquad$ $N_{bc}=0$

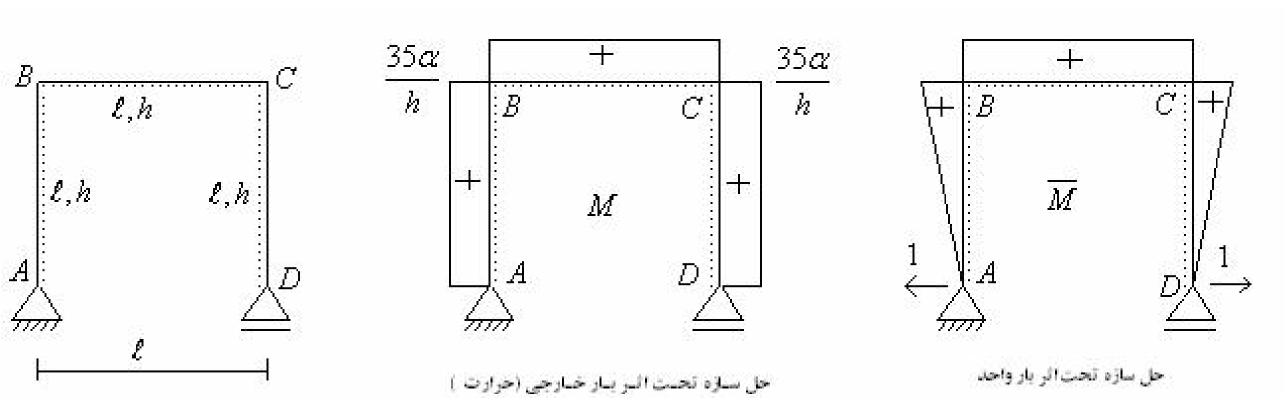
گام سوم :

$$\delta_c^V=\int\overline{M}M\frac{dx}{EI}+\int\overline{V}V\frac{dx}{GA'}+\int\overline{N}N\frac{dx}{EA}=$$

$$\int_0^\ell(-1\frac{k}{\ell}x)(-P\frac{k}{\ell}x)\frac{dx}{EI}+\int_0^k(-1x)(-Px)\frac{dx}{EI}+\int_0^\ell(-1\frac{k}{\ell})(-P\frac{k}{\ell})\frac{dx}{GA'}+\int_0^k(1)(P)\frac{dx}{GA'}+0\Rightarrow$$

$$\delta_c^V=\frac{Pk^2}{3EI\ell^2}(\ell^3+k\ell^2)+\frac{Pk^2}{GA'\ell^2}(\ell+\frac{\ell^2}{k})$$

مثال : اگر درجه حرارت قاب در شکل زیر 20 درجه افزایش و درجه حرارت خارج آن 15 درجه کاهش یابد ، مطلوبست محاسبه تغییر مکان افقی تکیه گاه D (بروش کار مجازی)



(حل سازه تحت اثر بار خارجی (حرارت)

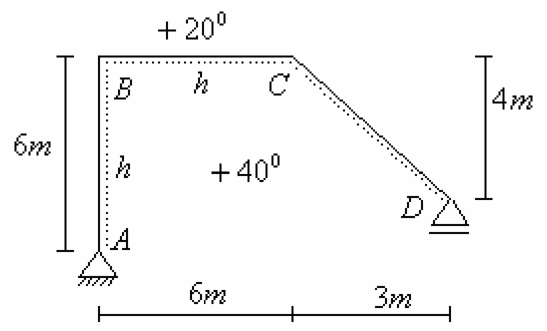
حل سازه تحت اثر بار واحد

$$\Delta t=20-(-15)=35\Rightarrow\frac{\alpha\Delta t}{h}=\frac{35\alpha}{h}$$

$$1*\delta_D^H=\int \overline{M}.\frac{\alpha\Delta t}{h}dx=\frac{\ell}{2}(\frac{35\alpha}{h})(\ell)+\ell(\frac{35\alpha}{h})(\ell)+\frac{\ell}{2}(\frac{35\alpha}{h})(\ell)$$

$$\Rightarrow \delta_D^H=2(\frac{35\alpha\ell^2}{h})=\frac{70\alpha\ell^2}{h}$$

مثال : تغییر مکان افقی افقی گره D را تحت بارگذاری داده شده محاسبه کنید . (بروش کار مجازی)



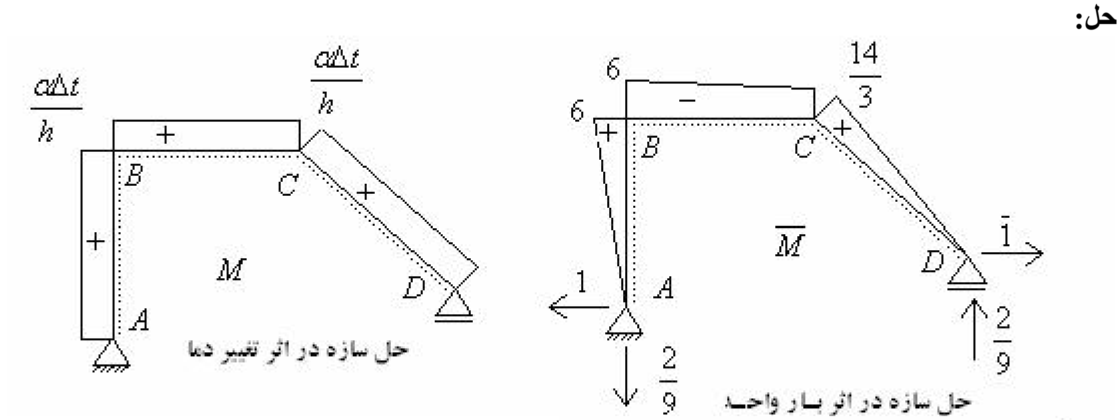
$\Delta t = t_b - t_t = 40-20=+20$

$h = 30cm$

$\alpha = 10^{-5}\frac{1}{0^c}$

$h =$ ارتفاع مقطع

حل:



$$\sum M_A=0\Rightarrow R_D*9=2*1\Rightarrow R_D=\frac{2}{9}$$

$$1*\delta_D=\int \overline{M}\frac{\Delta t\alpha}{h}dx=\frac{6}{2}(\frac{\Delta t\alpha}{h})(6)+\frac{6}{2}(6+\frac{14}{3})(\frac{\Delta t\alpha}{h})+\frac{5}{2}(\frac{14}{3})(\frac{\Delta t\alpha}{h})=61.66\frac{\Delta t\alpha}{h}$$

$$\delta_D^H=61066*\frac{10^{-5}(40-20)}{30*10^{-2}}=0.04m=4cm$$

قضیه بتی

قانون بتی یکی از اصول بسیار مهم مکانیک است و موارد استفاده زیادی دارد .

بیان قضیه بتی

در هر سازه ای که ماده آن الاستیک بوده و از قانون هوک پیروی کند به شرطی که تکیه گاه های سازه غیر قابل تغییر شکل بوده و درجه حرارت ثابت باشد داریم : کار مجازی خارجی انجام شده توسط سیستم نیروهای P_m به علت تغییر شکل سازه در نتیجه ی تاثیر سیستم نیروهای P_n برابر است با کار مجازی خارجی انجام شده توسط سیستم نیروهای P_n به علت تغییر شکل سیستم در نتیجه ی تاثیر سیستم نیروهای P_m یعنی :

$$\sum P_m.\delta_{mn} = \sum P_n.\delta_{nm}$$

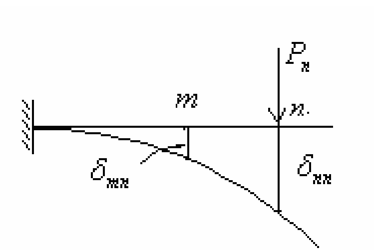
δ_{mn} : تغییر مکان نقطه m در اثر بار موجود در نقطه n.

δ_{nm} : تغییر مکان نقطه n در اثر بار موجود در نقطه m.

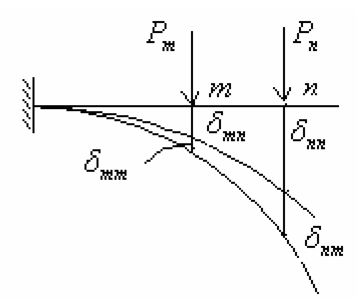
اثبات ساده قضیه بتی

برای اثبات تیر یک سر گیرداری را در نظر می گیریم

الف)فرض می کنیم سیستم نیروهای P_n بر سازه وارد می شود:

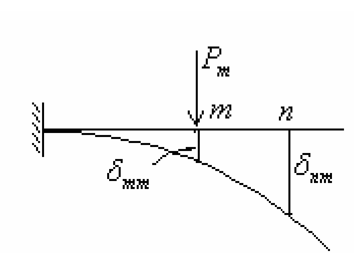


حال نیروهای P_m را به تیر وارد می کنیم:

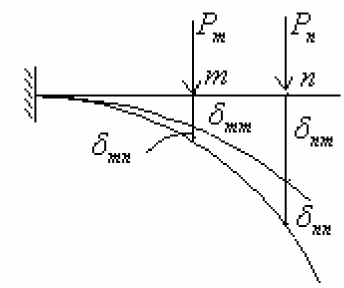


$$W_{ext}^{\mathrm{I}} = W_{ext}^{n} + W_{ext}^{m} + W_{ext}^{m,n} = \frac{1}{2}\sum P_n\delta_{nn} + \frac{1}{2}\sum P_m\delta_{mm} + \sum P_n\delta_{nm}$$

ب)فرض می کنیم نیروهای P_m بر سازه وارد می شود:



حال نیروهای P_n را به تیر وارد می کنیم:



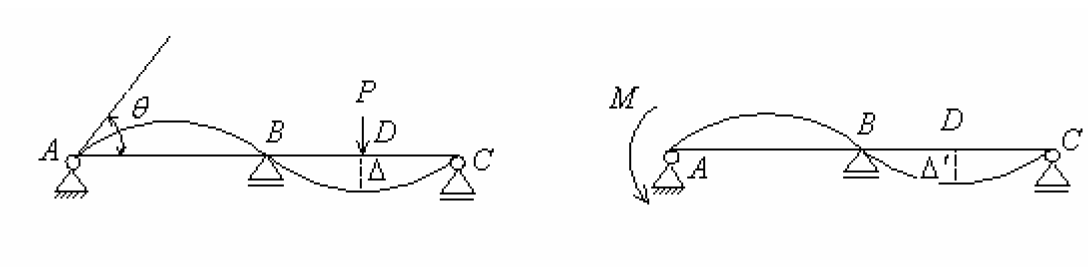
$$W_{ext}^{\mathrm{II}} = W_{ext}^{m} + W_{ext}^{n} + W_{ext}^{n,m} = \frac{1}{2}\sum P_m\delta_{mm} + \frac{1}{2}\sum P_n\delta_{nn} + \sum P_m\delta_{mn}$$

کل کار خارجی در حالت الف و ب باید مساوی باشد زیرا تقدم و تاخر تاثیری در مقدار کار سیستم های ارتجاعی خطی نداشته باشد.

$$W_{ext}^{\mathrm{I}} = W_{ext}^{\mathrm{II}} \Rightarrow \sum P_n\delta_{nm} = \sum P_m\delta_{mn}$$

قضیه بتی به علت تقارن ماتریس نرمی سازه و حتی ماتریس سختی سازه را نیز توضیح می دهد .

مثال : در تیر زیر در صورتی که دوران نقطه A تحت اثر بار P در نقطه D برابر θ باشد تغییر مکان نقطه D تحت اثر ممان منفی M در A چه مقدار خواهد بود .($\Delta' = ?$)



قضیه بتی : $P\Delta' = M\theta \Rightarrow \Delta' = \frac{M\theta}{P}$

Δ' : تغییر مکانی است که لنگر M در محل اثر بار P در امتداد آن ایجاد کرده است .

θ : تغییر مکانی است که بار P در محل اثر لنگر M ایجاد کرده است . (تغییر مکان متناسب با لنگر دوران است)

قضیه ماکسول

اگر در قضیه بتی $P_m = P_n = 1$ در نظر بگیریم خواهیم داشت :

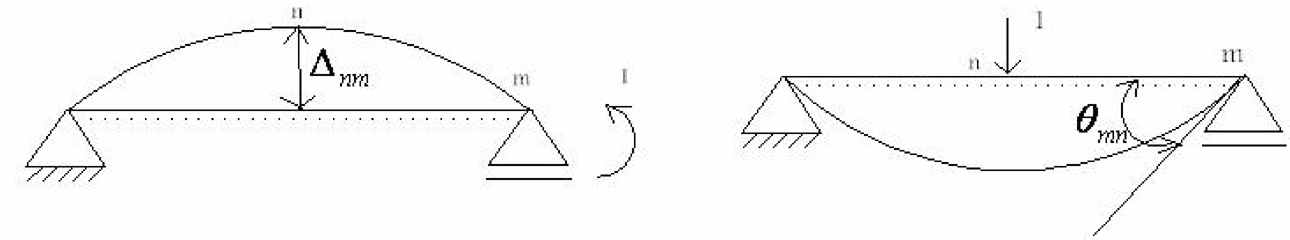
$$P_m = P_n = 1 \Rightarrow \delta_{mn} = \delta_{nm}$$

پس قضیه ماکسول حالت خاص قضیه بتی می باشد .

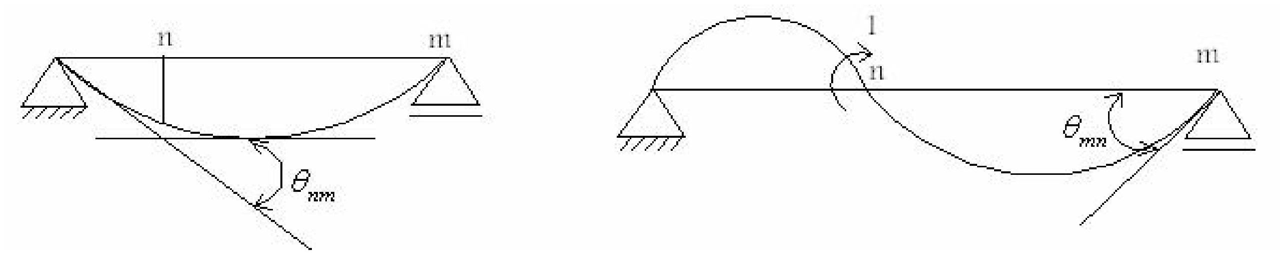
بیان قضیه ماکسول

در هر سازه ارتجاعی ، هوکی ، با تکیه گاه های تغییر ناپذیر و دمای ثابت مقدار عددی تغییر مکان نقطه n در امتداد j تحت اثر بار واحدی که در m و در امتداد i اثر می کند برابر است با تغییر مکان نقطه m در امتداد i تحت اثر بار واحدی در n که در امتداد j اثر می کند .

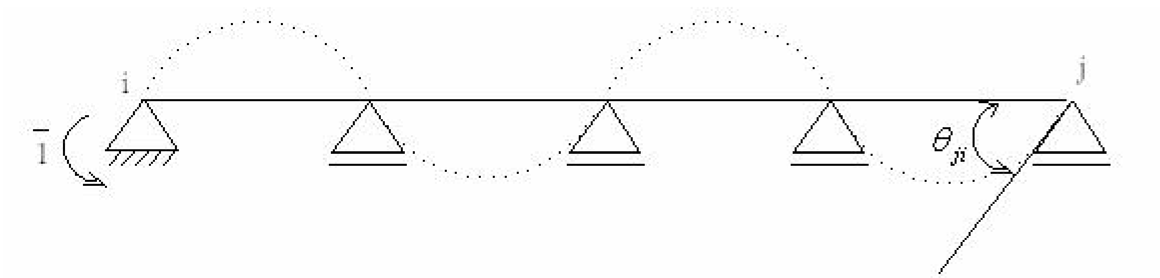
مثال :

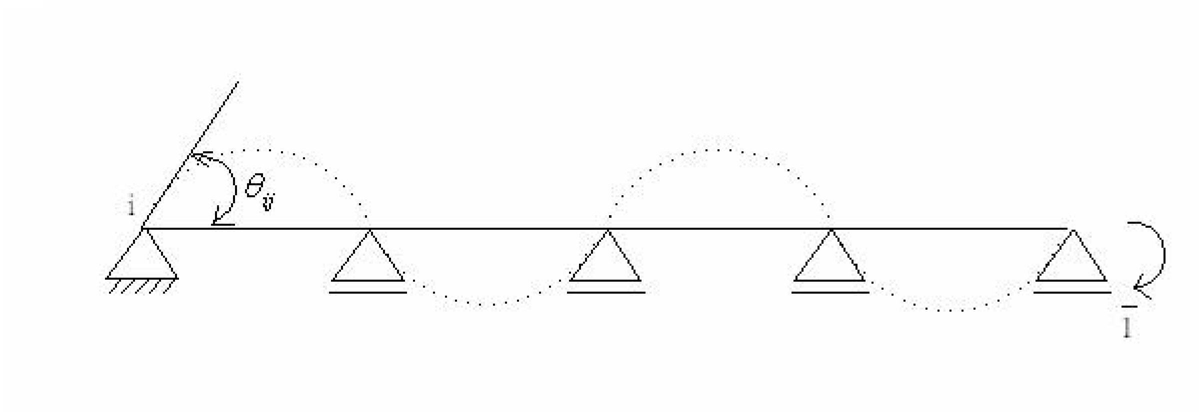


از نظر عددی $\Delta_{nm} = \theta_{mn}$

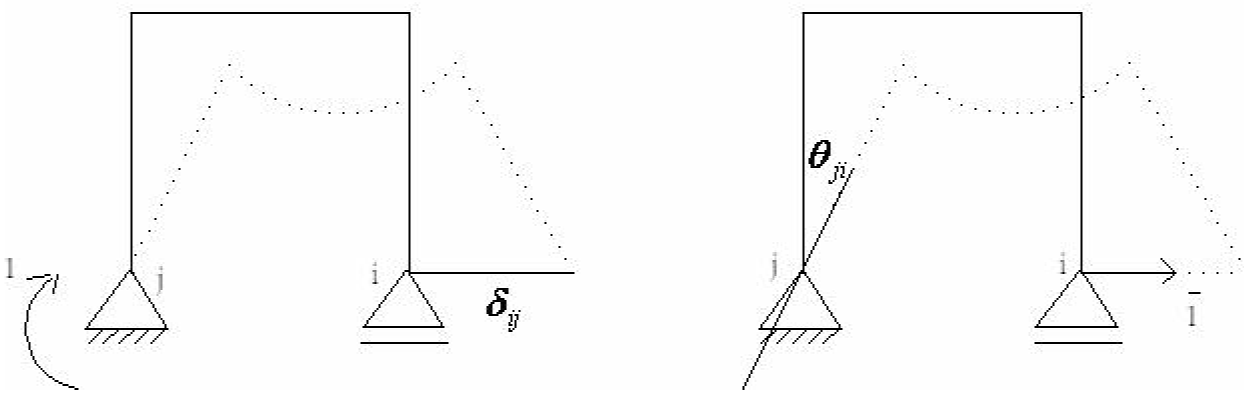


$$\theta_{nm} = \theta_{mn}$$





مقدار عددی $\theta_{ij} = \theta_{ji}$



از نظر عددی $\delta_{ij} = \theta_{ji}$

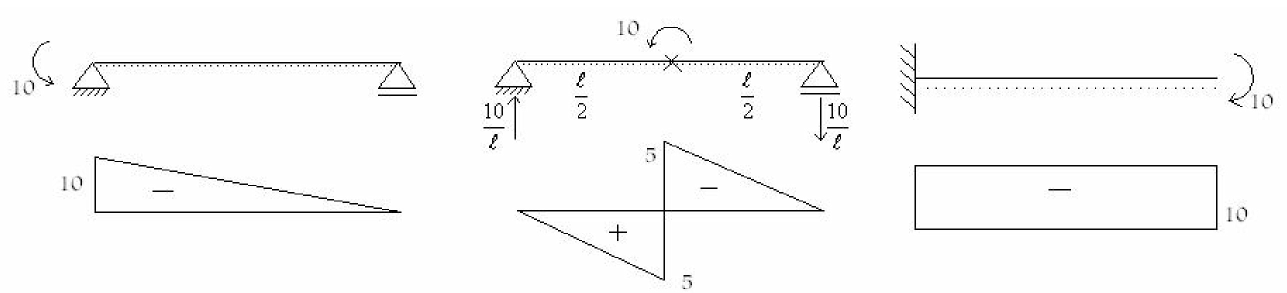
تعریف سازه با رفتار خطی

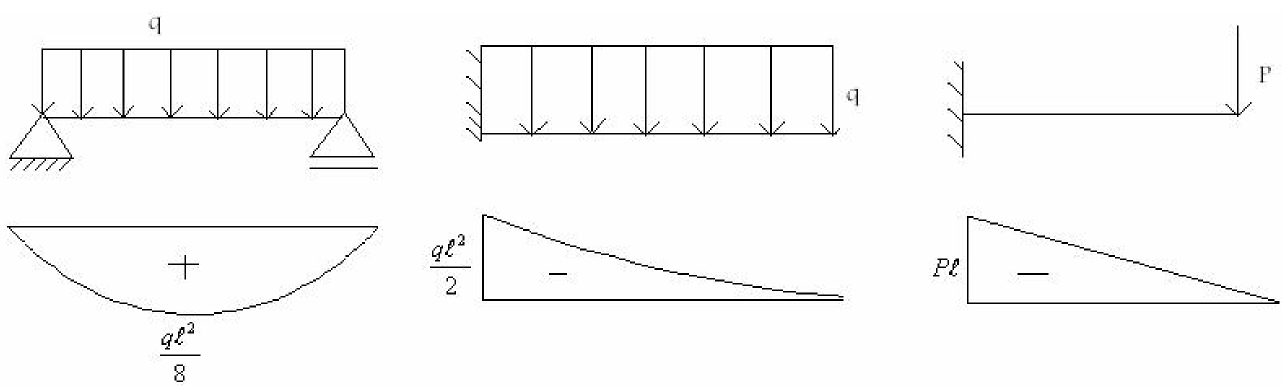
در سازه با رفتار خطی دو شرط زیر باید صادق باشد :

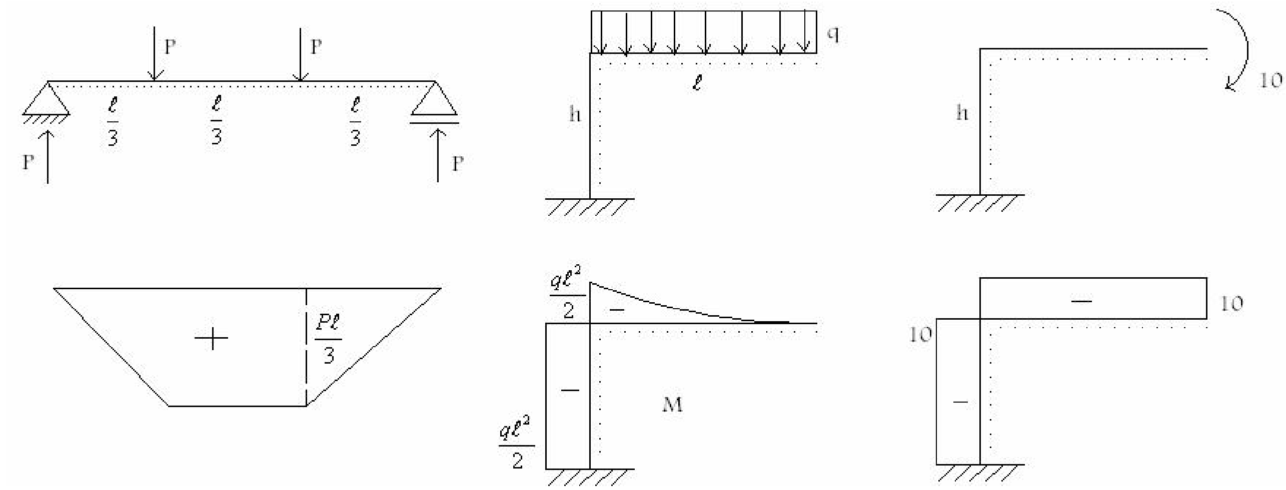
1 – مصالح سازه از قانون هوک پیروی کنند یعنی رابطه تنش – کرنش خطی باشد .

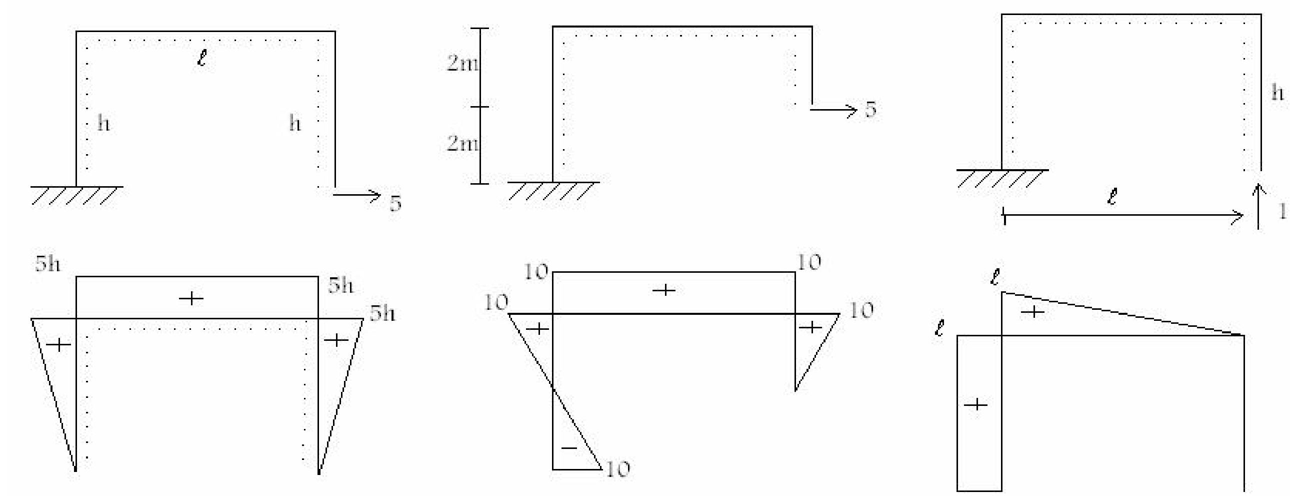
2 – تغییر شکل های سازه باید کوچک باشد نباید روی عمل و امتداد بارهای وارده تاثیر داشته باشد .

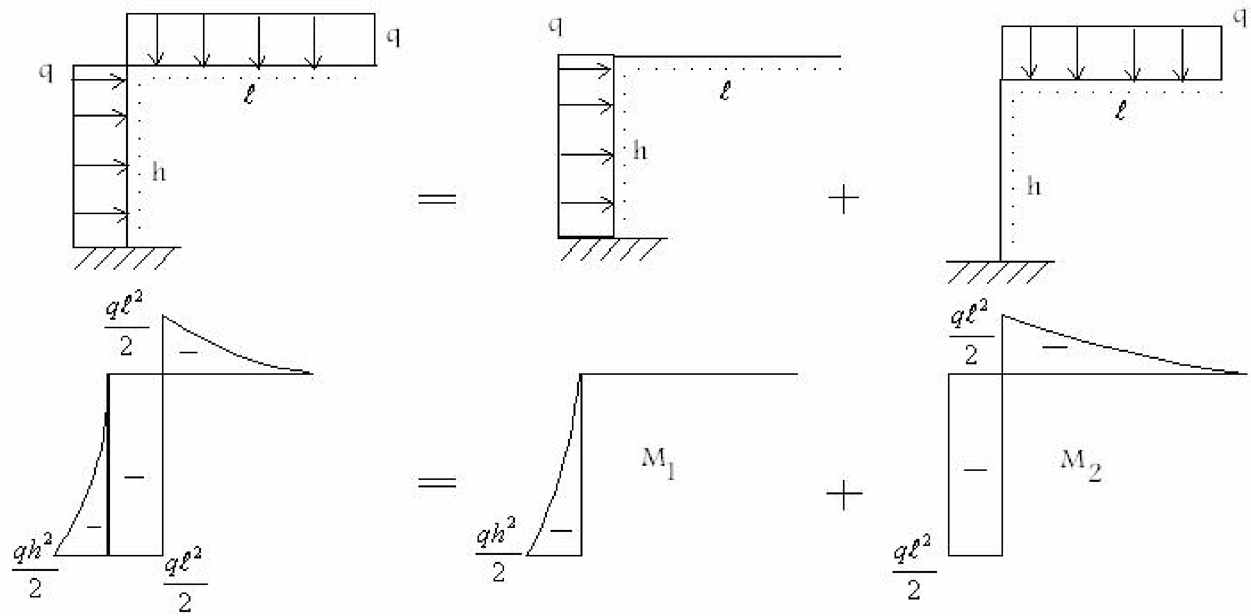
مروری بر چند دیاگرام نیروهای داخلی پرکاربرد






P
P
ℓ/3
ℓ/3
ℓ/3
P
P
q
ℓ
h
h
10
+
Pℓ/3
qℓ²/2
−
−
qℓ²/2
M
−
10
10
−


ℓ
h
h
5
2m
2m
5
h
ℓ
1
5h
+
5h
5h
+
+
10
10
+
10
10
+
+
−
10
ℓ
+
ℓ
+



تحلیل سازه های نامعین بروش نیرو

گام 1) تعیین درجه نامعینی استاتیکی سازه (X)

گام 2) انتخاب سازه مبنای مناسب (رجوع کنید به مقاومت مصالح 1)

گام 3) حل سازه مبنا تحت بار خارجی یا عامل خارجی (مانند حرارت) و رسم دیاگرام های لازم . (نیروی محوری و برشی و لنگر خمشی زیرنویس صفر خواهند داشت M_0 , N_0 , V_0)

گام 4) حل سازه مبنا تحت اثر اولین نیروی تعاملی که مقدارش واحد فرض شده است و رسم دیاگرام های لازم . (نیروی محوری و برشی و لنگر خمشی زیرنویس یک خواهند داشت M_1 , N_1 , V_1)

گام 5) تکرار گام 4 بازای هریک از نیروی تعاملی باقیمانده در غیاب بار خارجی و نیروهای تعاملی دیگر . (نیروی محوری و برشی و لنگر خمشی زیرنویس دو خواهند داشت M_2 , N_2 , V_2)

گام 6) محاسبه عناصر ماتریس نرمی سازه $(\delta_{11} , \delta_{12} , \delta_{13} , \ldots)$ که معادل همان محاسبه تغییر مکان ها می باشد .

گام 7) نوشتن معادلات سازگاری در محل نیروهای تعاملی که بازای هر نیروی تعاملی یک معادله سازگاری خواهیم داشت .

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{21} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n1} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix}_{n*n} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}_{n*1} = \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{10} \\ \vdots \\ -\delta_{n0} \end{Bmatrix}_{n*1}$$

ماتریس نرمی و اعضای آن مستقل از بارگذاری ، نشست و تغییر دمای محیط است و تا سازه مبنا را عوض نکنیم ماتریس نرمی عوض نخواهد شد و بنابراین برای انواع بارگذاری ها از ماتریس نرمی یکسان استفاده می کنیم .

نکته : شرط وجود جواب مخالف صفر بودن دترمینان ماتریس نرمی پایدار بودن سازه می باشد .

بردار ستونی طرف راست در حالت های مختلف نظیر بارگذاری ، تغییر حرارت یکنواخت و غیر یکنواخت و نشست های تکیه گاهی بطور جداگانه محاسبه می شود یعنی طرف راست معادلات در هریک از این حالات با حالات دیگر تفاوت دارد (طرف راست معادلات به بارگذاری ، نشست و تغییر دما وابستگی دارد)

$$\left.\begin{array}{l}[A][X]=[b]\\ [A][X]=[c]\\ [A][X]=[t]\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l}[A][X]=[b]+[c]+[t]\\ =\{b+c+t\}\end{array}$$

گام 8) حل معادلات سازگاری و یافتن $x_1 , x_2 , \ldots ,x_n$

گام 9) پردازش ثانوی : با یکی از دو روش زیر

الف) استفاده از معادلات تعادل سازه پس از قرار دادن مجهولات بدست آمده در سازه اصلی

ب) استفاده از جمع آثار مرحله ای

$$A=A_0+X_1A_1+ X_2A_2+ \ldots + X_nA_n$$

A : اثری بنام A

A_0 : همان اثر تحت بار خارجی

A_1 : همان اثر تحت بار واحد $X_1 =1$

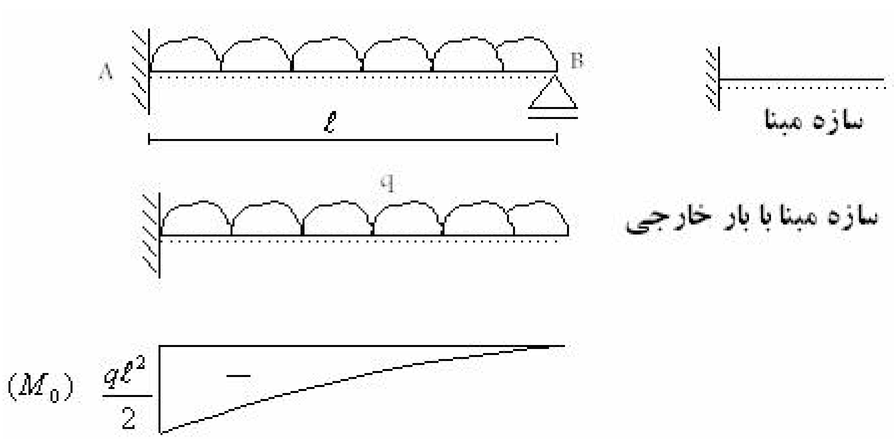
⋮

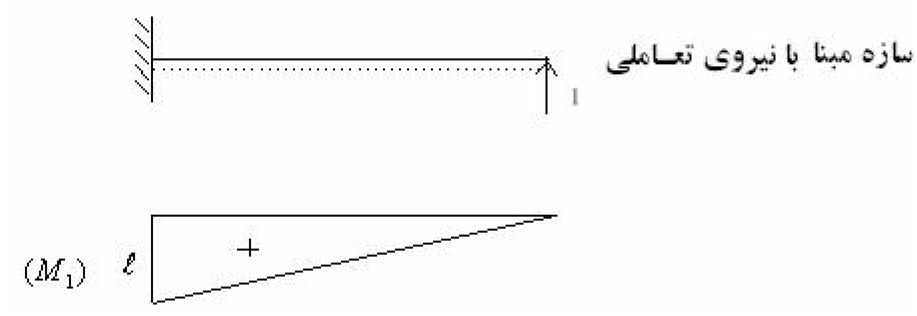
A_n : همان اثر تحت بار واحد $X_n =1$

نکته 1) مثبت بودن مقادیر $x_1 , x_2 , \ldots ,x_n$ نشانه آن است که بارهای واحد اعمال شده در سازه مبنا جهت نیروهای مجهول را درست نشان داده و منفی بودن نشانه آن است که جهت نیروهای تعاملی بایستی عوض شود .

نکته 2) اگر یکی یا تعدادی از جواب ها $(x_1 , x_2 , \ldots ,x_n)$ منفی آمده باشد در قسمت پردازش ثانوی ، وقتی از قسمت الف استفاده می کنیم جهت درست را در روی سازه اصلی قرار می دهیم و سپس از معادلات تعادل استفاده می کنیم ولی وقتی از قسمت ب (جمع آثار مرحله ای) استفاده می کنیم $x_1 , x_2 , \ldots ,x_n$ را با همان علامت بدست آمده در رابطه جمع آثار مرحله ای قرار می دهیم .

مثال: عکس العمل های تکیه گاهی تیر زیر را بروش نیرو محاسبه کنید .



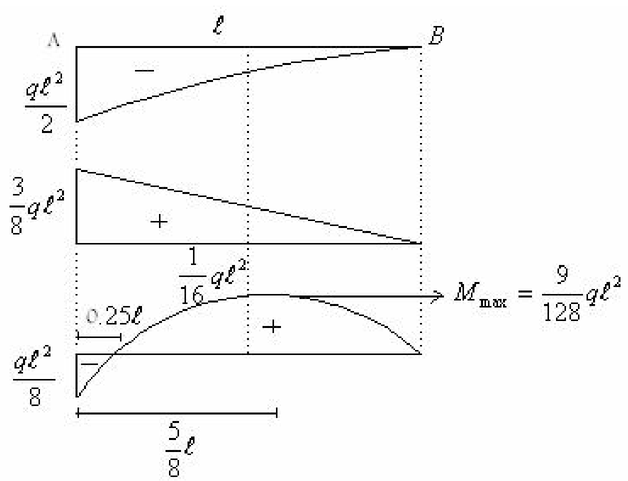


$$\delta_{11}=\int M_1 M_1 \frac{dx}{EI}=\frac{\ell}{3}(\ell)(\ell)\frac{1}{EI}=\frac{\ell^3}{3EI} \qquad \delta_{10}=\int M_1 M_0 \frac{dx}{EI}=\frac{\ell}{4}(\ell)(\frac{-q\ell^2}{2})\frac{1}{EI}=\frac{-q\ell^4}{8EI}$$

معادله سازگاری: $\delta_{11}x_1=-\delta_{10}\Rightarrow \frac{\ell^3}{3EI}x_1=+\frac{q\ell^4}{8EI}\Rightarrow x_1=\frac{3}{8}q\ell$

جمع آثار مرحله ای $\begin{cases} R_A=R_{0A}+x_1R_{1A}=q\ell+(\frac{3}{8}q\ell)(-1)=\frac{5}{8}q\ell \\ M_A=M_{0A}+x_1M_{1A}=\frac{-q\ell^2}{2}+(\frac{3}{8}q\ell)(\ell)=-\frac{q\ell^2}{8} \end{cases}$

برای رسم دیاگرام لنگر خمشی می توان M_1, M_0 را با هم جمع کرد .

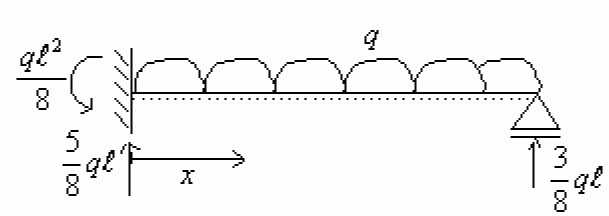


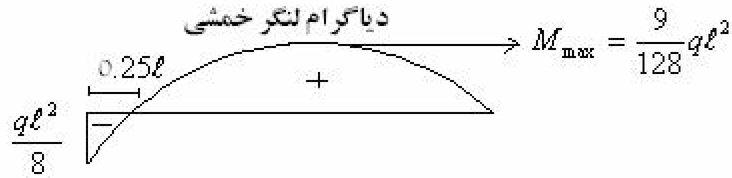
در $x=0$: $-\frac{q\ell^2}{2}+\frac{3}{8}q\ell^2=-\frac{q\ell^2}{8}$

در $x=\ell$: $0+0=0$

در $x=\frac{\ell}{2}$: $\begin{cases} M_0(\frac{\ell}{2})=-\frac{q\ell^2}{8} \\ M_1(\frac{\ell}{2})=\frac{3q\ell^2}{16} \end{cases}\Rightarrow -\frac{q\ell^2}{8}+\frac{3q\ell^2}{16}=\frac{q\ell^2}{16}$

راه دوم برای رسم دیاگرام لنگر خمشی استفاده از برش زدن و پیدا کردن معادله M می باشد :





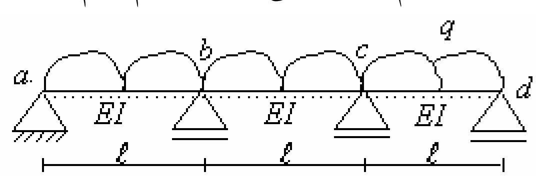
$$M(x) = \frac{5}{8} q\ell x - \frac{q\ell^2}{8} - \frac{qx^2}{2}$$

$$: x = \frac{5\ell}{8} \Rightarrow M = \frac{9}{128} q\ell^2$$

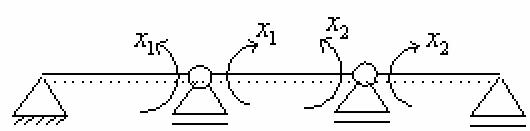
$$M(x) = 0 \Rightarrow x = 0.25\ell$$

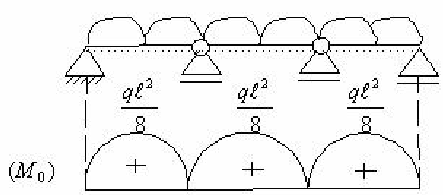
تمرین : حل مثال قبل با سازه مبنای دیگر مثلا با سازه مبنای زیر

مثال : تیر شکل زیر را به روش نیرو حل کرده و دیاگرام لنگر خمشی (M) را هم رسم کنید . (فقط اثر M منظور شود)



$x = 2$



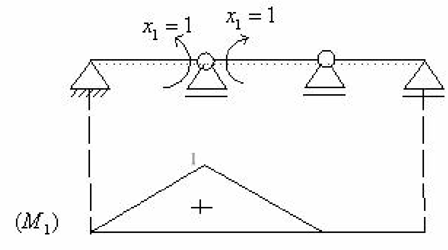


سازه مبنا با بار خارجی

$$\delta_{11} = \int M_1^2 \frac{dx}{EI} = 2(\frac{\ell}{3} M_1 M_3) = 2(\frac{\ell}{3} * 1 * 1)\frac{1}{EI} = \frac{2\ell}{3EI}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \int M_1 M_2 \frac{dx}{EI} = \frac{\ell}{6}(1)(1)\frac{1}{EI} = \frac{\ell}{6EI}$$

$$\delta_{22} = \int M_2^2 \frac{dx}{EI} = 2(\frac{\ell}{3} * 1 * 1)\frac{1}{EI} = \frac{2\ell}{3EI}$$

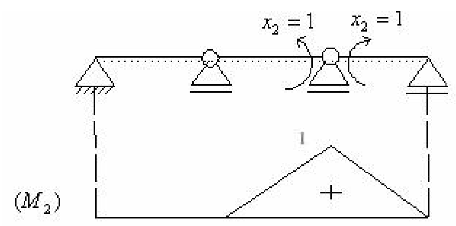


سازه مبنا با نیروی تعاملی اول

$$\delta_{10} = 2\left\{\left(\frac{\ell}{3}\right)(1)\left(\frac{q\ell^2}{8}\right)\right\}\frac{1}{EI} = \frac{q\ell^3}{12EI}$$

$$\delta_{10} = \int M_2 M_0 \frac{dx}{EI} = 2\left\{\left(\frac{\ell}{3}\right)(1)\left(\frac{q\ell^2}{8}\right)\right\}\frac{1}{EI} = \frac{q\ell^3}{12EI}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{Bmatrix}$$

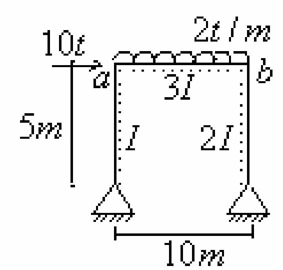


سازه مبنا با نیروی تعاملی دوم

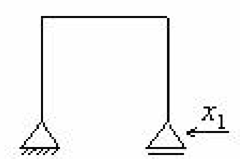
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2\ell}{3EI} & \frac{\ell}{6EI} \\ \frac{\ell}{6EI} & \frac{2\ell}{3EI} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{q\ell^3}{12EI} \\ -\frac{q\ell^3}{12EI} \end{Bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{1}{10}q\ell^2$$

یعنی جهت x_2, x_1 نادرست است

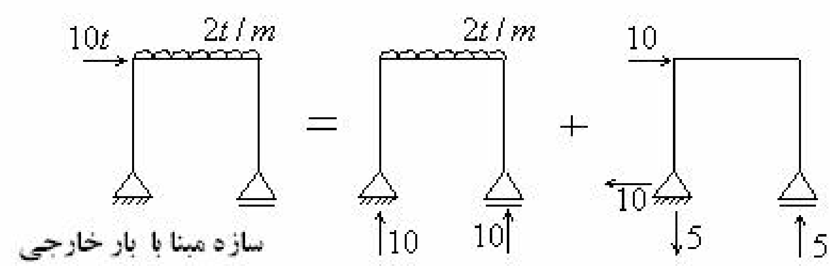
مثال: مطلوبست حل سازه بروش نیرو و رسم دیاگرام لنگر خمشی

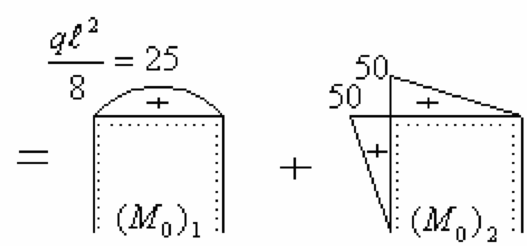


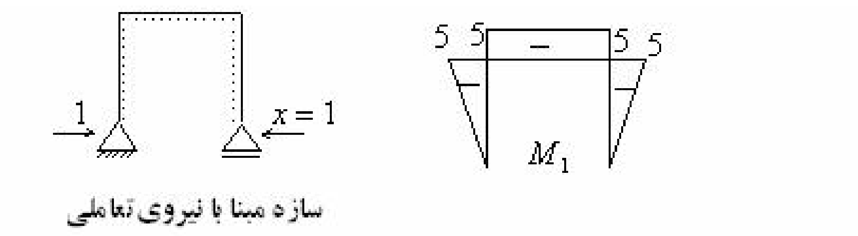
$x_1 = 1$



سازه مبنا با نمایش نیروی تعاملی مجهول





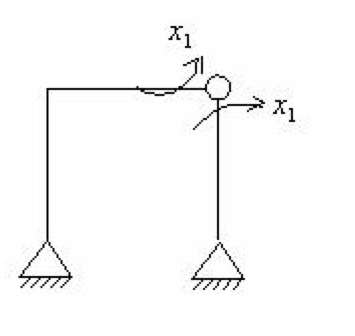


$$\delta_{11} = \frac{5}{3}*5*5\frac{1}{EI} + 5*5*10\frac{1}{3EI} + \frac{5}{3}*5*5\frac{1}{2EI} = \frac{875}{6EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{5}{3}*5*50\frac{1}{EI} - 5*\frac{10}{2}*50\frac{1}{3EI}\,\frac{2}{3}*5*25*10\frac{1}{3EI} = \frac{-10000}{2EI}$$

معادله سازگاری $\delta_{11}x_{11} = -\delta_{10} \Rightarrow \frac{875}{6EI}x_1 = \frac{10000}{2EI} \Rightarrow x_1 = \frac{+160}{21}$

تمرین : سازه مثال قبل را با سازه مبنای زیر دوباره حل کنید



تحلیل سازه های نامعین در اثر نشست تکیه گاهی

اگر سازه معین باشد در اثر نشست تکیه گاهی در اعضای سازه تنش تولید نخواهد شد به عبارت دیگر نیروی داخلی در اثر نشست برابر صفر است ولی اگر سازه نامعین باشد ممکن است در اثر نشست تنش نیز تولید شود نیروهای داخلی ناشی از نشست مخصوص سازه هایی است که :

1- از نظر تکیه گاهی نامعین باشد 2- نشست های آن نه متساوی و نه متناسب باشند

نشست متساوی و متناسب در هیچ سازه ای اعم از معین و نامعین تنش تولید نخواهد کرد

در نشست های نامتناسب و نامتساوی آن بخش از نشست که تنش تولید می کند نشست موثر نامیده می شود .

اگر در سازه فقط نشست داشته باشیم معادلات سازگاری به صورت زیر خواهد شد

$$\begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{21} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n1} & \cdots & \delta_{nn} \end{Bmatrix}_{n*n} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}_{n*1} = \begin{Bmatrix} \sum c_1 c \\ \sum c_2 c \\ \vdots \\ \sum c_n c \end{Bmatrix}_{n*1} \quad \text{(در حالت فقط نشست)}$$

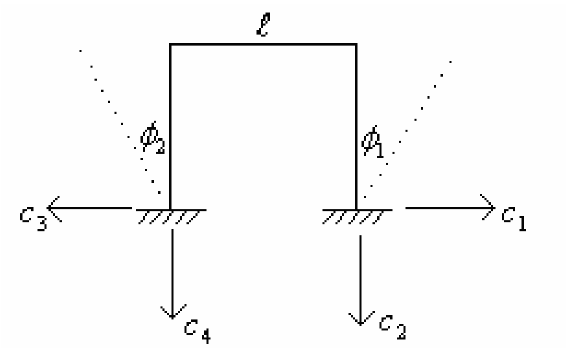
C_1: عکس العمل تکیه گاهی ناشی از $x_1=1$ $\qquad$ $\sum c_1 c$: مجموع جبری کارهای خارجی تکیه گاهی در حین اعمال $x_1=1$

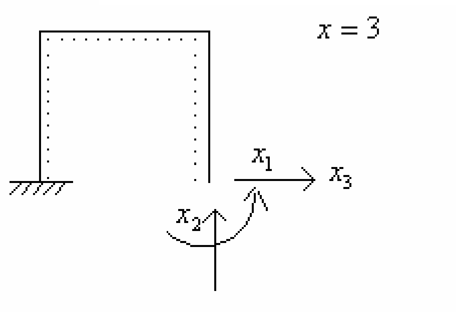
C_2: عکس العمل تکیه گاهی ناشی از $x_2=1$

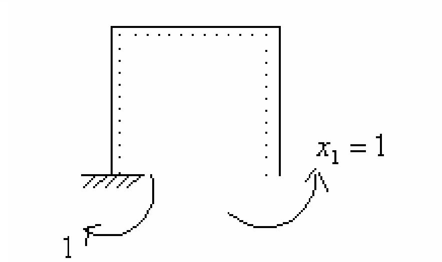
$\vdots$

C_n: عکس العمل تکیه گاهی ناشی از $x_n=1$

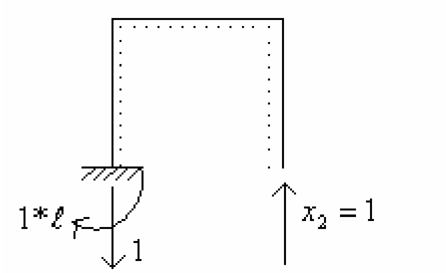
مثال : مطلوبست نوشتن طرف راست معادلات حاکم بر مسئله در اثر نشست های نشان داده شده در روی قاب



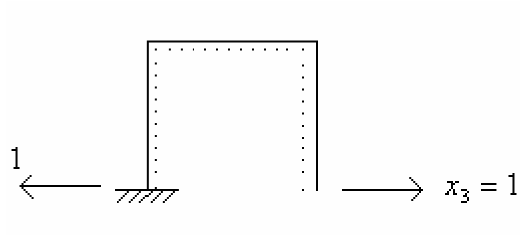




$$\sum c_1 c = -1*\phi_1 - 1*\phi_2 = -(\phi_1 + \phi_2)$$



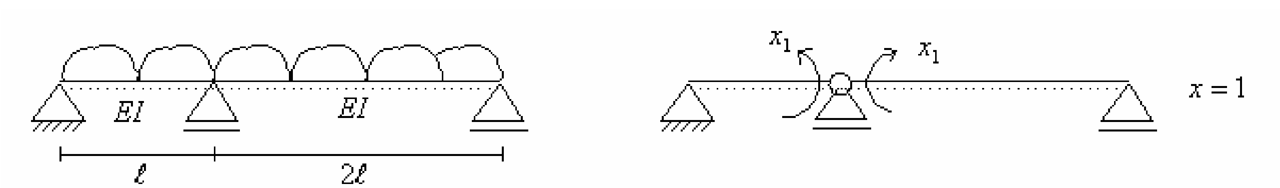
$$\sum c_2 c = -1*c_2 - 1*\ell_1*\phi_2 + 1*c_4 = -c_2 + c_4 - \ell_1\phi_2$$

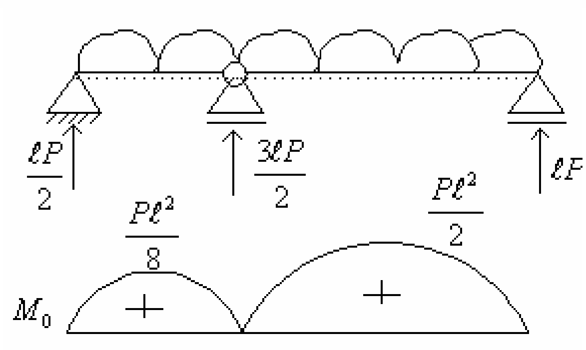


$$\sum c_3 c = 1 * c_1 + 1 * c_3 = c_1 + c_3$$

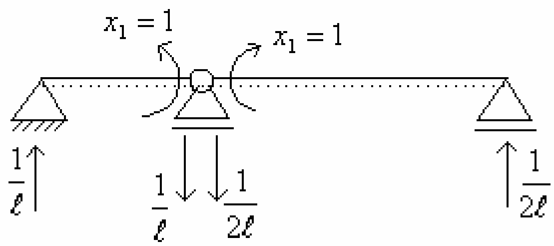
$$\begin{cases} \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \delta_{13} x_3 = -(\phi_1 + \phi_2) \\ \delta_{11} x_1 + \delta_{11} x_1 + \delta_{11} x_1 = -c_2 + c_4 - \ell_1 \phi_2 \\ \delta_{31} x_1 + \delta_{32} x_2 + \delta_{33} x_3 = c_1 + c_3 \end{cases}$$

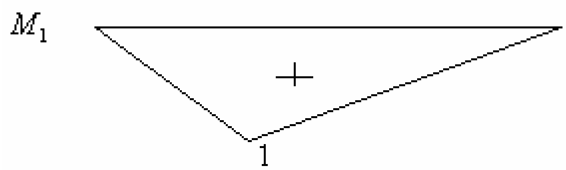
مثال: مطلوبست حل سازه زیر تحت اثر بار c_b , P (نشست تکیه گاه b) با روش نیرو





$$\delta_{10} = \frac{2}{3}(\frac{P\ell^2}{2})(2\ell)(\frac{1}{2})\frac{1}{EI} + \frac{2}{3}(\frac{P\ell^2}{8})(\ell)(\frac{1}{2})\frac{1}{EI} = \frac{3P\ell^3}{8EI}$$





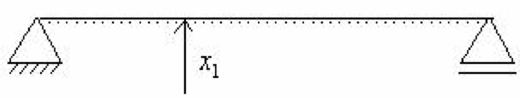
$$\delta_{11}x_1=\frac{3\ell}{3}*1*1\frac{1}{EI}=\frac{\ell}{EI}$$

$$\sum c_1c=\frac{3c_b}{2\ell}$$

$$\delta_{11}x_1=-\delta_{10}+\sum c_1c\Rightarrow\frac{\ell}{EI}x_1=-\frac{3P\ell^3}{8EI}+\frac{3c_b}{2\ell}$$

$$\Rightarrow x_1=-\frac{3P\ell^2}{8}+\frac{3}{2\ell^2}EIc_b$$

تمرین: مثال بالا را با سازه مبنای زیر حل کنید

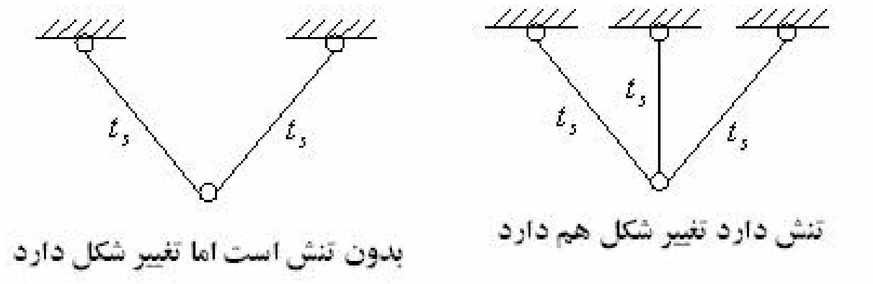


نکته : در مسائل تغییر حرارت یکنواخت وغیر یکنواخت جمله اول در جمع آثار صفر است زیرا سازه مبنا در اثر نشست و حرارت عکس العمل و نیروی داخلی تولید نمی کند .

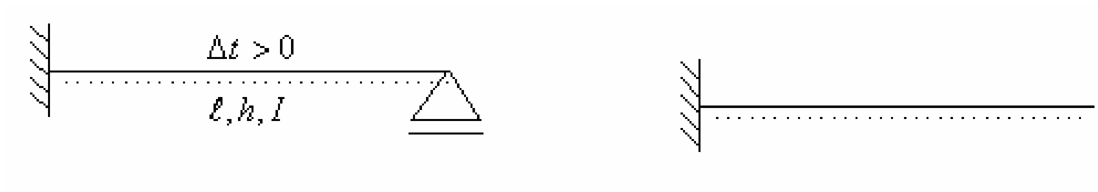
$$A=0+x_1A_1+x_1A_1+\cdots+x_1A_1=\sum_{i=1}^{n}x_iA_i$$

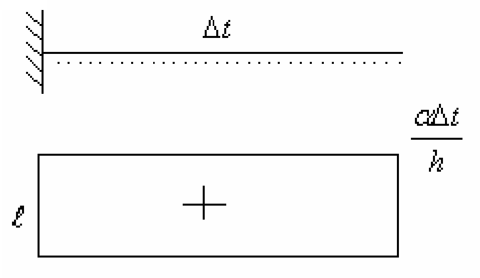
$$\delta_m=\delta_{m0}+\sum_{i=1}^{n}x_i\delta_{mi}$$

نکته: t_s **فقط در خرپا نیست در هر سازه ای ممکن** t_s **وجود داشته باشد**

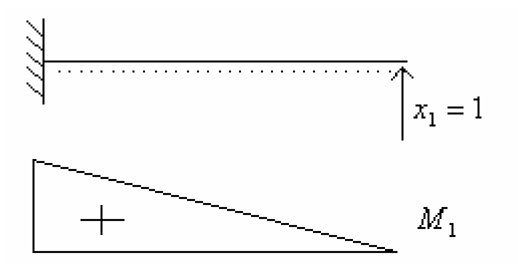


مثال : مطلوبست محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی در اثر تغییر درجه حرارت غیر یکنواخت Δt





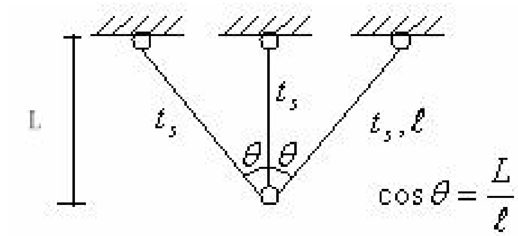
$$\delta_{1\Delta t} = \int M_1 \frac{\alpha \Delta t}{h} dx = \frac{\ell}{2}(\ell)\frac{\alpha \Delta t}{h} = \frac{\alpha \Delta t \ell^2}{2h}$$

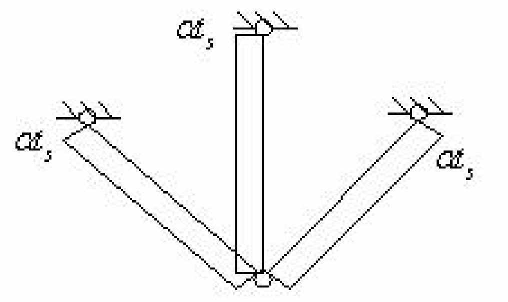


$$\delta_{11} = \frac{\ell}{3}(\ell)(\ell)\frac{1}{EI} = \frac{\ell^3}{3EI}$$

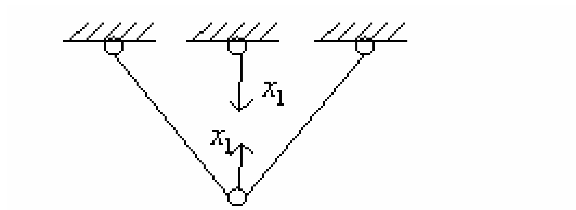
$$\delta_{11} x_1 = -\delta_{1\Delta t} \Rightarrow \frac{\ell^3}{3EI} x_1 = -\frac{\alpha \Delta t \ell^2}{2h} \Rightarrow x_1 = -\frac{3EI\alpha \Delta t}{2h\ell}$$

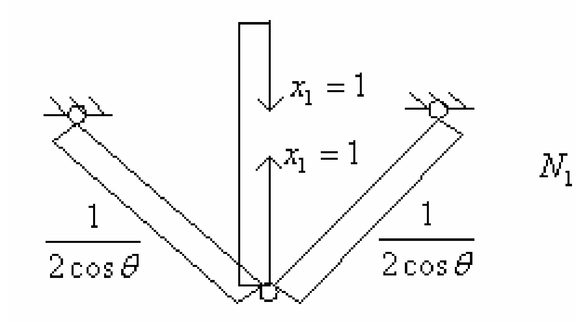
مثال: مطلوبست حل سازه زیر تحت اثر حرارت یکنواخت نشان داده شده در روی خرپا با روش نیرو





$$\delta_{1t_s} = 2(-\frac{1}{2\cos\theta})(\alpha t_s \ell) + 1*(\alpha t_s)(L) = -\frac{\alpha t_s \ell}{\cos\theta} + \alpha t_s \ell \cos\theta$$



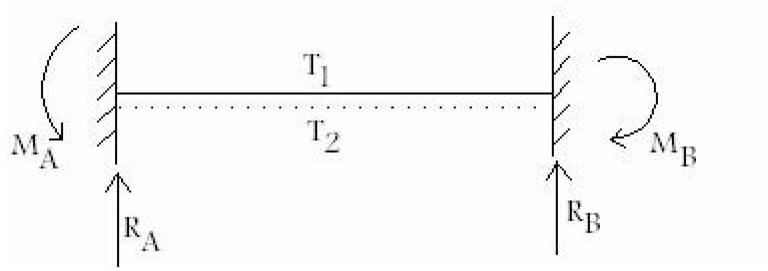


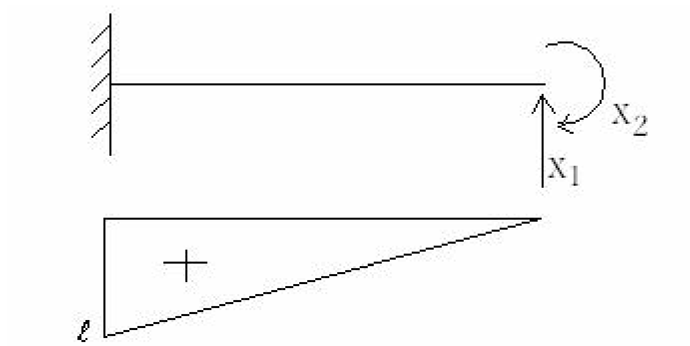
$$\delta_{11} = \int N_1^2 \frac{dx}{EA} = \sum_{i=1}^{3} N_i^2 \frac{\ell_i}{EA} = 2(-\frac{1}{2\cos\theta})(-\frac{1}{2\cos\theta})(\ell)\frac{1}{EA} + 1*1*\frac{\ell\cos\theta}{EA}$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = \frac{\ell}{2EA\cos^2\theta} + \frac{\ell\cos\theta}{EA} = \frac{\ell + 2\ell\cos^2\theta}{2EA\cos^2\theta}$$

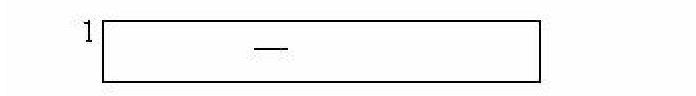
$$\delta_{11}x_1 = -\delta_{1t_s} \Rightarrow \frac{\ell + 2\ell\cos^2\theta}{2EA\cos^2\theta}x_1 = -(-\frac{\alpha t_s \ell}{\cos\theta} + \alpha t_s \ell\cos\theta)$$

مثال : عکس العمل های تکیه گاهی را در اثر حرارت Δt پیدا کنید : $T_2 - T_1 = \Delta t > 0$



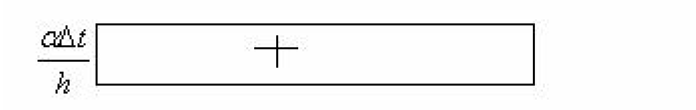


$$\delta_{11} = \frac{\ell}{3}(-\ell)(-\ell) = \frac{\ell^3}{3EI}$$



$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\ell}{2}(\ell)(-1) = \frac{-\ell^2}{2EI}$$

$$\delta_{22} = (-1)(-1)(\ell)\frac{1}{EI} = \frac{\ell}{EI}$$



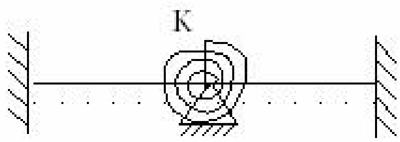
$$\delta_{1\Delta t} = \frac{\ell}{2}(-\ell)(\frac{\alpha\Delta t}{h}) = \frac{\alpha\Delta t\ell^2}{2h}$$

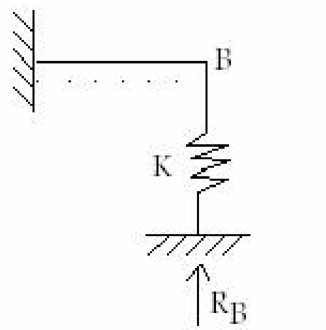
$$\delta_{2\Delta t} = (-1)(\frac{\alpha\Delta t}{h})(\ell) = \frac{\alpha\Delta t\ell}{h}$$

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = -\delta_{1\Delta t} \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = -\delta_{2\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\ell^3}{3EI}x_1 - \frac{\ell^2}{2EI}x_2 = \frac{-\alpha\Delta t\ell^2}{2h} \\ \frac{\ell^2}{2EI}x_1 + \frac{\ell}{EI}x_2 = \frac{\alpha\Delta t\ell}{h} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\alpha EI\Delta t}{h}$$

تکیه گاه ارتجاعی در سازه نا معین





$$\theta_B = \frac{M_B}{K} = \frac{X_1}{K} \qquad\qquad \Delta_B = \frac{R_B}{K} = \frac{X_1}{K}$$

در انتخاب سازه مبنا حتما باید نیروی فنر جزو نیروهای زائد تلقی گردد . نرمی فنر $(\frac{1}{K})$ با نرمی گره مربوطه سازه جمع می شود .

قضیه کاستلیانو

بیان قضیه دوم کاستلیانو

در سازه ارتجاعی بدون نشست و با دمای ثابت مشتق انرژی تغییر شکل نسبی (انرژی کرنشی) نسبت به نیرو برابر است با تغییر مکان نقطه اثر نیرو در امتداد نیرو یعنی :

$$\frac{\partial u}{\partial P_n} = \delta_n \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial M_n} = \theta_n \qquad\qquad : U = f(P_n), U = f(M_n)$$

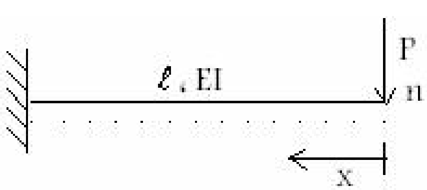
توجه: در محل محاسبه تغییر مکان یا شیب با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو حتما باید نیرویی باشد اگر می خواهیم خیز (تغییر مکان) را حساب کنیم باید در نقطه مورد نظر P (بار) داشته باشیم و اگر می خواهیم شیب را حساب کنیم در نقطه مورد نظر باید لنگر متمرکز داشته باشیم.

$$U = \sum\int_0^{\ell} \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum\int_0^{\ell} \frac{V^2 dx}{2GA'} + \sum\int_0^{\ell} \frac{N^2 dx}{2EA} \quad \text{انرژی کرنشی کل سازه}$$

برای محاسبه δ_n یا θ_n کافی است U را بر حسب P_n یا M_n حساب کرده و بعد از آن نسبت به P_n یا M_n مشتق بگیریم .

نکته: در مواردی که محل محاسبه δ_n فاقد P_n و یا محل محاسبه θ_n فاقد M_n باشد در اولی از P_n ساختگی و در دومی از M_n ساختگی استفاده می کنیم و پس از محاسبه مشتقات مقدار P_n یا M_n را صفر می گذاریم .

مثال : با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو تغییر مکان نقطه n را محاسبه کنید .



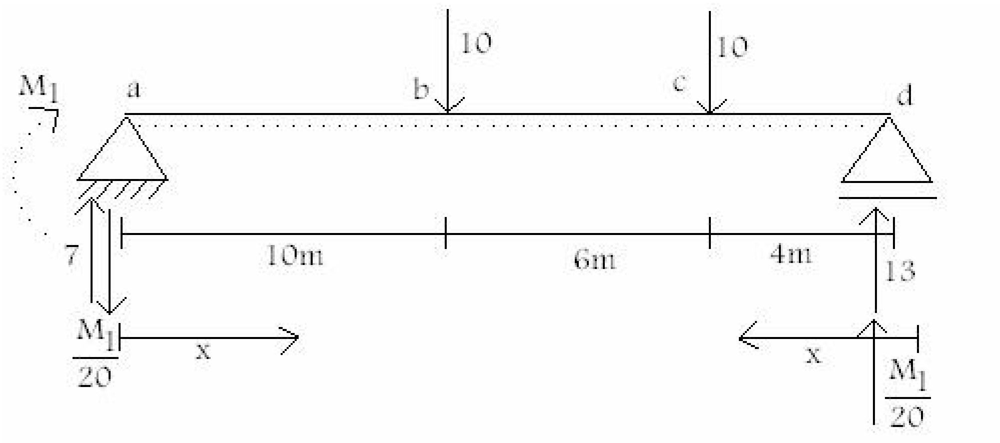
حل : روش اول (بدون استفاده از قائده زنجیری) :

انرژی کرنشی
$$U=\int_0^\ell \frac{M^2dx}{2EI}=\int_0^\ell \frac{(-Px)^2\,dx}{2EI}=\frac{P^2\ell^3}{6EI}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial P_n}=\delta_n^v=\frac{P^2\ell^3}{6EI}$$

روش دوم (استفاده از قائده مشتق زنجیری) :

$$M(x)=-Px \qquad \frac{\partial M}{\partial P}=-x$$
$$\frac{\partial u}{\partial P}=\delta_n^v=\int_0^\ell M.\frac{\partial M}{\partial P}.\frac{dx}{EI}=\int_0^\ell (-Px)(-x)\frac{dx}{EI}=\int_0^\ell Px^2dx=\frac{P\ell^3}{3EI}$$

مثال : با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو مطلوبست محاسبه θ_a (در محاسبه انرژی فقط از اثر M استفاده گردد)



حل : چون در محاسبه θ لنگر متمرکزی وجود ندارد لنگر M_1 را موقتا در آنجا وارد می کنیم : $\qquad \frac{\partial u}{\partial M_1}=\theta_a$

$$M_{ab}=M_1+(7-\frac{M_1}{20})x \quad : \quad \frac{\partial M_{ab}}{\partial M_1}=(1-\frac{1}{20}x) \quad \text{(a) از مبدا چپ}$$

$$M_{cd}=(13+\frac{M_1}{20})x \quad : \quad \frac{\partial M_{cd}}{\partial M_1}=\frac{1}{20}x \quad \text{(d) از مبدا راست}$$

$$M_{bc}=(13+\frac{M_1}{20})x-10(x-4) \quad : \quad \frac{\partial M_{bc}}{\partial M_1}=\frac{1}{20}x \quad \text{(d) از مبدا راست}$$

$$\frac{\partial u}{\partial M_1}=\theta_a=\int_0^{\ell=10}\left[M_1+(7-\frac{M_1}{20})\right]*(1-\frac{x}{20})\frac{dx}{EI}+\int_0^4(13+\frac{M_1}{20})x*\frac{x}{20}*\frac{dx}{EI}$$
$$+\int_4^{10}\left[(13+\frac{M_1}{20})x-10(x-4)\right]*\frac{x}{20}*\frac{dx}{EI}$$

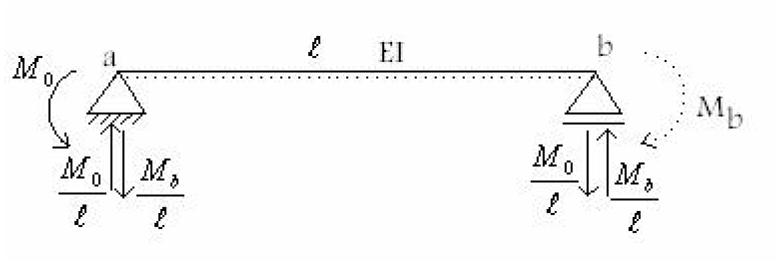
در این مرحله لنگر ساختگی M_1 را مساوی صفر قرار می دهیم و انتگرال ها را محاسبه می کنیم .

$$EI\theta_a = \int_0^{10} 7x(1-\frac{x}{20})dx + \int_0^{4} 13(\frac{x^2}{20})dx + \int_4^{10} (3x+40)(\frac{x}{20})dx$$

$$= (\frac{7x^2}{2} - \frac{7x^3}{60})\Big]_0^{10} + \frac{13x^3}{60}\Big]_0^{4} + (\frac{3x^3}{60} + x^2)\Big]_4^{10} = 378$$

$$\Rightarrow \theta_a = \frac{378}{EI}$$

مثال : مطلوبست محاسبه θ_b در تیر زیر با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو .



حل : چون در نقطه b لنگر متمرکزی نیست لنگر ساختگی M_b را وارد می کنیم :

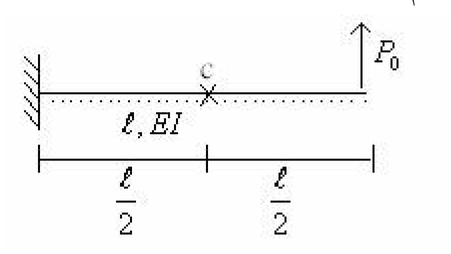
$$M(x) = \frac{M_0}{\ell}x - \frac{M_b}{\ell}x - M_0 \qquad : \qquad \frac{\partial M}{\partial M_b} = -\frac{x}{\ell}$$

$$\theta_b = \frac{\partial u}{\partial M_b} = \int_0^{\ell} M\frac{\partial M}{\partial M_b}(\frac{dx}{EI}) = \int_0^{\ell}(\frac{M_0}{\ell}x - \frac{M_b}{\ell}x - M_0)(-\frac{x}{\ell})\frac{dx}{EI}$$

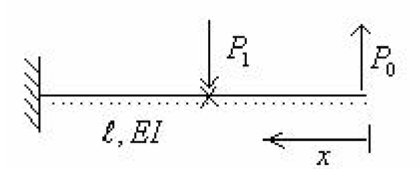
$$M_b = 0 \Rightarrow \theta_b = \int_0^{\ell}(\frac{M_0}{\ell}x - M_0)(-\frac{x}{\ell})\frac{dx}{EI} = (-\frac{M_0x^3}{3\ell^2} - \frac{M_0x^2}{2\ell})\Big]_0^{\ell}$$

$$\theta_b = \frac{M_0\ell}{6EI}$$

مثال : مطلوبست محاسبه δ_c^v با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو



حل : چون در نقطه c بار متمرکز وجود ندارد بار متمرکز p_1 را در نقطه c وارد می کنیم :



$$\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\ell}{2} & M_1(x) = P_0 x & : \frac{\partial M_1}{\partial P_1} = 0 \\ \frac{\ell}{2} \le x \le \ell & M_2(x) = P_0 x - P_1(x - \frac{\ell}{2}) & : \frac{\partial M_2}{\partial P_1} = -(x - \frac{\ell}{2}) \end{cases}$$

$$\delta_c^v = \frac{\partial u}{\partial P_1} = \int_0^{\frac{\ell}{2}} M_1 . \frac{\partial M_1}{\partial P_1} (\frac{dx}{EI}) + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_1} (\frac{dx}{EI})$$

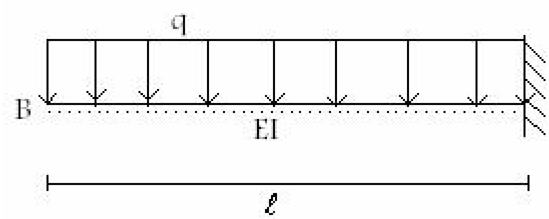
$$= \int_0^{\frac{\ell}{2}} (p_0 x)(0) \frac{dx}{EI} + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \left[p_0 x - P_1 (x - \frac{\ell}{2}) \right] (-x + \frac{\ell}{2}) \frac{dx}{EI}$$

$$= \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} P_0 x (\frac{\ell}{2} - x) \frac{dx}{EI} + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \left[P_1 (x - \frac{\ell}{2})(x - \frac{\ell}{2}) \right] \frac{dx}{EI}$$

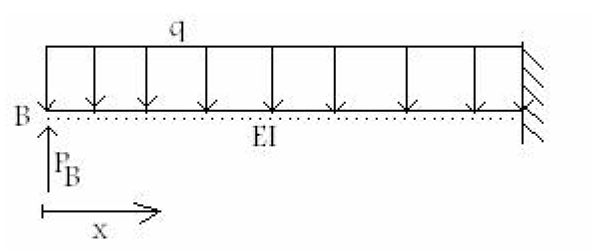
$$P_1 = 0 \Rightarrow \delta_c^v = \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} P_0 x (\frac{\ell}{2} - x) \frac{dx}{EI} = (\frac{P_0 \ell x^2}{4} - \frac{P_0 x^3}{3}) \Big]_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}$$

$$\Rightarrow \delta_c^v = \frac{-5 P_0 \ell^3}{48 EI}$$

مثال : در تیر طره ای مقابل مطلوبست : الف – تغییر مکان قائم نقطه B (δ_B^v) . ب – چرخش نقطه B (θ_B) .



حل الف : برای محاسبه تغییر مکان قائم نقطه B ، چون در نقطه B بار متمرکز وجود ندارد بار متمرکز ساختگی P_B را در نقطه B وارد می کنیم .

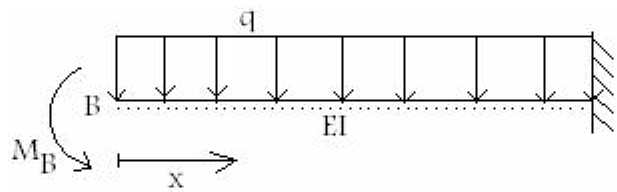


$$M(x) = P_B x - \frac{q x^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial P_B} = x$$

$$\delta_B^v = \frac{\partial u}{\partial P_B} = \int M . \frac{\partial M}{\partial P_B} . \frac{dx}{EI} = \int_0^{\ell} (\overbrace{P_B x}^{0} - \frac{q x^2}{2})(x) . \frac{dx}{EI} = -\frac{q \ell^4}{8 EI}$$

علامت منفی نشان می دهد که تغییر مکان نقطه B در خلاف جهت نیروی P_B می باشد

حل ب : چون در نقطه B لنگر متمرکزی وجود ندارد لنگر متمرکز ساختگی M_B را در نقطه B وارد می کنیم



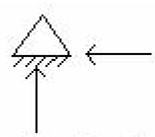
$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} - M_B \qquad : \frac{\partial M}{\partial M_B} = -1$$

$$\theta_B = \frac{\partial u}{\partial M_B} = \int M \frac{\partial M}{\partial M_B}\left(\frac{dx}{EI}\right) = \int_0^{\ell}\left(-\frac{qx^2}{2} - \overbrace{M_B}^{0}\right)(-1)\frac{dx}{EI} = \frac{q\ell^3}{6EI}$$

بنابراین با قضیه دوم کاستلیانو می توان تغییر مکان هر نقطه دلخواه دیگری را در صورتی که بار متمرکز نداشته باشد با وارد کردن بار متمرکز ساختگی محاسبه کرد .

اصل کار کمینه

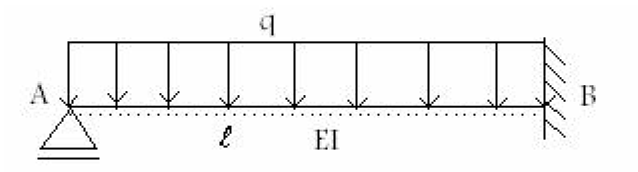
برای حل سازه های نامعین کاربرد دارد که بعد از انتخاب سازه مبنا مشتق انرژی کرنشی را نسبت به نیروهای تکیه گاهی حذف شده می گیریم . اگر مشتق انرژی کرنشی نسبت به واکنش قائم تکیه گاه غلطکی محاسبه شود مقدار آن حتما صفر است چون جابجایی در راستای قائم ندارد همچنین اگر مشتق انرژی کرنشی نسبت به لنگر تکیه گاه گیردار محاسبه شود حتما صفر خواهد بود .

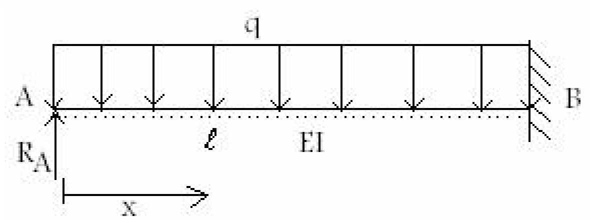


$$\frac{\partial u}{\partial V} = 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial H} = 0$$

تغییر مکان قائم   تغییر مکان افقی

مثال : واکنش های تکیه گاهی تیر زیر را با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو (اصل کار کمینه) تعیین کنید .





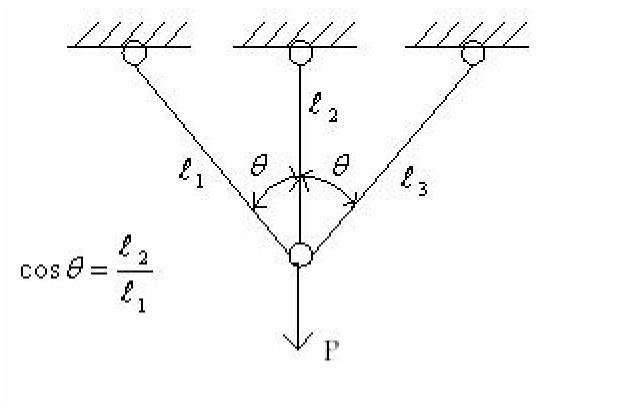
$$M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2} \qquad : \frac{\partial M(x)}{\partial R_A} = x$$

$$\delta_A=\frac{\partial u}{\partial R_A}=0\Rightarrow \delta_A=\int_0^{\ell} M.\frac{\partial M}{\partial R_A}(\frac{dx}{EI})=\int_0^{\ell}(R_A x-\frac{qx^2}{2})(x)\frac{dx}{EI}=0$$

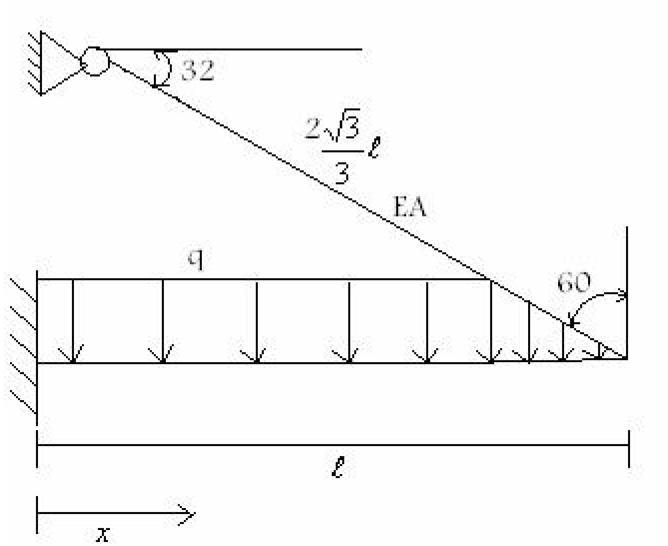
$$\Rightarrow \int_0^{\ell}(R_A x^2-\frac{qx^3}{2})\frac{dx}{EI}=\frac{R_A\ell^3}{3EI}-\frac{q\ell^4}{8EI}=0\Rightarrow R_A=\frac{3}{8}q\ell$$

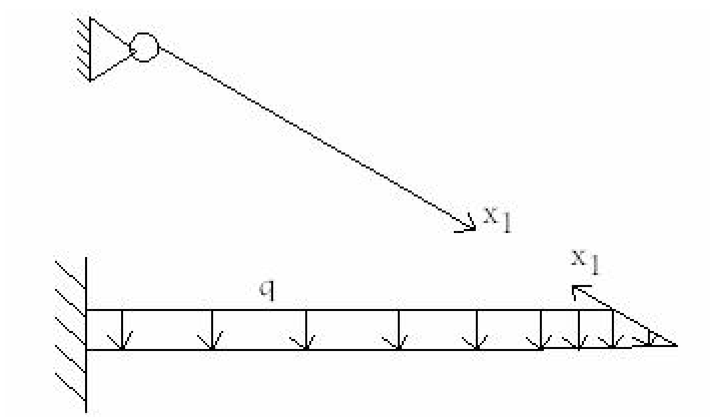
پردازش ثانوی : $\sum F_y=0 \quad \Rightarrow R_B=\frac{5}{8}q\ell$

تمرین : نیروی داخلی میله وسط را در خرپای زیر با استفاده ار اصل کار کمینه محاسبه کنید



مثال: نیروی کابل BC را در سازه زیر حساب کنید (با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو)





$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + x_1 \sin 30 * x \Rightarrow M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{x_1}{2} \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial x_1} = \frac{x}{2}$$

$$N = x_1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x_1} = 1$$

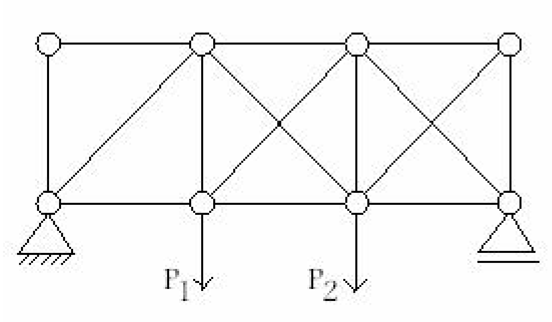
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \int_0^{\ell} M \frac{\partial M}{\partial x_1}\left(\frac{dx}{EI}\right) + \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell} N \frac{\partial N}{\partial x_1}\left(\frac{dx}{EA}\right) = 0$$

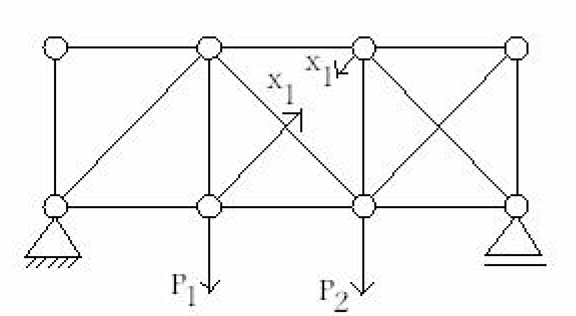
$$\Rightarrow \int_0^{\ell} \left(-\frac{qx^2}{2} + \frac{x_1}{2} x\right)\left(\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{EI} + \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell} x_1 (1) \frac{dx}{EA} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ell} -\frac{qx^3}{4}\left(\frac{dx}{EI}\right) + \int_0^{\ell} \frac{x_1}{4} x^2 \left(\frac{dx}{EI}\right) + \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell} x_1 \frac{dx}{EA} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-q\ell^4}{16EI} + \frac{x_1 \ell^3}{12EI} + \frac{x_1 (2\sqrt{3}\ell)}{3EA} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\frac{q\ell^4}{16EI}}{\frac{\ell^3}{12EI} + \frac{(2\sqrt{3}\ell)}{3EA}}$$

در اصل کار کمینه اگر سازه یک درجه نامعین باشد :



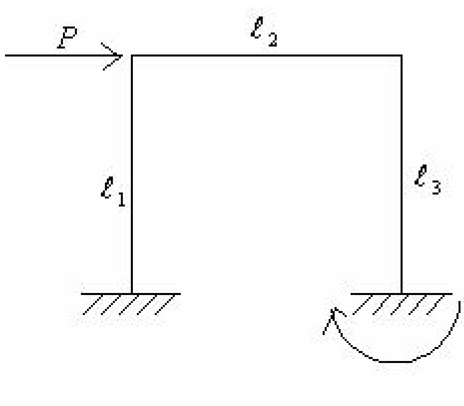


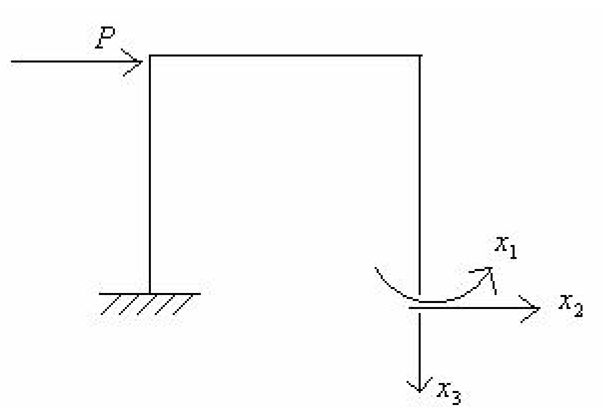
نیروهای داخلی خرپا برحسب x_1 , P_1 , P_2 بدست می آید .

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{14}N_i.\frac{\partial N_i}{\partial x_1}(\frac{l_i}{EA})=0$$

x_1 محاسبه می شود

و اگر سازه سه درجه نامعین باشد :

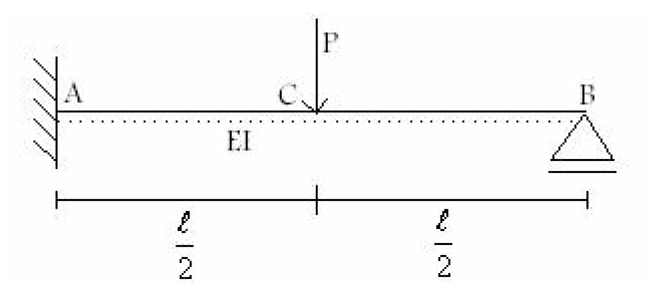




$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1}=0\Rightarrow\int M.\frac{\partial M}{\partial x_1}(\frac{dx}{EI})=0 & (1)\\ \frac{\partial u}{\partial x_2}=0\Rightarrow\int M.\frac{\partial M}{\partial x_2}(\frac{dx}{EI})=0 & (2)\\ \frac{\partial u}{\partial x_3}=0\Rightarrow\int M.\frac{\partial M}{\partial x_3}(\frac{dx}{EI})=0 & (3)\end{bmatrix}$$

با حل سه معادله سه مجهولی مقادیر x_1 و x_2 و x_3 بدست می آید

تمرین : عکس العمل تکیه گاه B را در سازه نامعین زیر با استفاده از اصل کار کمینه محاسبه نمایید .



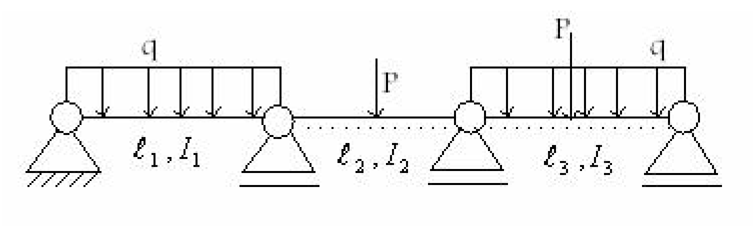
قضیه سه لنگر (ساده سازی روش نیرو برای تیرهای سراسری)

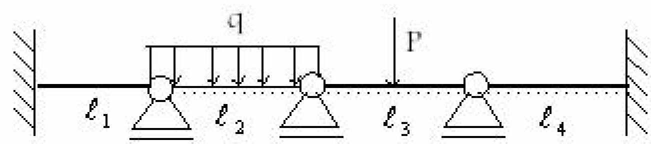
این روش همان روش نیرو است که برای سادگی و سهولت کاربرد معادلات آن به صورت خاصی در آمده است سازه مبنای این روش که معمولا برای حل تیرهای سرتاسری غیر مفصلی بکار می رود از طریق اعمال مکانیزم لنگر خمشی (مفصل) در تکیه گاه های میانی تیر سرتاسری به وجود می آید در هر معادله از معادلات سه لنگر حداکثر سه جمله موجود می باشد .

برای تیرهای منحنی قضیه سه لنگر بکار نمی رود در این روش ارتفاع تمام تکیه گاه ها یکسانند یعنی تمام تکیه گاه ها در یک تراز قرار دارند ممان اینرسی در طول یک دهانه بایستی ثابت باشد ولی می تواند در دهانه های مختلف فرق کند .

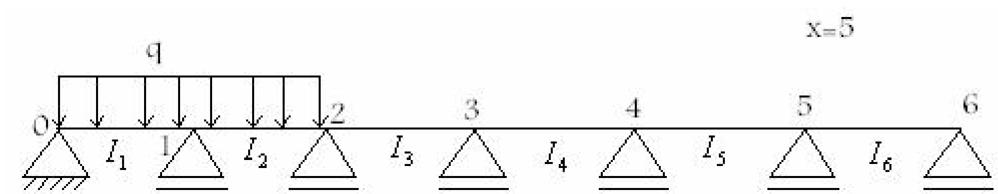
مجهولات روش سه لنگری لنگر خمشی ، تکیه گاههای میانی تیرهای سرتاسری و گاهی هم لنگر تکیه گاه گیردار انتهایی می باشد.

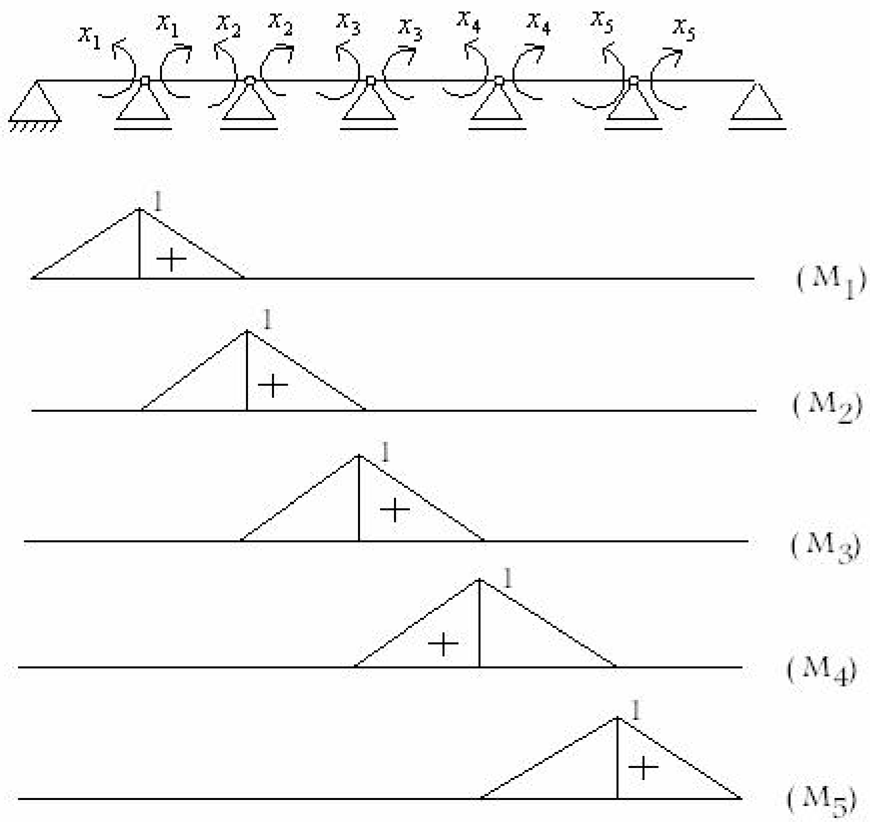
مثال هایی از سازه هایی که می توانند با روش سه لنگری حل شوند :





بدست آوردن معادلات سه لنگری از روش نیرو :





طرف راست را نمی توانیم بصورت یک رابطه در آوریم بلکه بصورت یک رابطه و جدول در می آوریم چون برای طرف راست بارگذاری لازم است و بارگذاری ها نیز متفاوت می باشند .

برای تیری که فقط دارای بار خارجی باشد چپ و راست معادلات سه لنگر برابر است با :

$$M_{i-1}\ell'_i + 2M_i(\ell'_i + \ell'_{i+1}) + M_{i+1}\ell'_{i+1} = -(R_i\ell'_i + L_{i+1}\ell'_{i+1})$$

جدول R, L برای انواع بارگذاری ها در پیوست آخر کتاب

معادلات سه لنگر در حالت نشست تکیه گاهی

$$M_{i-1}\ell'_i + 2M_i(\ell'_i + \ell'_{i+1}) + M_{i+1}\ell'_{i+1} = 6EI_c(-c_{i-1}\frac{1}{\ell_i} + c_i(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}}) - c_{i+1}\frac{1}{\ell_{i+1}})$$

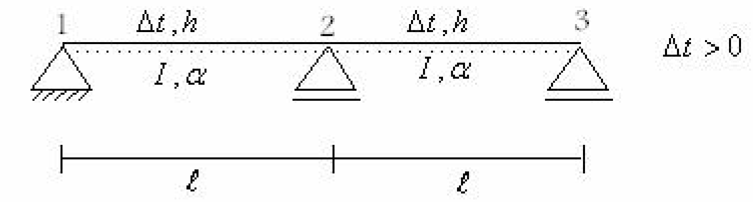
توجه : نشست به طرف پایین مثبت می باشد (در فرمول بالا) و اگر نشست رو به بالا باشد تغییر علامت می دهیم .

توجه : در صورتی که به همراه بارگذاری نشست هم داشته باشیم طرف راست معادلات شامل طرف راست مربوط به بارگذاری و طرف راست مربوط به نشست خواهد بود .

معادلات سه لنگر در حالت وجود Δt

$$M_{i-1}\ell'_i + 2M_i(\ell'_i + \ell'_{i+1}) + M_{i+1}\ell'_{i+1} = -3EI_c\alpha(\frac{\Delta t_i \ell_i}{h_i} + \frac{\Delta t_{i+1}\ell_{i+1}}{h_{i+1}})$$

مثال : مطلوبست محاسبه M_2 و رسم دیاگرام خمشی تیر در اثر Δt با استفاده از معادلات سه لنگری .



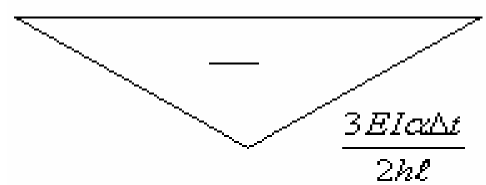
$$\overbrace{M_1\ell}^{0} + 2M_2(\ell+\ell) + \overbrace{M_3\ell}^{0} = -3EI\alpha(\frac{\Delta t\ell}{h} + \frac{\Delta t\ell}{h})$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{-3EI\alpha\Delta t\ell}{2h}$$

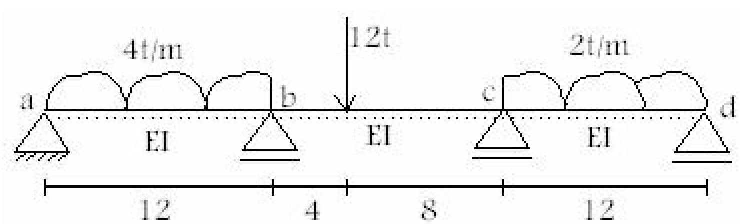
از معادلات تعادل :

$$R_1 = R_3 = \frac{M}{\ell}$$

$$\Rightarrow R_1 = R_3 = \frac{3EI\alpha\Delta t}{2h\ell}$$



مثال : لنگر خمشی در مقاطع b و c را به روش سه لنگری محاسبه کنید .



حل : $I_c = I \Rightarrow \ell' = \ell$

$$\overbrace{M_a\ell'_{ab}}^{0} + 2M_b(\ell'_{ab} + \ell'_{bc}) + M_{\ell'}\ell'_{bc} = -(R_{ab}\ell'_{ab} + L_{bc}\ell'_{bc})$$

معادله I : $\Rightarrow 2M_b(12+12) + M_{\ell'}(12) = -\left[(\frac{1}{4}(4)(12)^2(12) + \frac{12*8*4}{12^2}(8+12)(12)\right]$

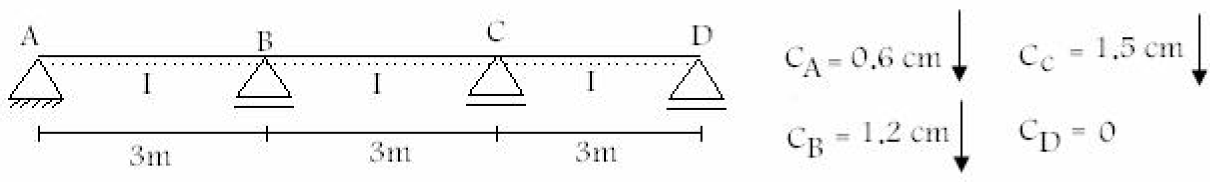
$$\Rightarrow 48M_b + 12M_{\ell'} = -2368 \quad (I)$$

معادله (II) : $M_b\ell'_{bc} + 2M_c(\ell'_{bc} + \ell'_{cd}) + \overbrace{M_d\ell'_{cd}}^{0} = -(R_{bc}\ell'_{bc} + L_{cd}\ell'_{cd})$

$$\Rightarrow 12M_b + 3M_c = -13.76 \quad (II)$$

با حل دو معادله (I) و (II) ، M_b و M_c بدست می آید .

مثال :مطلوبست محاسبه لنگر تکیه گاه های B و C در اثر نشست های داده شده (به روش سه لنگری) .



حل :

$$\overbrace{M_A\ell'_{AB}}^{0}+2M_B(\ell'_{AB}+\ell'_{BC})+M_C\ell'_{BC}=6EI\left[-C_A\frac{1}{\ell_{AB}}+C_B\left(\frac{1}{\ell_{AB}}+\frac{1}{\ell_{BC}}\right)-C_C\frac{1}{\ell_{BC}}\right]$$

$$\Rightarrow 12M_B+3M_C=0.006EI \qquad (I)$$

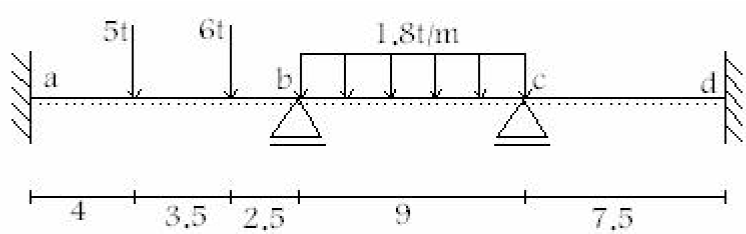
$$M_B\ell'_{BC}+2M_C(\ell'_{BC}+\ell'_{CD})+\overbrace{M_D\ell'_{CD}}^{0}=6EI\left[-\frac{C_B}{\ell_{BC}}+C_C\left(\frac{1}{\ell_{BC}}+\frac{1}{\ell_{CD}}\right)-\frac{C_D}{\ell_{CD}}\right]$$

$$\Rightarrow 3M_B+13.2M_C=0.0312EI \qquad (II)$$

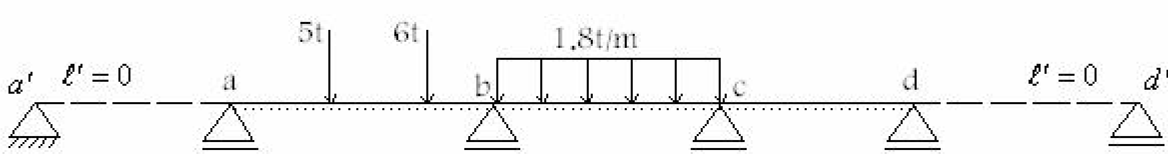
$$\begin{cases}12M_B+3M_C=0.006EI\\ 3M_B+13.2M_C=0.0312EI\end{cases}\Rightarrow M_B=-9.6385*10^{-5}EI\ ,\ M_C=2.385*10^{-3}EI$$

تمرین : مثال قبل را به روش نیرو حل کرده و جواب های بدست آمده را مقایسه کنید .

مثال : مقادیر لنگر نقاط a , b , c , d را به روش سه لنگری محاسبه کنید .



حل :



مممان اینرسی همه دهانه ها یکسان است . : $I_C=I\Rightarrow \ell'=\ell$

$$\overbrace{M_{a'}\ell'_{aa'}}^{0} + 2M_a(\overbrace{\ell'_{aa'}}^{0} + \ell'_{ab}) + M_b\ell'_{ab} = -(R_{aa'}\overbrace{\ell'_{aa'}}^{0} + L_{ab}\ell'_{ab})$$

$$\Rightarrow 20M_a + 10M_b = -\left[\frac{5*6*4}{10^2}(6+10) + \frac{6*7.5*2.5}{10^2}(7.5+10)\right]*10$$

$$\Rightarrow 20M_a + 10M_b = -332.6 \qquad (I)$$

$$M_a\ell'_{ab} + 2M_b(\ell'_{ab} + \ell'_{bc}) + M_c\ell'_{bc} = -(R_{ab}\ell'_{ab} + L_{bc}\ell'_{bc})$$

$$\Rightarrow 10M_a + 2M_b(10+9) + 9M_c = \left[\frac{5*6*4}{10^2}(4+10) + \frac{6*7.5*2.5}{10^2}(7.5+10)\right]*10 + \frac{1}{4}*1.8*9^2*9$$

$$\Rightarrow 10M_a + 2M_b(10+9) + 9M_c = -692.83 \qquad (II)$$

$$M_b\ell'_{bc} + 2M_c(\ell'_{bc} + \ell'_{cd}) + M_d\ell'_{cd} = -(R_{bc}\ell'_{bc} + L_{cd}\ell'_{cd})$$

$$\Rightarrow 9M_b + 2M_c(9+7.5) + 7.5M_d = -(\frac{1}{4}*1.8*9^2*9 + 0)$$

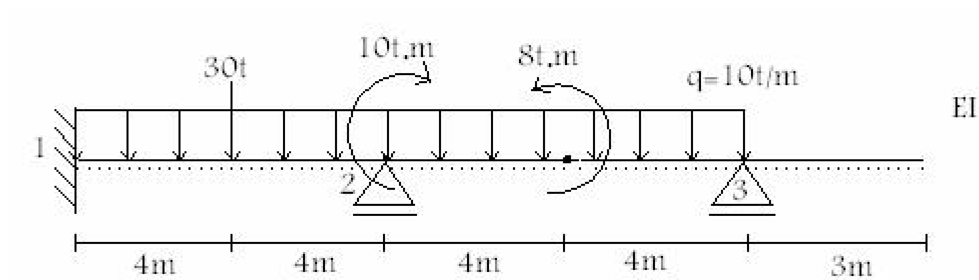
$$\Rightarrow 9M_b + 33M_c + 7.5M_d = -328.05 \qquad (III)$$

$$M_c\ell'_{cd} + 2M_d(\ell'_{cd} + \ell'_{dd}) + M_d\ell'_{dd} = 0$$

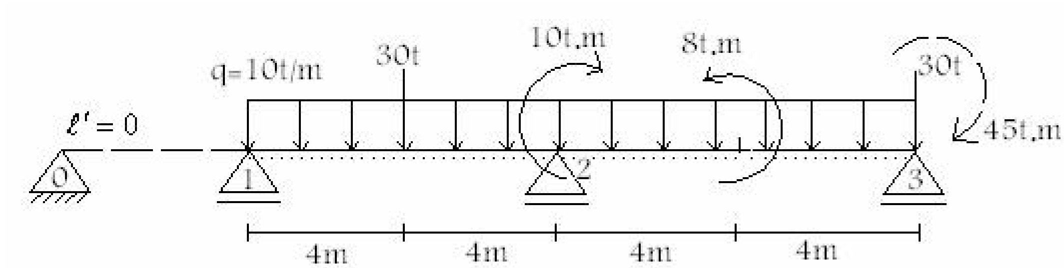
$$\Rightarrow 7.5M_c + 15M_d = 0 \qquad (IV)$$

با حل معادلات چهار مجهولی : $\begin{cases} M_a = -9.58\,t.m & M_c = -6.87\,t.m \\ M_b = -14.1\,t.m & M_d = +3.44\,t.m \end{cases}$

کاربرد روش سه لنگری در حالت وجود لنگر متمرکز گرهی در تیرهای سرتاسری

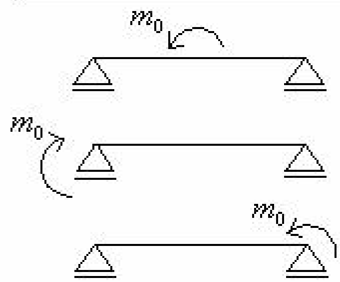


حل : حذف طره و حذف اثر آن



لنگر 45 t .m فقط در طرف چپ به عنوان m معلوم وارد معادله می گردد (در طرف راست یعنی R , L نقشی ندارد)

لنگر خارجی روی تکیه گاه 2 را می توان به دهانه ی چپ یا دهانه راست داد ما آن را به دهانه راست داده ایم .



	R	L
	$-\frac{m_0}{2}$	$\frac{m_0}{2}$
	m_0	$2m_0$
	$2m_0$	m_0

$$m_0(\ell'=0)+2m_1(0+8)+m_2(8)=-\left[(0+0+\frac{3}{8}(30*8)*8)+10*\frac{8^2}{4}*8\right]$$

$$16m_1+8m_2=-720-1280=-2000\ (I)$$

$$m_1(8)+2m_2(8+8)+m_3(8)=-\left[(\underbrace{\frac{3}{8}*30*8}_{\frac{3}{8}PL}*8+10*\frac{8^2}{4}*8+(2+10)*8+\frac{8}{2}*8)+\frac{10*8^2}{4}*8\right]$$

$$8m_1+32m_2=-3112\ \ (II)$$

$$\begin{cases}2m_1+m_2=-250\\ m_1+4m_2=-389\end{cases}\Rightarrow m_1=-88\,t.m\ \ ,\ \ m_2=-74.6\,t.m$$

روش لنگر سطح

قضیه اول لنگر سطح

اختلاف شیب مماس های رسم شده بر منحنی الاستیک تیر(منحنی ارتجاعی تیر یا منحنی خیز تیر یا منحنی تغییر مکان تیر) در دو نقطه A و B برابر است با مساحت زیر دیاگرام $\frac{M}{EI}$ در بازه A تا B .

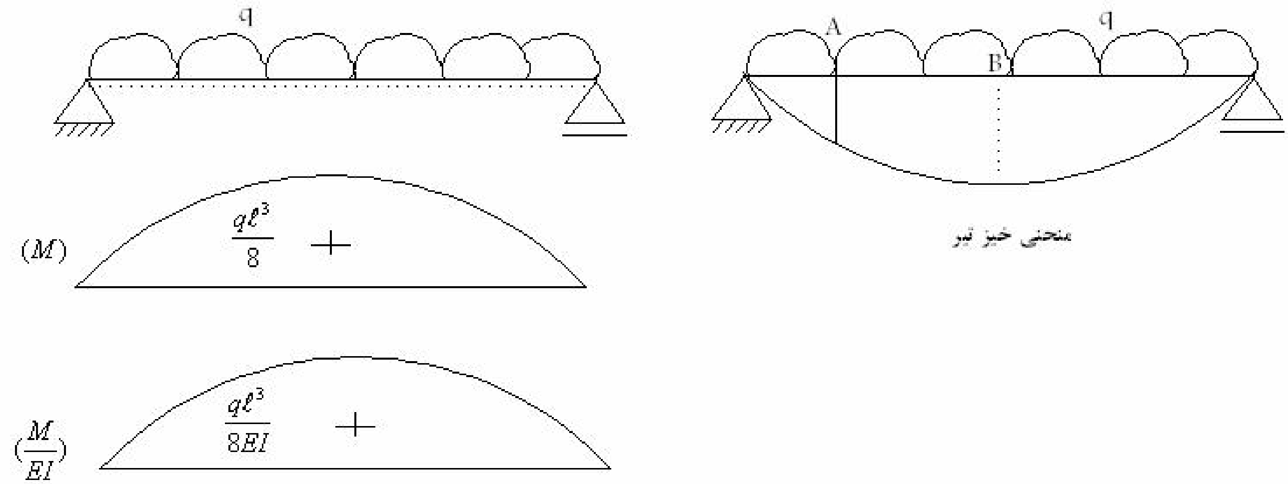
به شرط اینکه در بازه A تا B مفصل یا عوامل دیگر ناپیوستگی وجود نداشته باشد :

$$\Delta\theta=\theta_B-\theta_A=\int_{x_A}^{x_B}\frac{M}{EI}dx$$

مساحت زیر دیاگرام $\frac{M}{EI}$ در بازه A تا B = $\theta_{B/A}$

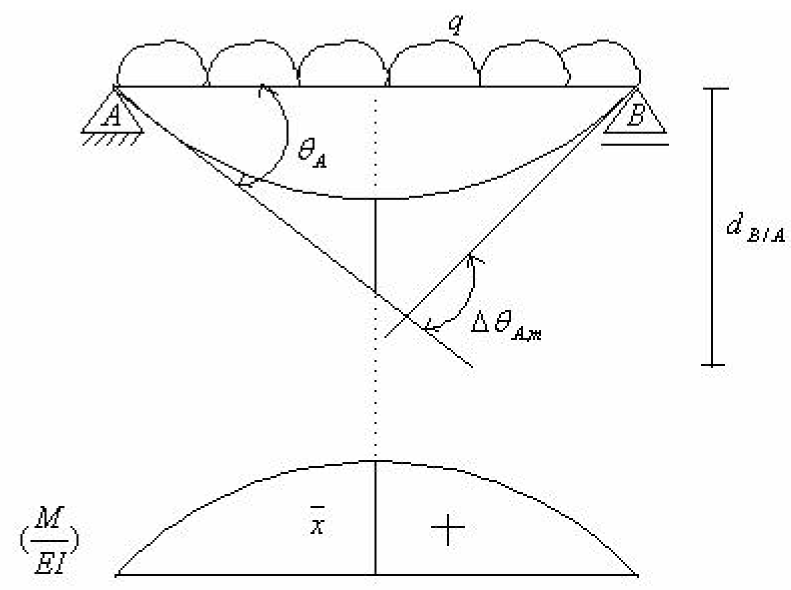
لازم به تذکر است که زاویه $\theta_{B/A}$ و مساحت زیر دیاگرام $\frac{M}{EI}$ دارای علامت یکسانی هستند به عبارت دیگر یک سطح مثبت (سطحی که در بالای محور x ها قرار دارد) دلالت بر این دارد که وقتی از A به B حرکت می کنیم مماس مرسوم بر منحنی خیز تیر در خلاف جهت عقربه های ساعت دوران می کند . و یک سطح منفی نشان دهنده دوران در جهت حرکت عقربه های ساعت است .

$\theta_{B/A}$ زاویه ای است که باید مماس در نقطه A بچرخد تا بر مماس در نقطه B منطبق گردد .



قضیه دوم لنگر سطح

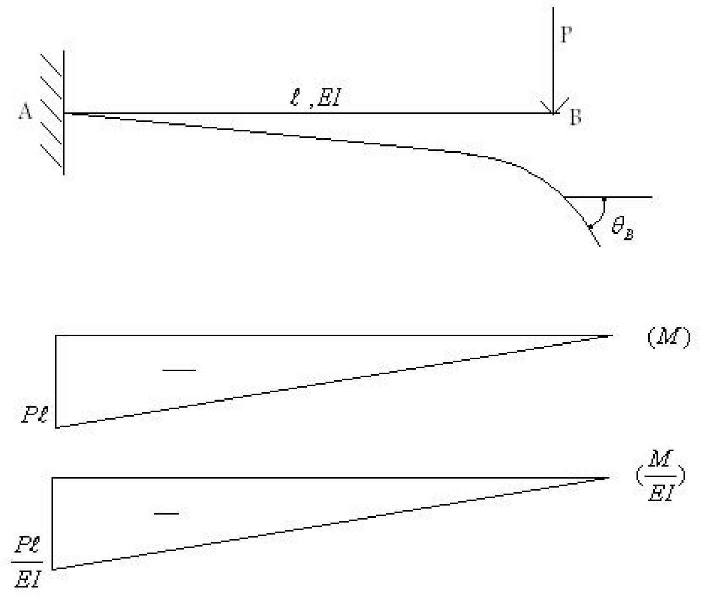
انحراف نقطه B از خط یا منحنی الاستیک تیر نسبت به مماس رسم شده در A (که با $d_{B/A}$ نشان می دهند) برابر است با ممان استاتیک زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در بازه A تا B نسبت به محوری که در B مستقر است به شرط اینکه بین A و B عوامل ناپیوستگی مانند مفصل موجود نباشد .



$$d_{B/A} = \bar{x}.\int_A^B \frac{M}{EI}dx = \int xdA \qquad d_{m/A} = \bar{x}_1.\int_A^m \frac{M}{EI}dx = \int xdA$$

از روی نمودار : $mZ = Am.\theta \ , \ \delta_m = mZ - d_{m/A} \quad \Rightarrow \delta_m = Am.\theta - \int_A^m \frac{M}{EI}dx.\bar{x}_1$

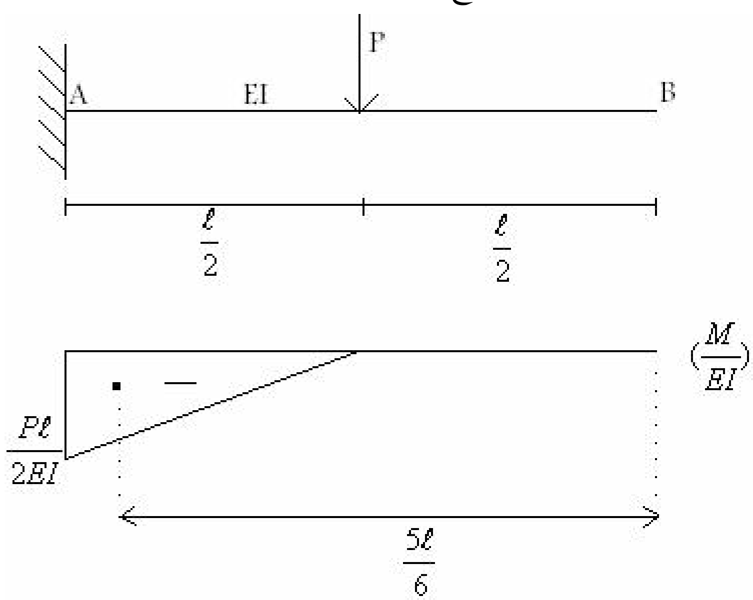
مثال : مطلوبست محاسبه θ_B در تیر طره ای زیر با استفاده از روش لنگر سطح .



حل: علامت دیاگرام $\frac{M}{EI}$ منفی است بنابراین θ_B بزرگتر است :

$$\theta_B = \overbrace{\theta_A}^{0} + \Delta\theta_{A,B} \Rightarrow \theta_B = \Delta\theta_{A,B} = \frac{1}{2}(\ell)(\frac{P\ell}{EI}) = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

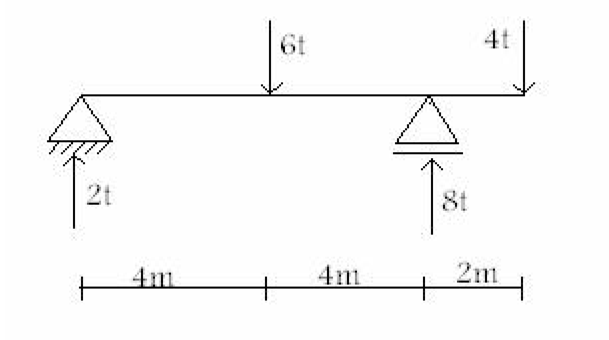
مثال : تغییر مکان قائم نقطه B را در تیر زیر با روش لنگر سطح محاسبه کنید.



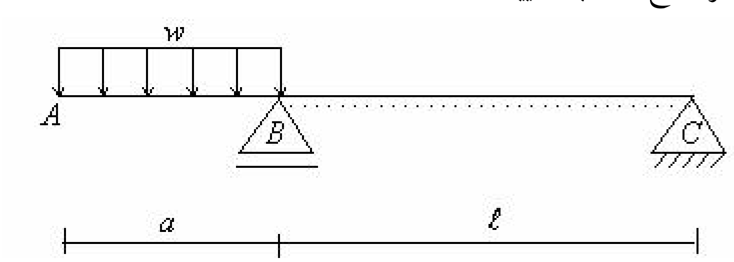
حل :

$$\delta_B = d_{B/A} = (\frac{1}{2})(\frac{P\ell}{2EI})(\frac{\ell}{2})(\frac{5\ell}{6}) \quad \Rightarrow \delta_B = \frac{5P\ell^3}{48EI}$$

تمرین : تغییر مکان قائم نقطه C و شیب نقطه C را بروش لنگر سطح محاسبه نمایید .



تمرین : خیز نقطه A را بروش لنگر سطح محاسبه نمایید .



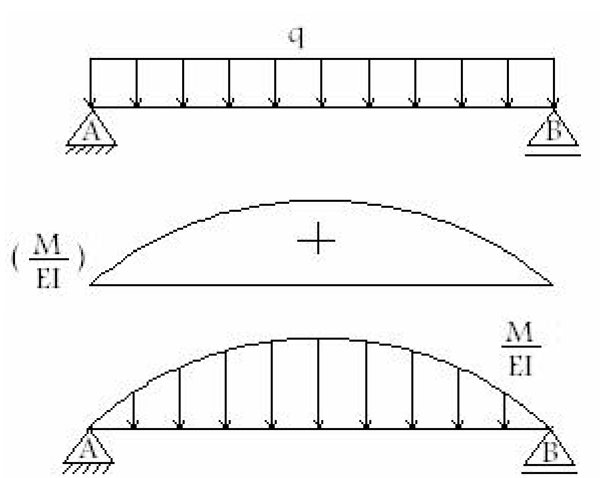
روش بار الاستیک (محاسبه تغییر مکان تیر ساده)

در این روش که برای تیرهای ساده به کار می رود نمودار $\frac{M}{EI}$ را رسم کرده و با توجه به علامت آن ($\frac{M}{EI}$ مثبت را با فلش رو به پایین و $\frac{M}{EI}$ منفی را با فلش رو به بالا) در روی تیر فرضی قرار می دهیم تیر فرضی با بار الاستیک خاصیت های مهم زیر را شامل می شود :

1- شیب در هر نقطه از تیر اصلی برابر است با نیروی برشی تیر فرضی در همان نقطه از تیر فرضی وقتی که تحت اثر بار الاستیک (بار $\frac{M}{EI}$) قرار دارد

2- خیز در هر نقطه از تیر اصلی برابر است با لنگر خمشی تیر فرضی در همان نقطه وقتی تحت اثر بار الاستیک قرار دارد

باید دقت کنیم که تکیه گاه ها در تیر فرضی همان تکیه گاه ها در تیر اصلی است ولی نیروهای عکس العمل تکیه گاهی در تیر فرضی باید دوباره محاسبه شود .



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A\ell - \int_A^B \frac{M}{EI}dx.s' = 0$$

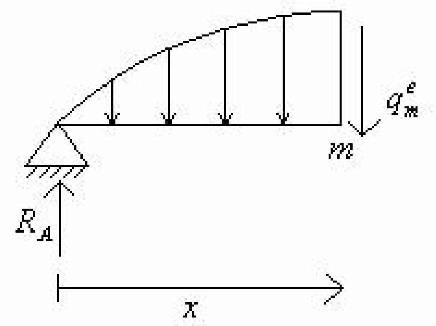
$$\Rightarrow R_A = \frac{1}{\ell}\int_A^B \frac{M}{EI}s'dx = \frac{1}{\ell}d_{B/A} = \theta_A$$

s' : فاصله مرکز سطح تا نقطه B

$$\Rightarrow R_A^e = \theta_A$$

جهت بار الاستیک رو به پایین است زیرا علامت $\frac{M}{EI}$ مثبت است .

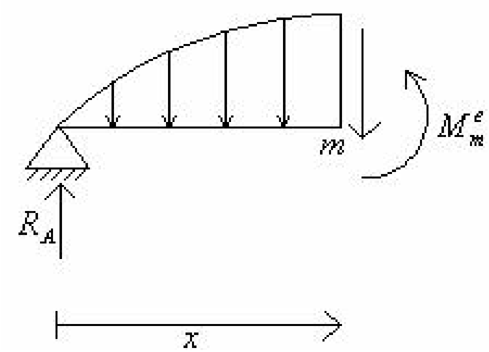
محاسبه نیروی برشی در تیر فرضی در فاصله x از سمت چپ :



$$q_m^e = R_A - \int_A^m \frac{M}{EI}dx = \theta_A - \Delta\theta_{A,m} = \theta_m$$

$$\Rightarrow q_m^e = \theta_m$$

محاسبه لنگر خمشی در تیر فرضی در فاصله x از سمت چپ :



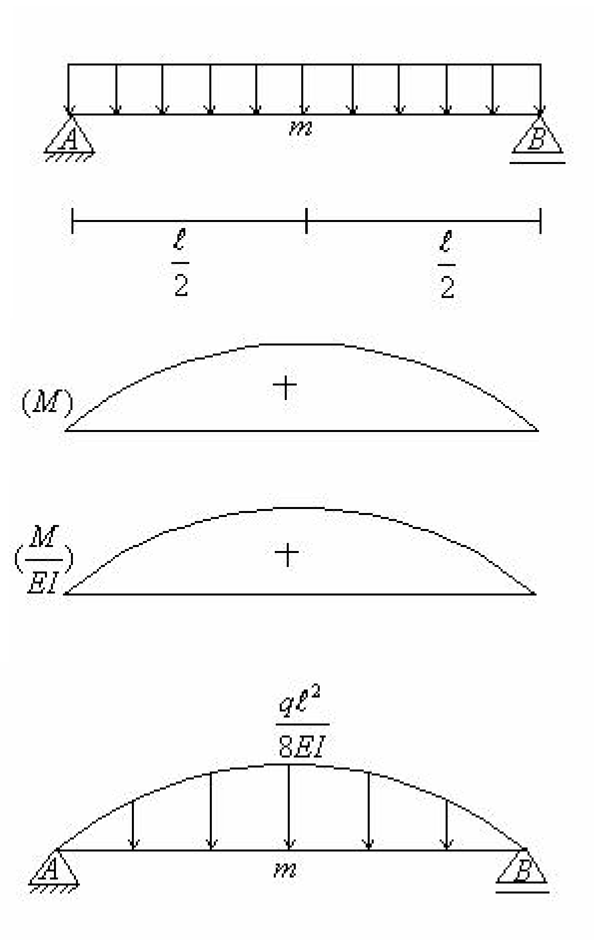
$$M_m^e = R_A x - \int_A^m \frac{M}{EI}dx.s' = \theta_A x - d_{m/A} = \delta_m$$

M_m^e : لنگر الاستیک نقطه m

$$\Rightarrow M_m^e = \delta_m$$

یعنی خیز در هر نقطه از تیر مانند نقطه m برابر است با لنگر خمشی تیر فرضی در همان نقطه وقتی که تحت اثر بار الاستیک قرار دارد.

مثال : با استفاده از روش بار الاستیک $\delta_m, \theta_A, \theta_B$ را محاسبه کنید.



حل : 1) محاسبه θ_A :

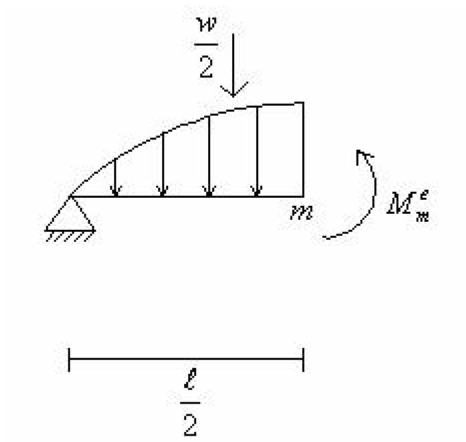
روش اول : $\theta_A = R_A^e = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}*\frac{q\ell^2}{8EI}*\ell) = \frac{q\ell^3}{24EI}$

روش دوم : $\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A^e*\ell - \frac{q\ell}{2} = 0 \Rightarrow R_A^e = \frac{1}{\ell}*\frac{w\ell}{2} = \frac{w}{2} = \frac{q\ell^3}{24EI}$

w کل بار می باشد که برابر مساحت زیر نمودار بارگذاری در تیر فرضی است : $W = \frac{2}{3}\ell*\frac{q\ell^2}{8EI} = \frac{q\ell^3}{12EI}$

2) محاسبه θ_B : $\theta_B = q_B^e = R_A^e - w = \frac{q\ell^3}{24EI} - \frac{q\ell^3}{12EI} = -\frac{q\ell^3}{24EI}$

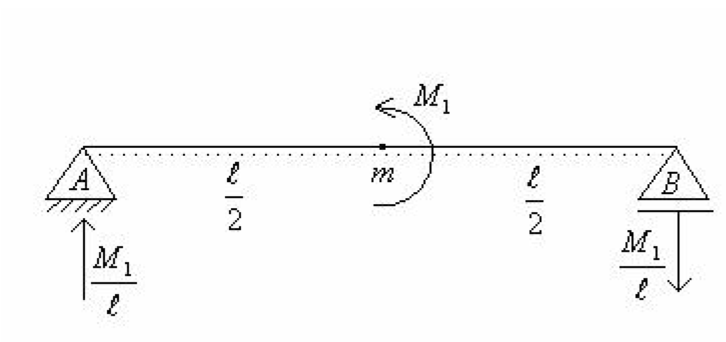
3) محاسبه δ_m :

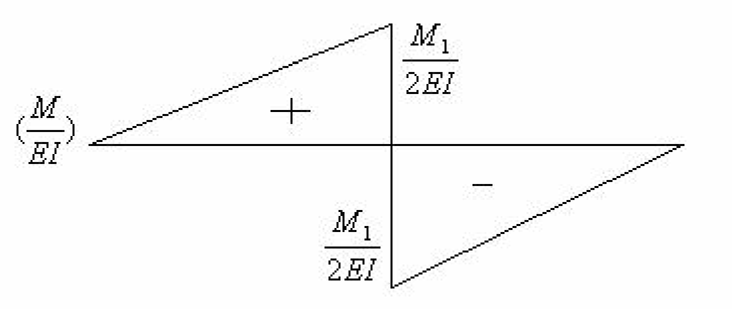


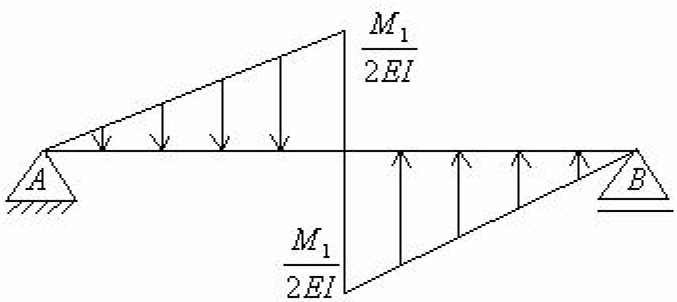
$$\delta_m = M_m^e = R_A^e * \frac{\ell}{2} - \frac{w}{2}(\frac{3}{16}\ell) = \frac{4\ell^3}{24EI} * \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}(\frac{q\ell^3}{12EI})(\frac{3}{16}q\ell)$$

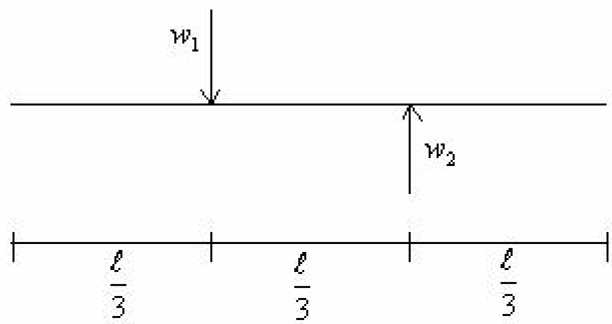
$$\Rightarrow \delta_m = \frac{5q\ell^4}{384EI}$$

مثال : مطلوبست محاسبه δ_m , θ_m در محل اثر لنگر متمرکز با روش بار الاستیک .









حل :

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}(\frac{\ell}{2})(\frac{M_1}{2EI}) = \frac{M_1\ell}{8EI}$$

$$\theta_A = R_A^e = q_A^e = \frac{1}{\ell}(\frac{M_1\ell}{3EI} * \frac{2}{3}\ell - \frac{M_1\ell}{8EI} * \frac{1}{3}\ell)$$

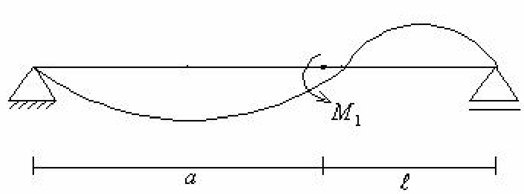
$$\Rightarrow \theta_A = \frac{M_1\ell}{24EI}$$

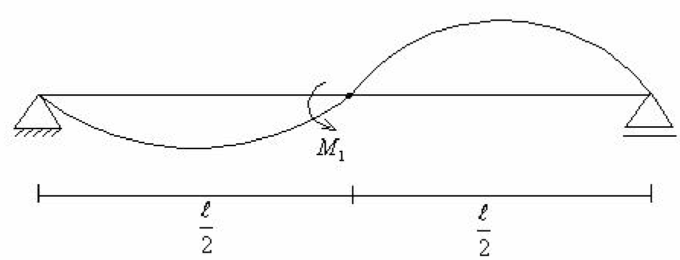
$$\theta_B = R_B^e = q_B^e = R_A^e + w_1 - w_2 = \frac{M_1\ell}{24EI}$$

$$\delta_m = M_m^e = \frac{M_1\ell}{24EI} * \frac{\ell}{2} - \frac{M_1\ell}{8EI} * \frac{\ell}{6} = 0 \Rightarrow \delta_m = 0$$

$$\theta_m = q_m^e = R_A^e - w_1 = \frac{M_1\ell}{24EI} - \frac{M_1\ell}{8EI} = -\frac{M_1\ell}{12EI}$$

نکته : تغییر مکان زیر لنگر متمرکز M_1 وقتی که لنگر M_1 در وسط دهانه تیر واقع می شود برابر صفر است و اگر M_1 در وسط دهانه نباشد تغییر مکان زیر لنگر M_1 مخالف صفر خواهد بود .

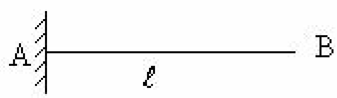




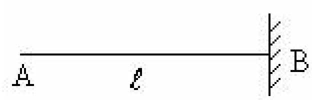
روش تیر مزدوج یا تیر فرضی

تیر فرضی باید تیری باشد که از نظر شرایط مرزی وقتی که تحت بار الاستیک قرار می گیرد با تیر اصلی مطابقت ویژه داشته باشد طبق روش بار الاستیک می دانیم که اگر در تیر فرضی در یک نقطه تحت بار الاستیک برش وجود داشته باشد در تیر اصلی در همان نقطه شیب وجود خواهد داشت و اگر در تیر فرضی در یک نقطه تحت بار الاستیک لنگر وجود داشته باشد در تیر اصلی در همان نقطه خیز وجود خواهد داشت پس در هنگام انتخاب تیر فرضی باید شرایط مرزی تیر اصلی را در نظر بگیریم مثلا اگر در تیر اصلی در نقطه ای شیب و خیز وجود داشته باشد باید در تیر فرضی در همان نقطه برش و خمش وجود نداشته باشد .

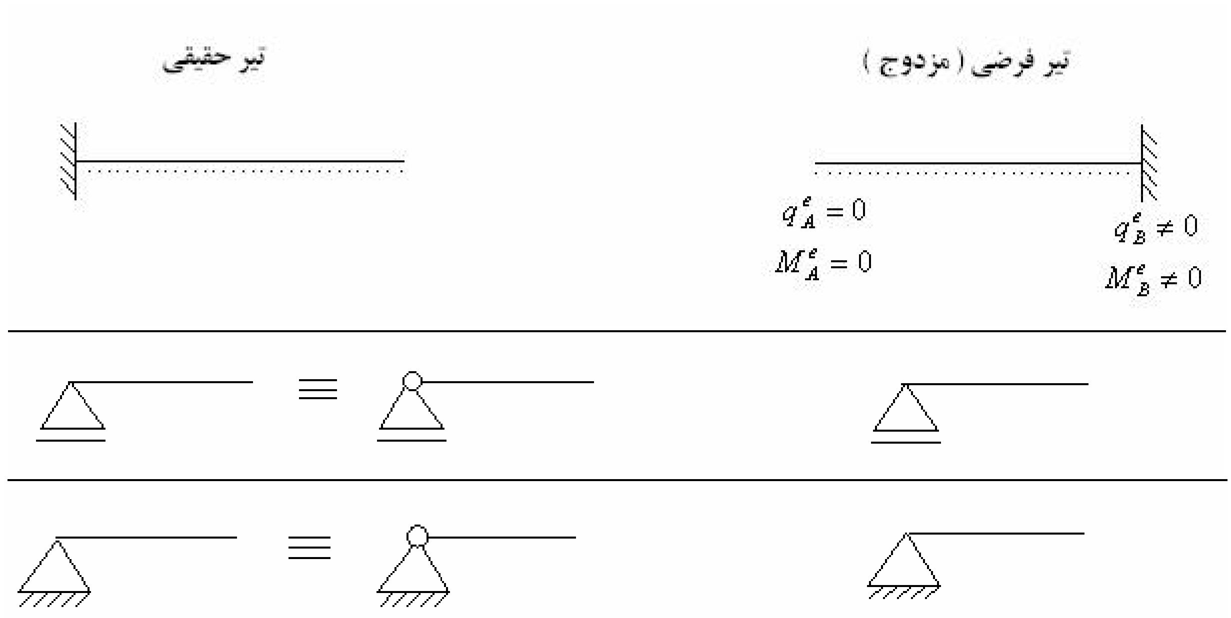
مثال: تیر مزدوج تیر طره ای مقابل را تعیین کنید .

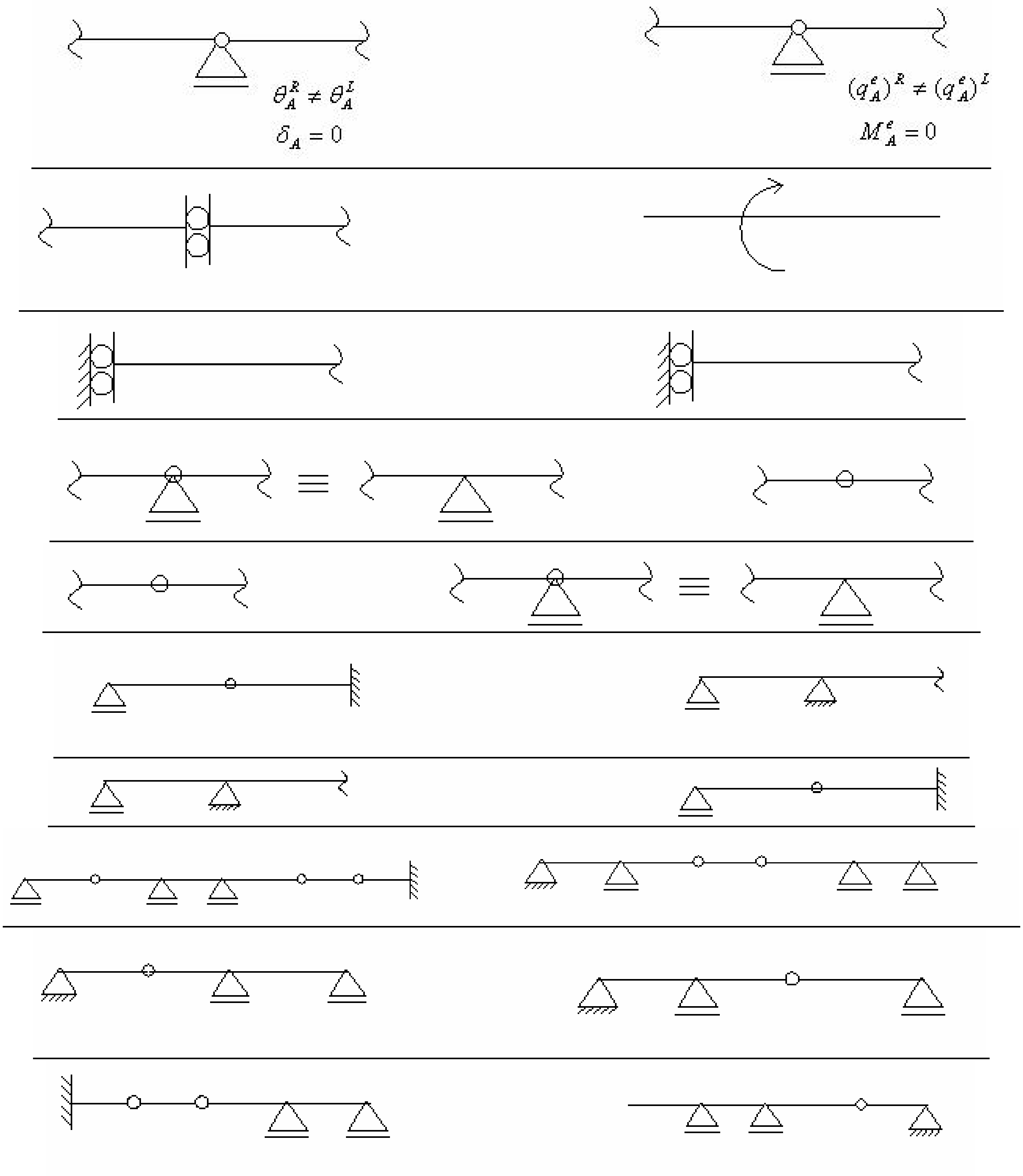


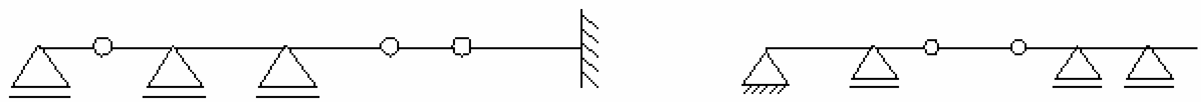
حل : در نقطه A خیز و شیب وجود ندارد پس باید در تیر فرضی در نقطه A لنگر و برش وجود نداشته باشد چنین شرایطی فقط در نوک آزاد رخ می دهد . در نقطه B خیز و شیب وجود دارد پس برای تامین چنین شرایطی باید در تیر فرضی در نقطه B لنگر و برش وجود داشته باشد در نتیجه تیر فرضی به صورت زیر خواهد شد .



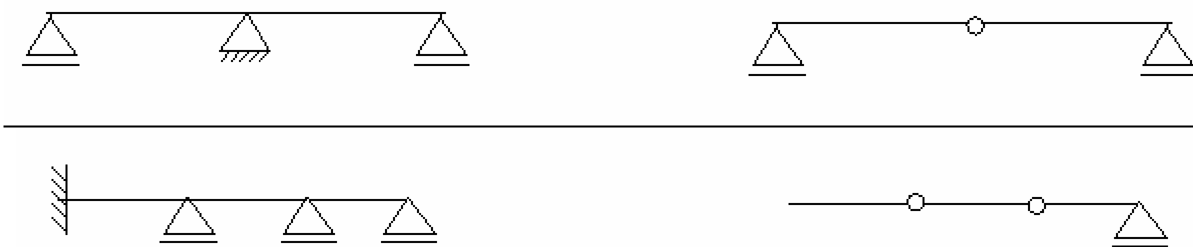
نمونه هایی از تیرمزدوج برای انواع تیرها در زیر آمده است.

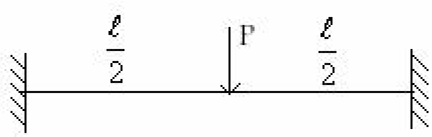


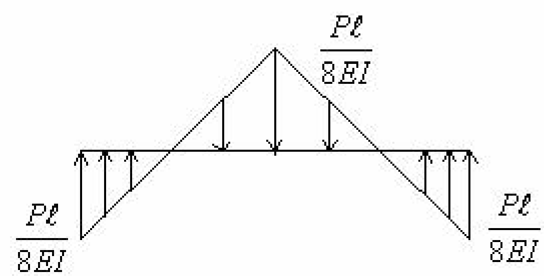

$\theta_A^R \neq \theta_A^L$
$\delta_A = 0$
$(q_A^e)^R \neq (q_A^e)^L$
$M_A^e = 0$



نمونه ای از تیرهای نامعین



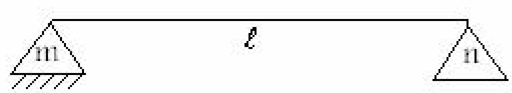


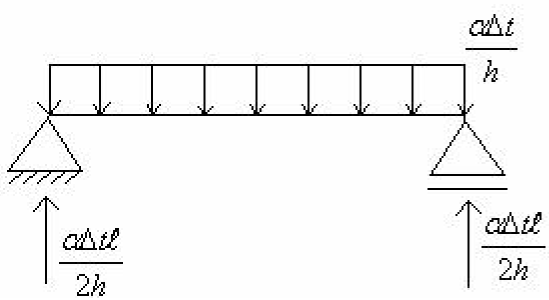


استفاده از روش تیر فرضی وقتی سازه معین دارای تغییر حرارت (Δt) باشد

می دانیم $\frac{M}{EI}=\frac{\alpha\Delta t}{h}$ ، با توجه به این نکته بار الاستیک در هنگامی که سازه تحت اثر حرارت Δt تغییر شکل می دهد و ما می خواهیم تغییر شکل های آن را محاسبه نماییم . اگر بخواهیم از روش تیر فرضی این تغییر شکل ها را محاسبه کنیم در این صورت بار الاستیک قرار گرفته بر روی تیر فرضی ، همان دیاگرام $\frac{\alpha\Delta t}{h}$ می باشد و بقیه مراحل همان مراحل محاسبه شیب و خیز در هنگام بارگذاری می باشد .

مثال : مطلوبست محاسبه θ_m , θ_n در سازه زیر در اثر $\Delta t>0$ با روش بار الاستیک .

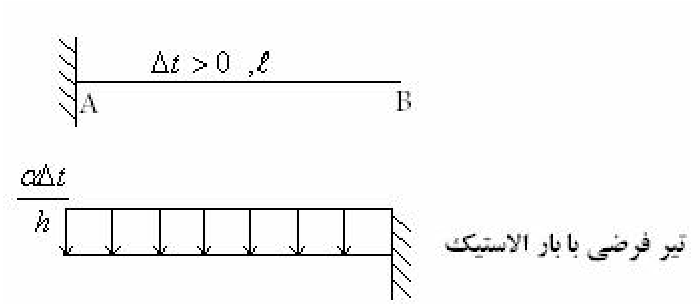




تیر فرضی با بار الاستیک

$$\theta_m = R_m^e = \frac{\alpha \Delta t \ell}{2h} \quad , \quad \theta_n = R_n^e = \frac{\alpha \Delta t \ell}{2h}$$

مثال : خیز و شیب انتهای تیر طره ای را در اثر $\Delta t > 0$ به روش بار الاستیک محاسبه نمایید.



$$\delta_B = M_B^e = (\frac{\alpha \Delta t}{h})(\ell)(\frac{\ell}{2}) = \frac{\alpha \Delta t \ell^3}{2h}$$

$$\theta_B = q_B^e = (\frac{\alpha \Delta t}{h})(\ell) = \frac{\alpha \Delta t \ell}{h}$$