

УДК 517.986.32+512.556.5+514.169

НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ В МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

А. А. Арутюнов¹, А. А. Ирматов², В. М. Мануйлов³, А. С. Мищенко⁴,
Ф. Ю. Попеленский⁵, А. Ю. Савин⁶

В статье изложена история становления некоммутативной геометрии на механико-математическом факультете МГУ и описана работа семинара по некоммутативной геометрии и топологии, на основе которого некоммутативная геометрия на факультете и формировалась. Некоммутативная геометрия играет все большую роль в структуре всех математических наук и поэтому мы отразили в статье не только развитие некоммутативной геометрии, но и разделы геометрии и анализа, которые потенциально приближаются к ней.

Ключевые слова: некоммутативная геометрия, некоммутативная топология, теория индекса, гипотеза Новикова.

The paper outlines the history of the formation of noncommutative geometry at the Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University and describes the work of the seminar on noncommutative geometry and topology, on the basis of which noncommutative geometry at the faculty was formed. Noncommutative geometry plays an increasingly important role in the structure of all mathematical sciences, and therefore we reflected in the article not only the development of noncommutative geometry, but also the branches of geometry and analysis that potentially approach it.

Key words: noncommutative geometry, noncommutative topology, index theory, Novikov conjecture.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-6-9

1. История семинара. Семинар проводится на кафедре высшей геометрии и топологии начиная с 1969 г. и собственно является ядром исследований по некоммутативной геометрии в МГУ.

Изучение некоммутативной геометрии в МГУ началось задолго до возникновения термина “некоммутативная геометрия”, который закрепился за этой тематикой благодаря книге Алена Конна [1]. Исследования стали проводиться даже раньше, чем появился научно-исследовательский семинар под руководством сначала А. С. Мищенко, а затем и его учеников и последователей.

¹Арутюнов Андроник Арамович — доктор физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем управления им. В.А. Трапезникова, e-mail: andronick.arutyunov@gmail.com.

Arutyunov Andronick Aramovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Scientist, Institute of Control Science.

²Ирматов Анвар Адхамович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: irmatov@mail.ru.

Irmatov Anwar Adhamovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Scientist, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

³Мануйлов Владимир Маркович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. высшей геометрии и топологии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: manuilov@mech.math.msu.su.

Manuilov Vladimir Markovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Geometry and Topology.

⁴Мищенко Александр Сергеевич — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. высшей геометрии и топологии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: asmish@mech.math.msu.su.

Mishchenko Alexandr Sergeevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Geometry and Topology.

⁵Попеленский Фёдор Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: popelens@gmail.com.

Popelenskii Fedor Yur'evich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

⁶Савин Антон Юрьевич — доктор физ.-мат. наук, проф. Российского университета дружбы народов, e-mail: a.yu.savin@gmail.com.

Savin Anton Yurievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, RUDN University.

Мы бы назвали прародителями некоммутативной геометрии (и топологии) прежде всего И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [2], которые перенесли идеи К. Вейерштрасса и М. Стоуна об описании топологических пространств с помощью алгебры непрерывных функций на случай некоммутативных алгебр. Но уже даже в случае коммутативных нормированных колец И. М. Гельфанд и его ученики [3] показали важное ключевое категорное обстоятельство, приведшее в дальнейшем к некоммутативной геометрии: всякое хаусдорфово компактное топологическое пространство X можно полностью описать в терминах кольца непрерывных функций $A = C(X)$ на нем.

Когда И. М. Гельфанд работал на механико-математическом факультете МГУ, на его знаменитом семинаре многие доклады были посвящены в той или иной степени некоммутативной геометрии, хотя в те времена такого термина еще не существовало. В качестве характерного примера работ по применению функциональных методов в топологии можно привести работу И. М. Гельфанда и А. С. Мищенко [4], в которой показан способ применения функциональных методов для теории перестроек неодносвязных многообразий.

С приходом на кафедру А. С. Мищенко начал работать научно-исследовательский семинар, который после выхода книги А. Конна стал называться семинаром по некоммутативной геометрии и топологии. Этот семинар явился центром притяжения московских математиков, интересующихся функциональными методами в топологии, да и не только московских.

Семинар начал свою работу в 1969 г., основными участниками и докладчиками в те времена были ученики А. С. Мищенко. После защиты соруководителем семинара стал Ю. П. Соловьев. Позже, после своих защит к соруководству подключились В. М. Мануйлов и Е. В. Троицкий. В 1990–2000-х гг. соруководителями семинара стали А. А. Ирматов, И. К. Бабенко, Ф. Ю. Попеленский. В 2010-х гг. присоединились А. А. Арутюнов и А. Ю. Савин.

В 1970-х и 1980-х гг. большую часть докладов делали ученики А. С. Мищенко, особенно Ю. П. Соловьев. Среди докладчиков также были: А. Старков, Р. Диглис, Р. Красаускас, М. Франк, В. Хоффманн. Принимали участие и А. Я. Хелемский, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, А. Т. Фоменко, Ю. Г. Борисович, В. Г. Звягин, А. И. Штерн. В 1990-х гг. на семинаре стали выступать и иностранные специалисты: Юрген Айхорн, Николае Телеман, Макс Каруби, Роландо Хименес, Александр Энгель. Сохранялись связи и с математиками российского происхождения, в частности в работе семинара принимали участие Г. Каспаров, Д. Алексеевский, И. Кричевер, А. А. Суслин, Ф. А. Сукочев. Особенно сильны были связи семинара с польскими математиками — Р. Волаком, Б. Боярским, С. Яцковским, Я. Кубарским, З. Кухарским, А. Зайцем, К. Паваловским, Т. Рыбицким, Б. Гайдуком, А. Бояновской и многими другими.

Члены семинара принимают активное участие в международных конференциях и как организаторы. Среди таких конференций были Александровские чтения, серия конференций *Glances at Manifolds* (Краков) и *K-Theory, C*-Algebras and Topology of Manifolds* (Харбин и Тяньцзинь).

Семинар неизменно начинается в одно и то же время: 5-я пара “по мехматскому времени”. Последние годы семинар продолжает свою деятельность, используя возможности Интернета, благодаря чему к нему присоединились и коллеги, находящиеся за рубежом: С. Сильвестров, Нгуен Леань. Неизменным остается и активное участие в семинаре студентов и молодых исследователей, которые докладывают о своих результатах. Среди них: А. Корчагин, А. Алексеев, Г. Макеев, А. Наянзин, Н. Монченко, А. Онищенко, Д. Емельянов, Р. Пепа и другие. Продолжают излагать свои результаты и старые участники семинара: П. М. Ахметьев, А. В. Ершов, П. Р. Иванков, Г. И. Шарыгин, И. М. Никонов.

2. Основные идеи некоммутативной геометрии. Основной идеей некоммутативной геометрии является переформулировка понятий топологии, анализа, дифференциальной геометрии на языке операторных алгебр с использованием двойственности между топологическими пространствами и алгебрами функций на них и попытка обобщить эту двойственность на двойственность между некоммутативными алгебрами и геометрическими объектами определенных видов так, чтобы свойства их алгебраического и геометрического описания оказывались взаимосвязанными.

Многие дополнительные структуры на топологическом пространстве позволяют ввести в кольцо непрерывных функций двойственную структуру. Так, например, компактность пространства X соответствует наличию единицы в кольце $C(X)$.

Другой полезный пример дополнительной структуры на топологическом пространстве X задается структурой риманова многообразия. По алгебре непрерывных функций $C(M)$ на римановом многообразии M можно восстановить M только как топологическое пространство, без дополнительной структуры. Алгебраический инвариант, позволяющий восстановить риманову структуру, — это так называемая спектральная тройка, состоящая из гильбертова пространства H , алгебры A операторов в H и самосопряженного оператора D , заданного на плотном подпространстве в H и удовлетворяющего условию $\|[a, D]\| < \infty$ для любого $a \in A$.

Поразительно, что кроме чисто абстрактных примеров некоммутативных пространств довольно быстро стали возникать (и применяться в физике) некоммутативные пространства в виде калибровочных (квантовых) полей.

3. Проблемы, возникающие в некоммутативной геометрии. Тематика семинара направлена на привлечение докладчиков, занимающихся различными вопросами некоммутативной геометрии. Первоначально таких вопросов было немного, но в дальнейшем тематика докладов постепенно расширялась таким образом, что стало возможным выделить несколько больших направлений, которые описаны ниже.

3.1. Гипотеза Новикова. История семинара «Некоммутативная геометрия и топология» на механико-математическом факультете МГУ с научной точки зрения началась с работ А. С. Мищенко, посвященных так называемой гипотезе Новикова о гомотопической инвариантности высших сигнатур неодносвязных многообразий. Трудность анализа высших сигнатур на неодносвязном многообразии M заключается в том, что если фундаментальная группа $\pi_1(M)$ нетривиальна, то анализ квадратичной формы на гомологиях многообразия M отягощен многочисленными препятствиями, которые отсутствуют в односвязном случае.

Первая задача, которую потребовалось решить в неодносвязном случае, заключалась в определении категории групп гомологий и когомологий, в которой квадратичная форма на многообразии M описывается наиболее адекватным образом. А. С. Мищенко для этого ввел понятие алгебраических комплексов Пуанкаре, с помощью которых естественно описывается обобщенная неодносвязная сигнатура $\sigma(M)$ неодносвязного многообразия M как элемент эрмитовой K -группы $K_n^h(\pi_1(M))$, $n = \dim M$ [5].

Вторым важным результатом стала формула, описывающая с помощью алгебраических комплексов Пуанкаре препятствия к перестройке нормального отображения неодносвязных многообразий до гомотопической эквивалентности по модулю кручения. А. С. Мищенко нашел полезный класс представлений — так называемых фредгольмовых представлений фундаментальных групп многообразий — и при их помощи установил справедливость гипотезы Новикова для компактных многообразий отрицательной секционной кривизны [6].

Эти два пионерских результата породили шквал публикаций во всем мире, который длится до сих пор. Примечательно, что гипотеза Новикова остается до настоящего времени в полной мере недоказанной (и неопровергнутой), а класс фундаментальных групп, для которых гипотеза Новикова доказана, постоянно расширяется.

Развивая идеи А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев предложил оригинальный подход к исследованию определенного класса дифференциальных эллиптических операторов на евклидовом пространстве по отношению к действию группы целочисленных сдвигов.

В результате было получено фредгольмово представление свободной абелевой группы с нетривиальным характером Черна, позволившее получить новое простое доказательство гипотезы Новикова о высших сигнатурах для свободных абелевых групп. Позже ему удалось распространить этот подход на гораздо более сложные пространства — так называемые комплексы Брюа–Титса, что дало возможность доказать гипотезу Новикова для достаточно широкого класса дискретных групп — решеток в линейных алгебраических группах над локальными локально компактными полями [7].

3.2. Некоммутативные алгебры интегралов и полная интегрируемость по Лиувиллю. Известно, что если для гамильтоновой системы в $2n$ -мерном симплектическом компактном многообразии M имеется n независимых интегралов, находящихся в инволюции, то согласно теореме Лиувилля такая система редуцируется к n -мерному тору с конкретным описанием движения (иррациональные обмотки тора). Другими словами, метод интегрирования Лиувилля задается при помощи коммутативной алгебры A интегралов. Условие полной интегрируемости в этом случае задается простым равенством $\dim M = 2 \dim A$.

В 1978 г. А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [8] обнаружили некоммутативную версию теоремы Лиувилля, которая обобщает коммутативный случай при помощи условия $\dim M = \dim A + \text{index } A$, где $\text{index } A$ есть размерность коммутативной подалгебры Картана H в алгебре A . То есть $\text{index } A = \dim H \leq \dim A$. В случае коммутативной алгебры A имеем $\text{index } A = \dim A$ и получается классическая теорема Лиувилля $\dim M = 2 \dim A$.

3.3. Когомологии с внутренними симметриями и эрмитова K -теория. Большой цикл работ Ю. П. Соловьева с учениками Р. Л. Красаускасом, С. В. Лапиным, В. А. Колосовым посвящен теориям гомологий с внутренними симметриями. В [9] было установлено, что такого сорта теории определяются так называемыми скрещенными симплицальными группами, каждая из которых единственным образом представляется в виде расширения одной из семи простых скрещенных симплицальных групп посредством подходящей симплицальной группы. Наиболее глубокие и важные

результаты в этой области относятся к диэдральным гомотопиям, которые, как оказалось, теснейшим образом связаны с эрмитовой K -теорией.

Ю. П. Соловьев обнаружил еще один аспект этой связи, который использует построенный им эрмитов аналог K -функтора Вальдхаузена, — обобщение эрмитовой K -теории на категорию топологических пространств. В частности, он построил важный изоморфизм $\pi_n({}^e KU(X)) \otimes \mathbb{Q} \cong HD_n(\Omega X)$. Для этого были применены диэдральные гомотопии при вычислении инвариантов пространства гомотопических эквивалентностей и пространства гомеоморфизмов комбинаторных многообразий [10].

3.4. Гильбертовы C^* -модули и теория фредгольмовых операторов на них. Гильбертовы C^* -модули, возникшие в работе [11] в результате обобщения гильбертовой структуры, при котором в качестве коэффициентов выступают C^* -алгебры, оказались полезным инструментом в некоммутативной геометрии, в частности в операторной K -теории [12, 13].

Если изучаемый оператор инвариантен относительно действия группы или C^* -алгебры, его естественно рассматривать как оператор в соответствующем гильбертовом модуле. Теория фредгольмовых операторов в таких модулях была разработана в [14]. Основным достижением этой теории было то, что ядро и коядро фредгольмова оператора не обязаны быть конечно-порожденными проективными подмодулями, а должны лишь правильным образом в них вкладываться, чего достаточно для определения индекса в K -теории C^* -алгебры коэффициентов.

Из дальнейших важных результатов в этом направлении отметим построение в [15] новой топологии на множестве обычных фредгольмовых операторов, которая тесно связана с фредгольмовыми операторами над коммутативными C^* -алгебрами (последние получают как непрерывные операторнозначные функции), а также теории фредгольмовых операторов в гильбертовых модулях, не обязательно допускающих сопряженный оператор [16]. Наряду с исследованием операторов в гильбертовых модулях интерес представляет собственно теория гильбертовых модулей. Ряд их свойств аналогичен свойствам гильбертовых пространств, хотя имеются и существенные отличия.

В этом направлении отметим характеризацию коммутативных C^* -алгебр, все модули над которыми рефлексивны [17]. Другим любопытным недавним результатом служит исследование (не)единственности продолжения функционалов с “толстого” подмодуля на объемлющий модуль [18].

3.5. K -гомотопии C^* -алгебр и расширения. Связь функтора K -гомотопий с расширениями C^* -алгебр и с асимптотическими морфизмами, обнаруженная Г. Г. Каспаровым, А. Конном и Н. Хигсоном, была детально исследована в цикле статей В. М. Мануйлова и К. Томсена. Ими построена группа полуобратимых расширений и показано, что она совпадает с E -теорией Конна–Хигсона. Была также выделена группа гомотопических классов трансляционно-инвариантных асимптотических гомоморфизмов и доказано, что она совпадает с функтором K -гомотопий. Было показано существование расширений C^* -алгебр, которые не только необратимы, но и неполобратимы и даже гомотопически необратимы. Также было показано, что гомотопические классы асимптотических гомоморфизмов в алгебру Калкина совпадают с гомотопическими классами настоящих гомоморфизмов, что позволило представить E -теорию как частный случай KK -теории Каспарова. Было найдено новое описание операторной K -теории в терминах пар операторов, являющихся проекторами только там, где они не равны [19]. Аналогично можно ослабить требование унитарности (обратимости) для определения группы K_1 , благодаря чему можно определить относительный индекс пары операторов, даже если они необратимы (но имеют одинаковую необратимую “часть”).

3.6. Дифференциальное исчисление на некоммутативных групповых алгебрах. В соответствии с идеей С. П. Новикова, выдвинутой в 1960-х гг., построена [20] редукция исчисления функций на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ к исчислению сечений некоторого одномерного расслоения над $2n$ -мерным тором $\mathbb{T}^{2n}$. Эта редукция позволяет отождествить пространство Шварца на $\mathbb{R}^n$ с пространством гладких сечений расслоения χ , а также отождествить соответствующие пространства Соболева и пространства псевдодифференциальных операторов.

Эта работа простиимулировала исследования в направлении, которое можно назвать дифференциальным исчислением на некоммутативных алгебрах. Часть связанных с этим понятий была известна и ранее как деривации групповых алгебр, а часть из них как (ко)гомотопии Хохшильда. Ключевым моментом здесь служит новая геометрическая связь исходной группы с группоидом присоединенного действия, которая позволила расширить возможности вычисления как дериваций, так и гомотопий Хохшильда [21].

В результате этого исследования появилось описание пространств дифференцирований над различными типами ассоциативных алгебр. Для описания использовались пространства характеров над подходящими категориями. В случае групповых алгебр основным методом является выделение идеала так называемых квазивнутренних дифференцирований, т.е. дифференцирований, которые задаются характеристиками, обращающимися в нуль на всех петлях [22].

3.7. Алгебраическая топология и K -теория. В 2019 г. Ф. Ю. Попеленским и Д. Ю. Емельяновым построены новые серии аддитивных базисов в алгебрах Стиррода $\text{mod } p$, $p > 2$, и найдены приложения этих новых базисов [23]. Доказана тривиальность аннигиляторного идеала действия алгебры Стиррода в когомологиях пространства Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/p, 2)$. Опровергнута обобщенная гипотеза Тоды для $p > 2$. Исследована треугольность матриц замен для некоторых пар базисов.

Совместно с А. Ю. Онищенко [24] было показано совпадение спектральных последовательностей для расслоения Серра над компактным односвязным многообразием, не укладывающихся в общую технологию Барнса, а именно был построен естественный изоморфизм спектральной последовательности для минимальной модели расслоения $(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$ и спектральных последовательностей, построенных по фильтрации Чеха комплексов $\check{C}^*(\mathcal{V}, A_{PL}^*)$ и $\check{C}^*(\mathcal{V}, S^*(V))$. С использованием этих результатов вычислены рациональные гомологии пространства свободных петель произвольного замкнутого четырехмерного многообразия.

В [25] вычислены кольца когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$ частично проективных кватернионных многообразий Штифеля — факторов многообразия Штифеля по естественному действию группы, действующей свободно и ортогонально на сфере.

3.8. Приложение теории гомологий к задачам дискретной математики и комбинаторики. История задачи нахождения числа $P(2, n)$ пороговых функций алгебры логики насчитывает почти 200 лет. В работах 1850–1852 гг. [26] Л. Шлефли дал точную верхнюю оценку для $P(2, n)$. В 1993 г. А. А. Ирматов [27] получил наилучшую на тот момент нижнюю оценку числа пороговых функций на основе предложенной им оригинальной (A, B, C) -конструкции, которая далее была им (совместно с Ж. Ковиянич) применена для получения асимптотики логарифма числа $P(k, n)$ пороговых функций k -логики.

Параллельно поиску асимптотики числа пороговых функций с конца 1930-х гг. многие ученые проявляли существенный интерес к задаче распределения значений детерминанта случайной $\{\pm 1\}$ (или $\{0, 1\}$) $(n \times n)$ -матрицы. Интуитивно было ясно, что существует связь между задачами о нахождении асимптотик числа $P(2, n)$ и вероятности $\mathbb{P}_n$ вырожденности $\{\pm 1\}$ $(n \times n)$ -матриц.

С 1963 по 2018 гг. ряд улучшающихся верхних оценок был получен в работах таких специалистов, как Я. Комлос, Дж. Кан, Е. Семереды, Т. Тао, В. Ву, Ж. Бургейн, П. М. Вуд, К. Тихомиров и др.

Первая попытка применения комбинаторно-топологических методов для нахождения $P(2, n)$ была предпринята А. А. Ирматовым в [28]. Далее, им получена нижняя оценка числа $P(2, n)$ в терминах полных комбинаторных флагов с использованием аналога детерминанта для множества, состоящего из $K > n$ векторов из R^n , для измерения, насколько далеко в смысле “вырожденности” находится заданная конфигурация из векторов от конфигурации в общем положении. На основе этого подхода в [29] получены асимптотики $P(2, n) \sim 2\binom{2^n-1}{n}$, $\mathbb{P}_n \sim (n-1)^2 2^{1-n}$ при $n \rightarrow \infty$.

3.9. Эллиптические операторы и K -теория. Одной из важных задач эллиптической теории является вычисление стабильной гомотопической классификации эллиптических операторов. Классическое решение этой задачи, данное для случая гладких компактных многообразий М. Атьей и И. Зингером, формулируется в терминах K -теории кокасательного расслоения заданного многообразия и не переносится непосредственно на случай негладких многообразий, где кокасательное расслоение уже не содержит всей необходимой информации.

В последнее время появились обобщения теоремы Атьи–Зингера на многообразия с коническими особенностями, с ребрами, а затем и на общие так называемые стратифицированные многообразия, формулировки которых отличаются от гладкого случая лишь заменой гладкого многообразия на “стратифицированное” (соответствующего класса). Стратифицированные многообразия представляют собой в некотором смысле удивительное явление: хотя алгебра символов (псевдо)дифференциальных операторов на таких многообразиях весьма некоммутативна (компоненты символа, отвечающие стратам положительной коразмерности, суть операторнозначные функции), ответ в задаче классификации удастся сформулировать в чисто геометрических терминах.

Для других классов негладких многообразий это, вообще говоря, не так. В частности, для многообразий с углами классификация дается K -группой некоммутативной C^* -алгебры и не может быть сведена к коммутативной алгебре, если нормальные расслоения граней рассматриваемого многообразия нетривиальны [30, 31].

Отметим, что, несмотря на “классичность” результата, уже в случае стратифицированных многообразий доказательства опираются на некоммутативную геометрию, а именно на K -теорию C^* -алгебр.

4. Доклады на семинаре. Главная ценность семинара — наши докладчики. Приблизительная оценка свидетельствует о том, что за время существования семинара с 1970 г. было прочитано не менее 1300 докладов, составивших основу появившегося раздела математики, который сейчас носит название “некоммутативная геометрия”. Полный список докладов, сделанных на семинаре в последние годы, можно найти в [32]. Здесь мы перечислим только часть из них.

Тематике, связанной с эллиптической теорией, в последнее время были посвящены доклады А. В. Алексеева, К. Н. Жуйкова, В. Е. Назайкинского, П. Пиаццы, А. Ю. Савина.

Исследование асимптотического поведения спектров операторов и решений возникающих уравнений было предложено в докладах Ю. В. Кордюкова, В. Е. Назайкинского, С. Ю. Доброхотова.

Немало докладов было посвящено исследованию различных классов дифференциальных исчислений, возникающих в задачах некоммутативной геометрии и в геометрии многообразий. Многие из таких результатов также демонстрировали возможность построения новых операторных алгебр, аналогичных псевдодифференциальным операторам. Отметим, в частности, доклады Д. В. Миллионщикова, А. В. Наянзина, А. Б. Жеглова, А. В. Алексеева, А. М. Миховича, Г. И. Шарыгина, Д. В. Занина.

На смежных вопросах квантового функционального анализа, обобщениях двойственности Понтрягина и на категорных аспектах некоммутативной геометрии были сосредоточены доклады участников семинара “Алгебры в анализе”, в частности О. Ю. Аристова, А. Я. Хелемского, А. Ю. Пирковского, С. С. Акбарова, Ю. Н. Кузнецовой.

Доклады А. В. Ершова и М. Каруби были посвящены исследованию K -теории, классической, операторной и скрученной. Исследование стабильных гомотопических групп и гипотеза Кервера об Арф-инварианте излагались П. М. Ахметьевым. Построение теории гомологий графов и мультиграфов было предложено в докладах Ю. В. Муранова. Вопросы изгибаемости компактных невыпуклых поверхностей обсуждались И. Х. Сабитовым. Теории псевдопредставлений групп и разрывным представлениям была посвящена серия докладов А. И. Штерна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Connes A.* Noncommutative Geometry. San Diego: Academic Press, 1994.
2. *Гельфанд И.М., Наймарк М.А.* О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве // Матем. сб. 1943. **54**, № 2. 197–217.
3. *Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е.* Коммутативные нормированные кольца // Успехи матем. наук. 1946. **1**, № 2. 48–146.
4. *Гельфанд И.М., Мищенко А.С.* Квадратичные формы над коммутативными групповыми кольцами и K -теория // Функц. анализ и его прил. 1969. **3**, № 4. 28–33.
5. *Мищенко А.С.* Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий. 1. Рациональные инварианты // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. **34**, № 3. 501–514.
6. *Мищенко А.С.* Бесконечномерные представления дискретных групп и высшие сигнатуры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. **38**, № 1. 81–106.
7. *Соловьев Ю.П.* Дискретные подгруппы, комплексы Брюа–Титса и гомотопическая инвариантность высших сигнатур // Успехи матем. наук. 1976. **31**, № 1. 261–262.
8. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прил. 1978. **12**, № 2. 46–56.
9. *Красаускас Р.Л., Лапин С.В., Соловьев Ю.П.* Диздральные гомологии и когомологии. Основные понятия и конструкции // Матем. сб. 1987. **133**, № 1. 25–48.
10. *Соловьев Ю.П.* Алгебраическая K -теория квадратичных форм // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. 1986. **24**. 121–194.
11. *Paschke W.L.* Inner product modules over B^* -algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. **182**. 443–468.
12. *Соловьев Ю.П., Троицкий Е.В.* C^* -алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии. М.: Факториал, 1996.
13. *Мануйлов В.М., Троицкий Е.В.* C^* -гильбертовы модули. М.: Факториал, 2001.
14. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Индекс эллиптических операторов над C^* -алгебрами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. **43**, № 4. 831–859.
15. *Ирматов А.А.* Топология пространства фредгольмовых операторов и инварианты нелинейных фредгольмовых отображений // Успехи матем. наук. 1990. **45**, № 1. 173–174.
16. *Irmatov A.A., Mishchenko A.S.* On compact and Fredholm operators over C^* -algebras and a new topology in the space of compact operators // J. K-Theory. 2008. **2**. 329–351.
17. *Frank M., Manuilov V., Troitsky E.* A reflexivity criterion for Hilbert C^* -modules over commutative C^* -algebras // New York J. Math. 2010. **16**. 399–408.

18. *Manuilov V.M.* On extendability of functionals on Hilbert C^* -modules // *Math. Nachr.* 2024. **297**. 998–1005.
19. *Manuilov V.* Weakening idempotency in K -theory // *Pacif. J. Math.* 2017. **289**. 381–394.
20. *Арутюнов А.А., Мищенко А.С.* Редукция исчисления псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к исчислению на компактном многообразии удвоенной размерности // *Матем. заметки.* 2013. **94**, № 4. 488–505.
21. *Арутюнов А.А., Мищенко А.С., Штерн А.И.* Деривации групповых алгебр // *Фунд. и прикл. матем.* 2016. **21**, № 6. 65–78.
22. *Arutyunov A.* Derivations in group algebras and combinatorial invariants of groups // *Europ. J. Math.* 2023. **9**, N 39.
23. *Emelyanov D.Yu., Popelensky Th.Yu.* Bases in the mod p Steenrod algebra, β included // *J. Pure and Appl. Algebra.* 2019. **223**. 3386–3401.
24. *Onishchenko A.Yu., Popelensky Th.Yu.* Rational cohomology of the free loop space of a simply connected 4-manifold // *J. Fixed Point Theory Appl.* 2012. **12**. 69–92.
25. *Жубанов Г.Е., Попеленский Ф.Ю.* О кольцах когомологий частично проективных кватернионных многообразий Штифеля // *Матем. сб.* 2022. **213**, № 3. 21–41.
26. *Schläfli L.* Gesammelte Mathematische Abhandlungen I. Basel: Springer, 1950. 209–212.
27. *Ирматов А.А.* О числе пороговых функций // *Дискретн. матем.* 1993. **5**, № 3. 40–43.
28. *Ирматов А.А.* Оценки числа пороговых функций // *Дискретн. матем.* 1996. **8**, № 4. 92–107.
29. *Ирматов А.А.* Асимптотические оценки числа пороговых функций и вероятности вырожденности случайных $\{\pm 1\}$ -матриц // *Докл. РАН. Матем., информ., процессы управления.* 2020. **492**. 89–91.
30. *Nazaikinskii V.E., Savin A.Yu., Sternin B.Yu.* Noncommutative geometry and classification of elliptic operators // *J. Math. Sci.* 2010. **164**, N 4. 603–636.
31. *Назайкинский В.Е., Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* О гомотопической классификации эллиптических операторов на стратифицированных многообразиях // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2007. **71**, № 6. 91–118.
32. Интернет-страница семинара: https://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?option_lang=rus&eventID=12&confid=624.

Поступила в редакцию
07.07.2024

УДК 51(091)

КАБИНЕТ ИСТОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ СО ВРЕМЕНИ ОСНОВАНИЯ ДО 2024 ГОДА

С. С. Демидов¹, Г. С. Смирнова²

Статья посвящена истории создания и деятельности в Московском университете кабинета истории и методологии математики и механики, первый этап которой подробно описывается впервые. Освещаются основные направления исследований коллектива во второй половине XX—начале XXI вв.

Ключевые слова: история математики, история механики, Московский университет, физико-математический факультет, механико-математический факультет, Московское математическое общество, С. А. Яновская, К. А. Рыбников, С. С. Демидов.

The paper is focused on the history of creation and activity of the Chair of History and Methodology of Mathematics and Mechanics at Moscow University, the first stage of which in

¹ Демидов Сергей Сергеевич — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каб. истории и методологии математики и механики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: serd42@mail.ru.

Demidov Sergey Sergeevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of History and Methodology of Mathematics and Mechanics.

² Смирнова Галина Сергеевна — канд. физ.-мат. наук, доцент каб. истории и методологии математики и механики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: galina.smirnova@math.msu.ru.

Smirnova Galina Sergeevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of History and Methodology of Mathematics and Mechanics.